



**CEFET-MG**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
UNIDADE ARAXÁ**

**GERMANO JOSÉ DE FREITAS**

**PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA AO PROCESSO DE BLENDAGEM  
DE MINÉRIO**

ARAXÁ/MG

2025

**GERMANO JOSE DE FREITAS**

**PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA AO PROCESSO DE BLENDAGEM  
DE MINÉRIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Automação Industrial, do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET/MG, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Automação Industrial.

Orientadora: Dra. Aline Fernanda Bianco Mattioli

ARAXÁ/MG

2025

## ANEXO VII

### ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL DO(A) ALUNO(A)

**GERMANO JOSÉ DE FREITAS**

Às **19 horas** do dia **15 de julho de 2025**, reuniu-se, no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET-MG - Campus Araxá, a Comissão Examinadora de Trabalho de Conclusão de Curso para julgar, em exame final, o trabalho intitulado **Programação Linear Aplicada ao Processo de Blendagem de Minério**, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel(a) em Engenharia de Automação Industrial. Abrindo a sessão, o(a) Presidente da Comissão, Prof.(a) **Aline Fernanda Bianco Mattioli**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, concedeu a palavra ao(à) candidato(a), **Germano José de Freitas**, para a apresentação de seu trabalho. Após a apresentação, seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do(a) candidato(a). Ultimada a arguição, a Comissão se reuniu, sem a presença do(a) candidato(a) e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Após a reunião da Comissão Examinadora, o(a) candidato(a) foi considerado(a): aprovado, obtendo nota final de: 90 /100 ( noventa pontos). O resultado final foi comunicado publicamente ao(à) candidato(a) pelo(a) Presidente da Comissão. O(A) aluno(a), abaixo assinado(a), declara que o trabalho ora identificado é da sua autoria material e intelectual, excetuando-se eventuais elementos, tais como passagens de texto, citações, figuras e datas, desde que as mesmas identifiquem claramente a fonte original, explicitando as autorizações obtidas dos respectivos autores, quando necessárias. Declara ainda, neste âmbito, não violar direitos de terceiros. Nada mais havendo a tratar, o(a) Presidente encerrou os trabalhos e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Araxá, 15 de julho de 2025.

Orientador(a): Aline Fernanda Bianco Mattioli

Assinatura: Aline F. Bianco Mattioli

Membro da Banca 2: Carlos Antônio de Medeiros

Assinatura: Carlos Antônio de Medeiros

Membro da Banca 3: Álvaro Francisco de Brito Júnior

Assinatura: \_\_\_\_\_

Membro da Banca 4 (se houver):

Assinatura: \_\_\_\_\_

Aluno(a): Germano José de Freitas

Assinatura: Germano J. Freitas

## **DEDICO ESTE TRABALHO**

Aos meus pais, Corina Aparecida de Resende e José Naim de Freitas e ao meu irmão, Rafael José de Freitas pelo grande incentivo na realização dos meus sonhos e por sempre acreditarem no meu potencial. Obrigada a todos vocês pelo carinho e atenção empreendidos a mim.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pela minha vida, por iluminar o meu caminho diariamente, me dando força e bravura para vencer os momentos difíceis com sabedoria.

Aos meus pais, Corina e José, pelo amor incondicional, pela presença na minha vida e por todo suporte que me deram durante essa jornada.

Ao meu irmão, Rafael, pelo companheirismo e cumplicidade durante todas as etapas da minha vida.

A minha orientadora Aline Fernanda Bianco Mattioli, por me guiar durante a realização do trabalho com paciência e dedicação. Além, de me incentivar e acreditar no meu potencial.

Ao professor, Leandro Resende Mattioli, pelo apoio durante a faculdade e na realização deste trabalho.

Ao CEFET-MG, pela excelência no ensino e pela estrutura oferecida ao longo da minha formação.

Estendo minha gratidão a todos os professores da instituição, que contribuíram com seus conhecimentos para minha formação acadêmica e pessoal.

A todos vocês, o meu mais sincero e profundo agradecimento.

## EPÍGRAFE

"Onde seus talentos e as necessidades do mundo se cruzam, aí está sua vocação."

Aristóteles

## RESUMO

As empresas buscam cada vez mais aumentar a performance em seus processos, e no setor mineral não é diferente, pois em um cenário em que se lida com recursos naturais, não pode haver desperdícios. Nesse contexto, as empresas buscam constantemente soluções que otimizem seus processos com o objetivo de aumentar a produtividade, melhorar a eficiência operacional e, simultaneamente, reduzir os custos operacionais. Diante dessas exigências, a busca por tecnologias e ferramentas que possam agregar valor ao processo se torna algo obrigatório para as empresas, e a pesquisa operacional vem de encontro a isso. Capaz de apoiar a tomada de decisão por meio de modelagem e simulação de diferentes variáveis, e em cenários diversos. Essa abordagem permite que decisões mais assertivas sejam tomadas com base em análises críticas antes da execução prática. Entre os desafios enfrentados pela industrial mineral está a formação do blend final, com teores químicos e quantidades exigidas pelo cliente. Para esse problema, o presente trabalho propõe um modelo matemático baseado em programação linear, com objetivo de definir, de forma otimizada, as quantidades ideais de cada produto intermediário de modo que o lote formado possa atender aos critérios definidos pelo cliente ao mesmo tempo que minimize os custos da produção. O modelo foi implementado utilizando o suplemento Solver, disponível no software Microsoft Excel. A escolha dessa ferramenta visa facilitar a aplicação prática nas empresas, tendo em vista que a maioria delas já dispõe de licença do pacote Office, o que elimina a necessidade de softwares adicionais. Foram simulados 3 cenários típicos de uma indústria com problema de mistura. Em todos os cenários existia cinco pré produtos disponíveis em estoque, cada um com suas características químicas, custos de produção e quantidades em estoque. Com a ordem de produção contendo a quantidade e os teores exigidos, é gerado o blend entre os cinco produtos que minimiza os custos. A análise também evidenciou a importância do uso racional dos recursos minerais, contribuindo para a sustentabilidade e eficiência operacional das mineradoras.

Palavras-chave: Programação Linear, Blendagem de Minérios, Otimização, Pesquisa Operacional, Mineração.

## ABSTRACT

Companies are increasingly looking to boost performance in their processes, and the mineral sector is no different. In a scenario dealing with natural resources, waste is simply unacceptable. In this context, companies constantly seek solutions that optimize their processes with the goal of increasing productivity, improving operational efficiency, and simultaneously reducing operational costs. Given these demands, the search for technologies and tools that can add value to the process becomes a mandatory requirement for companies, and operations research directly addresses this need. It's capable of supporting decision-making through the modeling and simulation of different variables in diverse scenarios.

This approach allows for more assertive decisions to be made based on critical analyses before practical execution. Among the challenges faced by the mineral industry is the formation of the final blend, with chemical grades and quantities required by the client. For this problem, the present work proposes a mathematical model based on linear programming, with the objective of optimally defining the ideal quantities of each intermediate product so that the formed batch can meet the criteria defined by the client while minimizing production costs. The model was implemented using the *Solver* add-in, available in Microsoft Excel. The choice of this tool aims to facilitate practical application in companies, considering that most of them already have an Office suite license, which eliminates the need for additional software. Three typical scenarios of a blending problem in an industry were simulated. In all scenarios, there were five pre-products available in stock, each with its chemical characteristics, production costs, and quantities in stock. With the production order containing the required quantity and grades, the blend among the five products that minimizes costs is generated. The analysis also highlighted the importance of the rational use of mineral resources, contributing to the sustainability and operational efficiency of mining companies.

Keywords: Linear Programming, Ore Blending, Optimization, Operations Research, Mining.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Processo de tomada de decisão.....	17
Figura 2 - Formulação de um Problema de Programação Linear.....	17
Figura 3 - Interface dos parâmetros no <i>Solver</i> .....	25
Figura 4 - Tela intermediária do <i>Solver</i> .....	26
Figura 5 - Esquema do Problema de Blendagem.....	27
Figura 6 – Quantidade em kg obtida no Cenário 1 .....	31
Figura 7 – Quantidade em kg obtida no Cenário 2.....	32

## LISTA DE TABELAS E QUADROS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros máximos dos teores .....	28
Tabela 2 - Valores dos parâmetros mínimos dos teores .....	28
Tabela 3 - Materiais produzidos com restrições de disponibilidade e custo .....	29
Tabela 4 - Restrições com os teores máximos e mínimos - Cenário 1 .....	30
Tabela 5 – Resultado obtido pelo Solver para o Cenário 1 .....	30
Tabela 6 - Restrições com os teores máximos e mínimos - Cenário 2 .....	31
Tabela 7 – Resultado obtido pelo Solver para o Cenário 2 .....	32

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

LINDO	Linear, Interactive, and Discrete Optimizer.
PO	Pesquisa Operacional
PL	Programação Linear
OP	Ordem de Produção

## Sumário

1	INTRODUÇÃO .....	12
1.1	Justificativa.....	13
1.2	Objetivo Geral .....	14
1.2.1	Objetivos Específicos .....	14
2	REVISÃO DA LITERATURA.....	15
2.1	Pesquisa Operacional.....	15
2.2	Modelagem Matemática.....	16
2.3	– Nióbio.....	17
2.4	– Blendagem de minério .....	19
3	METODOLOGIA .....	21
3.1	Programação Linear.....	23
3.2	Aplicações na Mineração .....	23
3.3	Ferramentas Computacionais .....	24
4	RESULTADOS.....	27
5	CONCLUSÃO .....	34
	REFERÊNCIAS.....	35

# 1 INTRODUÇÃO

A mineração desempenha um papel fundamental no desenvolvimento econômico mundial, fornecendo matérias-primas essenciais para diversas indústrias. No entanto, o setor enfrenta desafios significativos, incluindo a necessidade de otimizar processos de extração e beneficiamento, reduzir custos operacionais e minimizar impactos ambientais (ANM, 2022).

Nesse contexto, a aplicação de técnicas de Pesquisa Operacional (PO), como a Programação Linear (PL), tornou-se indispensável para alcançar a eficiência e sustentabilidade nas operações mineradoras.

A Programação Linear é uma técnica de otimização matemática amplamente utilizada em diversas áreas. Ela permite a modelagem de problemas complexos, onde o objetivo é maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a restrições lineares. Na mineração, essa técnica é relevante para resolver problemas relacionados à blendagem de minérios, onde diferentes fontes de minério precisam ser combinadas de forma a atender especificações de qualidade e quantidade, garantindo, assim, a continuidade operacional das usinas de beneficiamento.

Além disso, o uso de ferramentas computacionais tem facilitado a implementação de modelos de programação linear em ambientes industriais. Essas ferramentas não apenas automatizam o processo de otimização, mas também permitem que as empresas mineradoras simulem diferentes cenários, avaliem possíveis soluções e tomem decisões mais embasadas e estratégicas.

Portanto, a aplicação de técnicas de programação linear na mineração não apenas melhora a eficiência operacional, mas também contribui para a sustentabilidade do setor, ao permitir o uso mais racional dos recursos minerais disponíveis.

Este trabalho busca explorar as diferentes aplicações da programação linear no contexto da mineração, com foco na otimização do processo de blendagem (mistura) de produtos de minérios, demonstrando como essa técnica pode ser um poderoso aliado na gestão e planejamento de operações das mineradoras.

## 1.1 Justificativa

A crescente demanda global por recursos minerais, aliada à pressão por práticas mais sustentáveis e eficientes, impõe às empresas mineradoras a necessidade de otimizar suas operações. Nesse contexto, a programação linear emerge como uma ferramenta poderosa para enfrentar os desafios complexos da mineração moderna. A técnica permite a modelagem de problemas envolvendo múltiplas variáveis e restrições, como a blendagem de minérios, que é crucial para garantir a qualidade do produto final e a eficiência operacional.

A otimização do processo de blendagem não apenas assegura que as especificações de qualidade sejam atendidas, mas também contribui para a redução de custos operacionais, ao permitir o uso racional e eficiente dos recursos disponíveis. Além disso, ao minimizar a variabilidade dos materiais que chegam à usina de beneficiamento, a programação linear melhora a previsibilidade dos processos subsequentes, resultando em ganhos de produtividade e redução de desperdícios.

Outro ponto relevante é a facilidade de implementação de modelos de programação linear em ambientes corporativos, especialmente com o uso de ferramentas computacionais, como o suplemento *Solver* do software Excel ou o LINDO (*Linear, Interactive, and Discrete Optimizer*).

Essas ferramentas permitem que empresas mineradoras, mesmo aquelas com recursos limitados, possam adotar técnicas avançadas de otimização em seu dia a dia, aumentando sua competitividade e capacidade de resposta às mudanças no mercado.

Dessa forma, a aplicação de programação linear na mineração não se justifica apenas pela busca por eficiência, mas também pela necessidade de sustentabilidade, ao permitir que os recursos naturais sejam explorados de maneira mais responsável e estratégica.

Este trabalho, portanto, justifica-se pela importância de explorar e demonstrar como a programação linear pode ser aplicada para resolver problemas complexos na mineração, contribuindo para a evolução e melhoria contínua das práticas operacionais no setor.

## 1.2 Objetivo Geral

Desenvolver e aplicar modelos de programação linear na otimização do processo de blendagem de produtos de minérios em operações de mineração, visando aumentar a eficiência operacional e reduzir custos.

### 1.2.1 Objetivos Específicos

- 1) Analisar o processo de blendagem de minérios: Identificar as variáveis e restrições críticas envolvidas na formação de produto final de minério, levando em consideração as especificações de qualidade, quantidade e as condições operacionais.
- 2) Desenvolver modelos matemáticos de otimização: Criar modelos de programação linear que representem o processo de blendagem, incluindo a formulação de funções objetivo e a definição de restrições baseadas nas características dos minérios e nas metas operacionais.
- 3) Implementar os modelos em ferramentas computacionais: Utilizar softwares como o Excel ou LINDO para aplicar os modelos desenvolvidos, permitindo a simulação de diferentes cenários operacionais.
- 4) Validar os modelos propostos: Comparar os resultados obtidos a partir das simulações com dados reais ou *benchmarks* da indústria para verificar a eficácia e a aplicabilidade dos modelos na otimização do processo de blendagem.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Pesquisa Operacional

A pesquisa operacional é uma área interdisciplinar que se consolidou como essencial para a otimização de processos decisórios em diversos campos, especialmente na indústria e mineração.

Desde a sua origem, durante a Segunda Guerra Mundial, a pesquisa operacional tem sido utilizada para resolver problemas complexos, envolvendo múltiplas variáveis e restrições. Segundo Taha (2007), a pesquisa operacional se caracteriza pelo uso de modelos matemáticos, estatísticos e computacionais para a análise e otimização de processos. Hillier e Lieberman (2013) reforçam essa visão, destacando que a pesquisa operacional permite uma abordagem estruturada para a tomada de decisões, essencial para maximizar a eficiência operacional em ambientes competitivos.

A Pesquisa Operacional, também conhecida como ciência e tecnologia de decisão, “[...] consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas” (ARENALES e ARMENTANO, 2006). Definida como um método para estruturar processos por meio de construção de modelos e, também, como um conjunto de técnicas quantitativas de otimização, esse ramo da ciência ganhou vulto a partir de 1950 (HEIN e LOESCH, 2009).

Uma evidência de que a Pesquisa Operacional está cada vez mais disseminada, está no fato de que antigamente, na década de 1960, ser lecionada apenas em cursos de pós-graduação e a partir da década de 1970 passou a ser estudada também em cursos de graduação.

Além disso, encontram-se atualmente várias sociedades científicas em diversos países relacionadas à prática da pesquisa operacional, como, por exemplo, Sociedade de Pesquisa Operacional (OR Society) no Reino Unido, a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO), a Sociedade Finlandesa de Pesquisa Operacional (FORS), a Sociedade de Pesquisa Operacional da África do

Sul (ORSSA) e a Sociedade Polonesa de Pesquisa Operacional e de Sistemas (POSRS).

Vale ressaltar que a PO está relacionada ao modelamento de problemas de decisão, de acordo com o objetivo do tomador desta e as restrições sob as quais se deve operar. Baseia-se em métodos matemáticos determinísticos para otimização de sistemas numéricos e está se tornando uma importante ferramenta nas metodologias de tecnologia da informação.

Os problemas de Programação Linear, subárea da Pesquisa Operacional, são problemas de otimização linear, ou seja, buscam pela melhor solução dentre várias soluções em modelamentos matemáticos lineares. São divididos basicamente em Problemas de Planejamento de Produção, Problema de Transportes e Problemas de Misturas, o qual será aprofundado neste trabalho.

## **2.2 Modelagem Matemática**

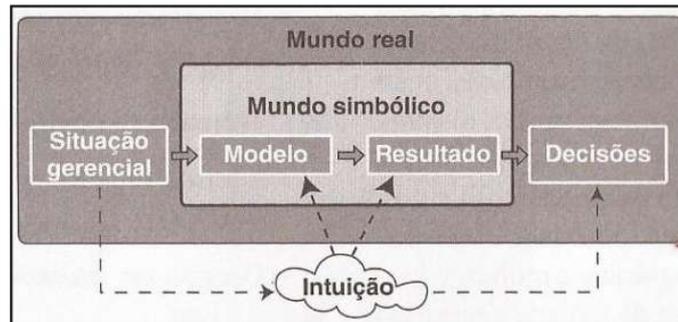
A modelagem matemática é uma das principais ferramentas da pesquisa operacional, sendo utilizada para representar de forma simplificada, porém precisa, os problemas reais enfrentados pelas empresas. De acordo com Pindyck e Rubinfeld (2010), a construção de um modelo matemático envolve a definição clara das variáveis, parâmetros e restrições que compõem o problema.

Os modelos de simulação e otimização são amplamente utilizados para prever o comportamento de sistemas complexos sob diferentes cenários, permitindo a identificação da melhor solução possível (RAVINDRAN, PHILIP e SOLBERG, 2006).

Conforme proposto e definido por Lachtermacher (2009), o ideal é utilizar conjuntamente a tecnologia da informação com a experiência para melhorar ainda mais o processo de tomada de decisão (RAVINDRAN, PHILIP e SOLBERG, 2006).

A intuição do tomador de decisão deve ajudá-lo na seleção das informações relevantes, nos possíveis cenários a serem estudados, na validação do modelo e na análise de seus resultados. Esse processo está representado na Figura 1.

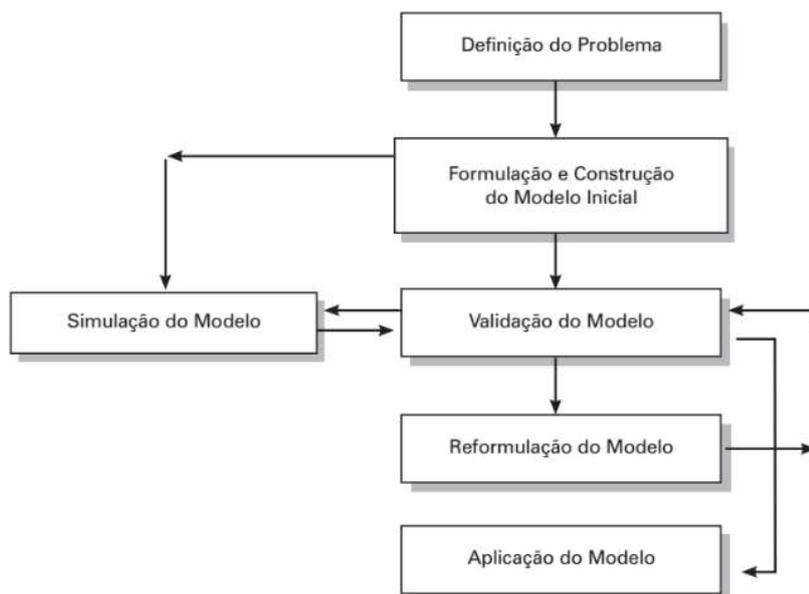
Figura 1 - Processo de tomada de decisão



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009)

O processo de modelagem deve seguir o fluxograma da Figura 2.

Figura 2 - Formulação de um Problema de Programação Linear



Fonte: (GOLDBARG e LUNA, 2005)

## 2.3 – Nióbio

De acordo com Tarselli, 2015 o nióbio (Nb), elemento químico de número atômico 41, pertence à classe dos metais de transição do grupo 5 da tabela periódica. Segundo Griffith, 2003 foi descoberto em 1801 por Charles Hatchett, foi inicialmente

denominado “colúmbio”. No entanto, como afirma (WISNIAK, 2015) somente em 1844 o mineralogista Heinrich Rose conseguiu isolá-lo, renomeando como “nióbio” em referência à personagem mitológica Níobe. A nomenclatura foi oficialmente reconhecida pela IUPAC apenas em 1950.

Três anos após essa oficialização do nome, Segundo (BRUZIQUES, , *et al.*, 2020) o geólogo brasileiro Djalma Guimarães identificou os primeiros cristais de pandaíta no município de Araxá, Minas Gerais, o que levou à descoberta das maiores jazidas de pirocloro do mundo com até 71% de óxido de nióbio ( $Nb_2O_5$ ). Atualmente, o Brasil detém cerca de 98% das reservas conhecidas de nióbio, com destaque para os estados de Minas Gerais (Araxá) e Goiás (Catalão e Ouidor). A Companhia Brasileira de Metalurgia e Mineração (CBMM), sediada em Araxá, é a principal produtora mundial, responsável por toda a produção nacional de  $Nb_2O_5$  e por produtos como ferro nióbio, nióbio metálico e óxidos de nióbio.

A columbita-tantalita e o pirocloro, que para efeitos de simplificação utiliza a terminologia química ( $Nb_2O_5$ ), são as principais fontes de nióbio no Brasil e no mundo (PEREIRA JUNIOR, 2009).

O Nióbio é um metal de transição que exibe características notáveis. Em sua forma mais pura, é macio, dúctil e altamente resistente à corrosão. Através de processos metalúrgicos, obtém-se produtos de Nióbio que, ao aprimorar propriedades e funcionalidades, encontram inúmeras aplicações, como em carros, estruturas de edifícios e pontes, turbinas de avião, aparelhos de ressonância magnética, marcapassos, sondas espaciais, foguetes, tubulações de gás, componentes eletrônicos e baterias (CBMM, 2015).

A liga de Ferro-Nióbio é obtida através do processo de redução aluminotérmica a partir do concentrado de pirocloro, contendo 65% de Nb é o mais importante produto industrializado de nióbio, sendo empregado na indústria siderúrgica como elemento microligante, principalmente os aços microligados conhecidos como —HSLAII. Nesses aços microligados, o teor típico de nióbio é de aproximadamente 400 a 500 g/t de aço e a função do nióbio na elaboração deles mesmos é proporcionar resistência mecânica com diminuição do peso. Estes aços são utilizados na fabricação de automóveis e de tubulações para transmissão de gás sob alta pressão. Nos aços

inoxidáveis a função da adição da liga ferro-nióbio é neutralizar o efeito de carbono e nitrogênio que ocasionam corrosão.

O processo de produção da liga Fe-Nb é feito a partir de uma reação aluminotérmica onde são misturados o concentrado de pirocloro, a sucata de ferro ou o óxido de ferro e o carvão de origem vegetal. Os reatores consistem em um cilindro de chapa de carbono revestido com tijolos de Magnesita e posicionados em um leito de areia e sílica sobre uma concavidade cônica preparada previamente e destinada a receber todo o metal a ser produzido durante a reação. A areia do fundo do reator é revestida por uma camada de bentonita e cal (PEREIRA JR., 2009).

Após a solidificação, o FeNb é britado, amostrado, analisado e estocado em tambores de 1000 kg. O Fe-Nb pode ser embalado em tambores de 250 kg, podendo também ser embalado em tambores de 25 lb. ou sacos (big bags) conforme as solicitações dos clientes, e levados até o porto do Rio de Janeiro em carretas para serem exportados (PEREIRA JR., 2009).

## **2.4 – Blendagem de minério**

O problema de blendagem de minério consiste em determinar a melhor forma de misturar diferentes tipos de minérios com propriedades variadas, visando atender aos requisitos de qualidade e demanda de produção de uma indústria ou cliente final, maximizando lucros e/ou minimizando custos. Ao se blendar os minérios é necessário atentar às proporções escolhidas, para que a mistura atenda as metas de quantidade e qualidade requeridas (TOFFOLO, 2009).

O objetivo principal dessa técnica é montar misturas de minérios que estejam dentro das especificações técnicas exigidas, usando os recursos disponíveis de forma otimizada.

Wu et al. (2012) propuseram um modelo de otimização de blendagem de minério de ferro para sinterização que considera 14 índices dos minérios — incluindo composição química, granulometria e comportamento em altas temperaturas — e combina métodos de programação linear (Algoritmo *Simplex*) e heurísticas para

determinar proporções ideais que asseguram qualidade constante e menor custo operacional.

Milagres, J. M., (2019) mostrou que é possível aumentar a base de estoque em uma mineradora, visando reduzir perdas, por meio do processo de blendagem de minérios, apresentando um modelo matemático que maximiza o número de lotes gerados, respeitando as metas de quantidade e qualidade exigidas por clientes.

No próximo Capítulo será descrita a metodologia empregada ao problema proposto neste trabalho, evidenciando o equacionamento dos problemas de PL e as ferramentas computacionais posteriormente utilizadas nos resultados.

### 3 METODOLOGIA

Na sequência será estruturado um problema geral de mistura, a fim deste ser aplicado à blendagem de minério, tema deste presente trabalho.

Primeiro deve-se definir o objetivo de forma clara, que pode ser de duas formas:

i) Minimização do custo total ou outro critério de otimização (por exemplo, minimizar a quantidade de um recurso utilizado).

ii) Maximização da qualidade do produto final, o lucro ou outro critério desejado.

As variáveis de decisão neste tipo de problema definem a quantidade de cada ingrediente ou recurso a ser usado na mistura. Essas variáveis podem ser contínuas (como a quantidade em litros ou toneladas) ou discretas (como o número de unidades).

A função objetivo a ser minimizada ou maximizada consiste em uma equação matemática linear que representa o custo total ou o valor total a ser otimizado, com base nas variáveis de decisão.

As restrições podem ser:

(i) Restrições de Composição, as quais garantem que a mistura final atenda as especificações mínimas ou máximas para certos componentes. Por exemplo, a mistura deve ter pelo menos uma certa porcentagem de um ingrediente específico.

(ii) Restrições de Disponibilidade: Limitam a quantidade total de recursos disponíveis para a mistura, como a quantidade máxima de cada ingrediente disponível.

(iii) Restrições de Qualidade que garantem que o produto final atenda aos padrões de qualidade específicos, como limites máximos ou mínimos para certas propriedades.

(iv) Restrições de Não-Negatividade que indicam que não é possível usar uma quantidade negativa de um ingrediente.

Matematicamente, o problema é formulado da seguinte maneira. Suponha que existem vários ingredientes ou recursos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que precisam ser misturados para produzir um produto final.

O problema de mistura pode ser formulado como:

1. Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_n$$

onde  $c_i$  representa o custo ou outro critério associado à unidade do ingrediente  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

2. Restrições:

Restrições de Composição:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{ji}x_i &\geq b_j \end{aligned}$$

sendo  $a_{ji}$  a contribuição do ingrediente  $i = 1, \dots, n$  para a especificação  $j = 1, \dots, m$  e  $b_j$  o valor mínimo ou máximo requerido para a especificação  $j$ .

Restrições de Disponibilidade:

$$x_i \leq \text{Capacidade disponível para o ingrediente } i, i = 1, \dots, n.$$

Restrições de Não-Negatividade:

$$x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

O objetivo é encontrar os valores ótimos para as variáveis  $x_i$  que minimizam o custo total, enquanto satisfazem todas as restrições estabelecidas.

O problema de mistura pode ser resolvido usando técnicas de programação linear, como o Método Simplex, desenvolvido entre 1948 e 1952 (HEIN e LOESCH, 2009), ou outras abordagens de otimização matemática.

Em resumo, um problema de mistura é uma aplicação prática da programação linear que busca otimizar a combinação de diferentes componentes para alcançar um resultado desejado, respeitando diversas restrições.

### 3.1 Programação Linear

A Programação Linear é uma técnica de otimização que visa maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Segundo Bertsimas e Tsitsiklis (1997), a programação linear é uma ferramenta poderosa na pesquisa operacional devido à sua aplicabilidade em uma vasta gama de problemas, como a alocação de recursos, planejamento de produção e mistura de materiais.

O método Simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947, é uma das técnicas mais utilizadas para resolver problemas de PL, sendo reconhecido por sua eficiência e robustez na obtenção de soluções ótimas (DANTZIG, 1953).

Segundo Ramalhete, “Os problemas de otimização são problemas de extremos de funções de variáveis sobre certo domínio, normalmente definido por um conjunto de restrições às variáveis.” (RAMALHETE, GUERREIRO e MAGALHÃES, 1984).

Alguns destes problemas tiveram origem na Física e na Geometria, tendo sido tratados na análise matemática clássica, nomeadamente no Cálculo Diferencial e no Cálculo das Variações, a partir do séc. XVII. Muitos desses resultados foram posteriormente aplicados com sucesso à Engenharia e à Teoria Econômica, em particular à Teoria da Produção e do Consumidor. (RAMALHETE, GUERREIRO e MAGALHÃES, 1984).

### 3.2 Aplicações na Mineração

No contexto da mineração, a Programação Linear é particularmente relevante para a otimização do processo de blendagem de minérios, que visa garantir que as misturas de minério atendam às especificações exigidas pelas usinas de beneficiamento ou clientes. Ela também pode ser aplicada aos problemas de alocação de recursos, rotas de transporte na mina, escala de colaboradores, entre outros.

Conforme discutido por Pereira e Amarante (2015), a blendagem de minérios é um desafio recorrente, pois envolve a combinação de diferentes tipos de minérios para obter uma composição que atenda às especificações de teor e qualidade de produção.

A aplicação de técnicas de programação linear na mineração pode levar à redução de custos e ao aumento da eficiência operacional, fatores essenciais para a sustentabilidade da operação.

### 3.3 Ferramentas Computacionais

O uso de ferramentas computacionais como o suplemento *Solver*, integrado ao Excel, tem facilitado a aplicação de modelos de programação linear em ambientes industriais. Segundo Martim Neto (2016) o *Solver* é uma ferramenta poderosa que permite aos usuários encontrarem soluções ótimas para uma variedade de problemas de otimização, desde finanças até a indústria de mineração.

De acordo com Winston (2004), o *Solver* é uma aplicação prática eficiente para problemas de otimização, especialmente em ambientes empresariais e acadêmicos, devido à sua acessibilidade e integração com o Excel.

Schrage (1998) destaca que o LINDO, outro pacote de software para programação linear, programação inteira, programação não linear, programação estocástica e otimização global, combinada com sua capacidade de lidar com grandes conjuntos de dados e múltiplas restrições, torna-o, também, uma escolha ideal para a aplicação em processos industriais complexos, assim como o *Solver*.

Neste trabalho, optou-se por utilizar o *Solver* que segue os seguintes passos:

- I. Define-se uma célula objetivo que representa o que será otimizado. Por exemplo, maximização do lucro total ou minimização do custo de produção. Neste trabalho, o segundo objetivo foi estabelecido.
- II. Define-se as variáveis de decisão que são as células que o *Solver* irá alterar para buscar o melhor resultado. Exemplo: quantidade de produtos a serem fabricados ou determinação dos teores a serem misturados.
- III. Adiciona-se as restrições que são os limites que não podem ser ultrapassados. Por exemplo:
  - a. Matéria-prima disponível
  - b. Tempo de máquina
  - c. Orçamento máximo

- IV. Executa-se o *Solver* que testa diferentes combinações de valores para as variáveis, dentro das restrições, até encontrar a melhor solução possível.

Como visto na Figura 3, marca-se a opção pelo **LP Simplex** e a janela que considera a não negatividade das variáveis, que é uma opção usual, visto que o que se determina são quantidades e essas não podem ser negativas.

Figura 3 - Interface dos parâmetros no *Solver*

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para:  Máx.  Mín.  Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

- \$B\$19 <= \$B\$21
- \$B\$8 >= \$B\$10
- \$C\$19 <= \$C\$21
- \$C\$8 >= \$C\$10
- \$D\$19 <= \$D\$21
- \$D\$8 >= \$D\$10
- \$E\$19 <= \$E\$21
- \$E\$8 >= \$E\$10
- \$F\$19 <= \$F\$21
- \$F\$8 >= \$F\$10
- \$G\$19 <= \$G\$21

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução

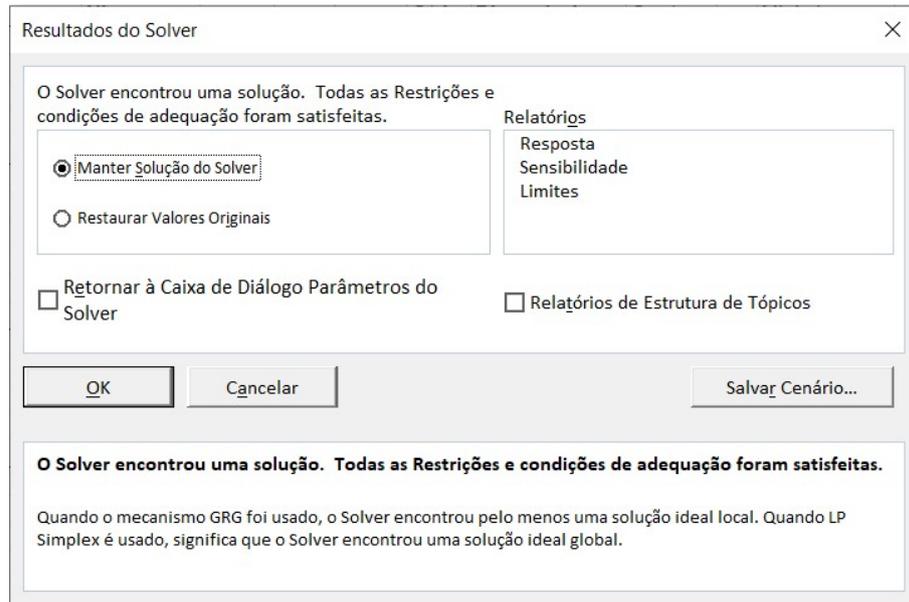
Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resolver Fechar

Fonte: Elaborada pelo autor

Após clicar em Resolver, aparece a tela no software Figura 4:

Figura 4 - Tela intermediária do Solver



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao clicar em OK, volta-se à planilha já com os resultados obtidos pelo Método Simplex para o Problema de Programação Linear nas células correspondentes às quantidades.

O próximo Capítulo evidencia as atividades aqui descritas no período de execução do projeto e os resultados obtidos.

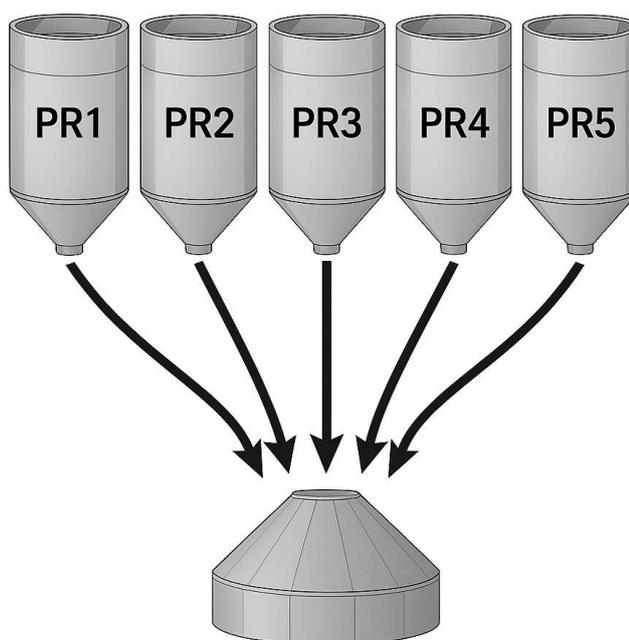
## 4 RESULTADOS

O presente estudo se concentra na mistura dos produtos intermediários de ferro nióbio que já passaram pelas etapas de extração e beneficiamento, e encontram-se em estoque, aguardando para compor o produto final que atenderá o cliente, com o objetivo de maximizar o rendimento dos elementos e, conseqüentemente, minimizar o custo de produção.

Foram considerados cinco produtos intermediários, chamados de Produto 1, Produto 2, Produto 3, Produto 4 e Produto 5, respectivamente, chamados também de PR1, PR2, PR3, PR4 e PR5, onde cada produto intermediário tem suas características químicas, quantidades disponíveis em estoque, e custo de produção para uso na composição do lote final.

A Figura 5 mostra o processo de funcionamento da geração do produto final, em que os materiais de 1 a 5, que compõem as variáveis de decisão, são armazenados separadamente nos silos de estocagem e são liberados para o tanque de blendagem, a fim de atender as especificações enviadas pelos clientes à indústria.

Figura 5 - Esquema do Problema de Blendagem



Fonte: Elaborada pelo autor

A fim de assegurar a produção esperada e o cumprimento dos teores, os produtos intermediários, guardados nos silos de estocagem, já passam por um processo de classificação, que leva em consideração suas características químicas onde cada elemento pode variar dentre uma faixa de valores.

A Tabela 1 exibe os parâmetros de limite dos teores máximos de alguns elementos químicos que compõem a liga de Ferro Nióbio, aplicado ao cenário simulado no software *Solver*.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros máximos dos teores

<b>Material</b>	<b>Al (%)</b>	<b>P (%)</b>	<b>Pb (%)</b>	<b>Si (%)</b>	<b>Fe (%)</b>	<b>Nb (%)</b>
<b>PR1</b>	2,00	0,2	0,25	3,00	35,50	70,00
<b>PR2</b>	1,00	0,1	0,05	3,00	35,20	70,00
<b>PR3</b>	2,00	0,5	0,40	3,00	36,00	70,00
<b>PR4</b>	0,50	0,5	0,25	6,00	35,50	66,50
<b>PR5</b>	1,50	0,08	6,5	8,00	32,00	67,50

Já, a Tabela 2 exibe os parâmetros de limites mínimos dos teores de elementos químicos

Tabela 2 - Valores dos parâmetros mínimos dos teores

<b>Material</b>	<b>Al (%)</b>	<b>P (%)</b>	<b>Pb (%)</b>	<b>Si (%)</b>	<b>Fe (%)</b>	<b>Nb (%)</b>
<b>PR1</b>	0,00	0,00	0,00	1,50	0,00	63,00
<b>PR2</b>	0,00	0,00	0,00	0,80	0,00	64,00
<b>PR3</b>	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	63,00
<b>PR4</b>	0,00	0,00	0,00	1,50	0,00	63,00
<b>PR5</b>	0,00	0,00	0,00	1,50	28,00	64,00

A Tabela 3 exibe os materiais, quantidades disponíveis, e os respectivos custos de produção.

Tabela 3 - Materiais produzidos com restrições de disponibilidade e custo

Material	Descrição	Disponibilidade (Kg)	Custo Kg (R\$)
PR1	Produto1	5637	12
PR2	Produto 2	1142	13
PR3	Produto 3	2008	14
PR4	Produto 4	1090	17
PR5	Produto 5	1015	22

O modelo matemático associado ao problema dado nas tabelas 1, 2 e 3 consiste em minimizar a função objetivo dada através dos custos dos materiais ( $c_j, j = 1 \dots 5$ ):

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_5x_5$$

As variáveis de decisão são dadas no modelo por:

<b>PR1</b>	$x_1$
<b>PR2</b>	$x_2$
<b>PR3</b>	$x_3$
<b>PR4</b>	$x_4$
<b>PR5</b>	$x_5$

Para a geração do melhor *blend* de minério, foi gerado uma Ordem de Produção (OP), que atua como o ponto de partida do processo produtivo, dando início ao planejamento da produção.

A partir das especificações definidas pelo cliente, como teores mínimos e máximos de elementos químicos, além da massa total desejada, a OP orienta o operador a identificar quais produtos podem ser utilizados e em que proporções. Essa definição é essencial para garantir que o resultado atenda os critérios de qualidade e quantidade exigidos.

A função objetivo é a minimização do custo, levando-se em conta a utilização racional do material em estoque, maximizando os ganhos, evitando desperdícios, e atendendo a ordem de produção.

As restrições referentes aos teores máximos dos elementos químicos compõem a Tabela 4.

Tabela 4 - Restrições com os teores máximos e mínimos - Cenário 1

	Especificação Máxima (%)	Especificação Mínima (%)
Al	2	0
P	1	0
Pb	2	0
Si	5	0
Fe	36	5
Nb	70	63,5

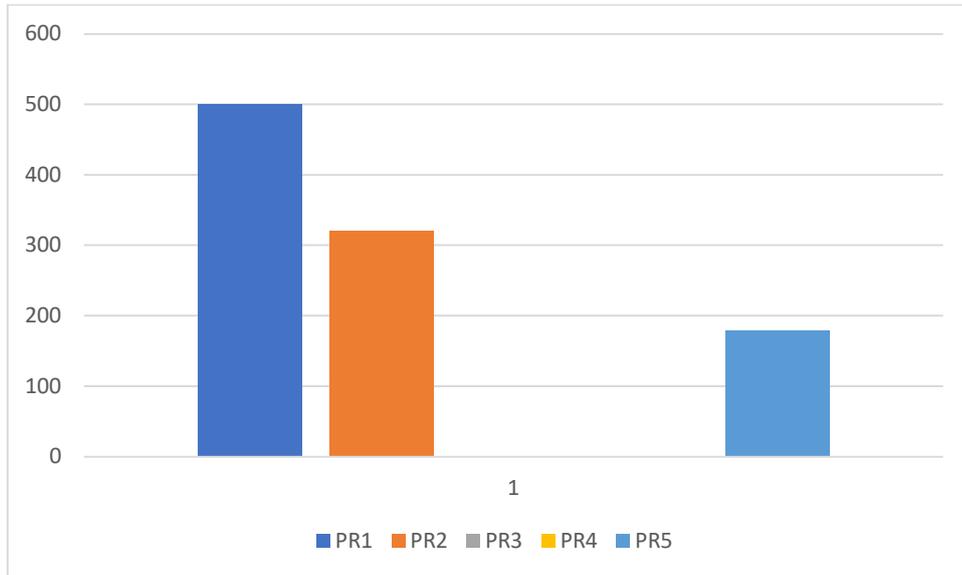
Após executar o *Solver*, obtém-se a Tabela 5:

Tabela 5 – Resultado obtido pelo Solver para o Cenário 1

Produto	Quantidade (kg)	Disponibilidade (kg)	Custo kg (R\$)
PR1	500	5637	12
PR2	321	1142	13
PR3	0	670	14
PR4	0	155	17
PR5	179	605	22
Total	1000		14.107,15

No Cenário 1, o estoque disponível para uso é de 8209 kg. Foram utilizados 3 produtos para o blend, a função objetivo é a minimização do custo, gerando um valor de R\$14.107,15 – para a fabricação de 1000kg de minério. A Combinação do PR1, PR2 E PR5 foi suficiente para atender a massa total, satisfazer os limites mínimos e máximos de teores e gerar o custo total mais baixo que qualquer combinação com PR3 e PR4.

Figura 6 – Quantidade em kg obtida no Cenário 1



Considerando-se um novo caso, denominado Cenário 2, no qual altera-se a ordem de produção, e diminui-se a quantidade de teor do nióbio máximo para 68,5, modificando-se, também, as quantidades em estoque dos PR3, PR4 e PR5, obtém-se a seguinte OP dada por Tabela 6.

Tabela 6 - Restrições com os teores máximos e mínimos - Cenário 2

	Especificação Máxima (%)	Especificação Mínima (%)
Al	2	0
P	1	0
Pb	2	0
Si	5	0
Fe	36	5
Nb	68,5	63,5

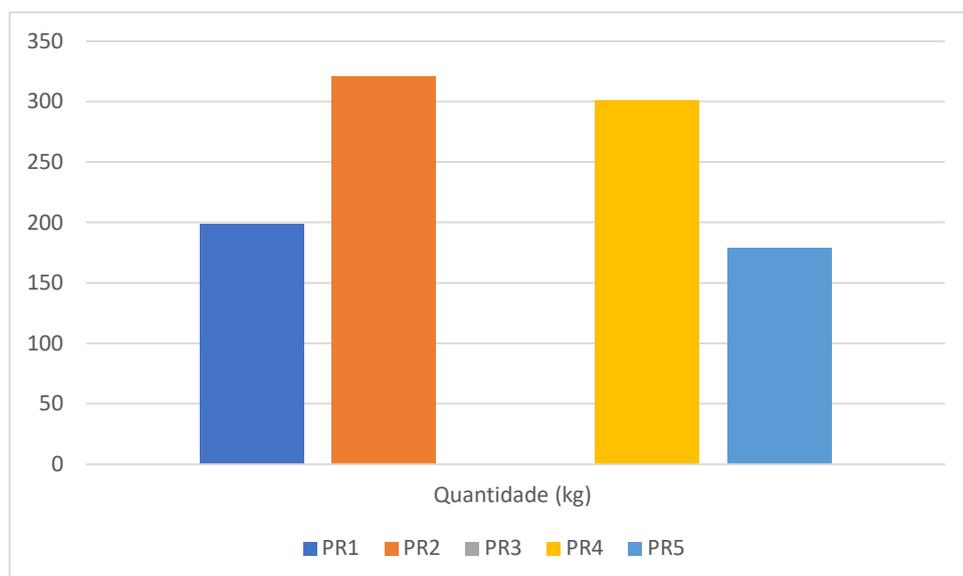
Ao executar novamente o *SOLVER*, obtém-se o seguinte resultado:

Tabela 7 – Resultado obtido pelo Solver para o Cenário 2

Produto	Quantidade (kg)	Disponibilidade (kg)	Custo kg (R\$)
PR1	199	5637	12
PR2	321	1142	13
PR3	0	2008	14
PR4	301	1090	17
PR5	179	1015	22
Total	1000		15.612,24

A solução proposta utilizou 199 kg de PR1, 321 kg de PR2, 301 kg de PR4 e 179 kg de PR5. O produto PR3, apesar de estar disponível em estoque, não foi incluído na solução, uma vez que sua utilização não contribuiu para o cumprimento das restrições impostas e representaria um custo adicional. O custo total da mistura foi de R\$ 15.612,24, valor ainda competitivo mesmo diante das exigências impostas.

Figura 7 – Quantidade em kg obtida no Cenário 2



Ressalta-se que a presença expressiva do PR4 e do PR5 nesta composição mostra que, apesar de seu custo mais elevado, eles foram essenciais para alcançar os níveis de Nb e Fe desejados.

Esses cenários gerados no trabalho evidenciam a importância de uma análise técnica baseada em programação linear para garantir a eficiência operacional e econômica no processo de blendagem.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho demonstrou a eficácia da aplicação da Programação Linear na resolução de problemas complexos relacionados ao processo de blendagem de minério, utilizando como ferramenta o suplemento *Solver* do software Excel.

Através da modelagem matemática e da simulação de cenários típicos de uma indústria de mineração, foi possível validar a capacidade do modelo em atender às especificações químicas exigidas, ao mesmo tempo em que se buscava a minimização dos custos de produção.

Os resultados obtidos foram gerados a partir da elaboração de dois cenários simulados, evidenciando que o modelo proposto é capaz de identificar as combinações ótimas dos produtos intermediários disponíveis, respeitando as restrições de teores, disponibilidade de estoque e limites operacionais.

Essa abordagem não apenas garante maior eficiência na alocação dos recursos minerais, como também contribui diretamente para a redução de desperdícios e para a sustentabilidade do processo produtivo.

O modelo de otimização apresentou resultados satisfatórios em todas as simulações, confirmando sua eficiência na identificação da melhor combinação de minérios para o atendimento das exigências operacionais.

Assim, conclui-se que a utilização de técnicas da pesquisa operacional contribui significativamente para uma tomada de decisão mais fundamentada e estratégica, promovendo ganhos em eficiência, controle e melhoria contínua nos processos produtivos da mineração.

Como trabalhos futuros, pode-se utilizar a PL para determinar parâmetros como: textura, dureza mineral e umidade do minério. Também é possível expandir o problema de blendagem para toda a cadeia de produção em uma mineradora, incluindo o processo de britagem, homogeneização e a planta de beneficiamento, por exemplo.

## REFERÊNCIAS

- ANM, Mineração A. N. D. **Panorama da Mineração no Brasil**. Brasília. 2022.
- ARENALES, Marcos; ARMENTANO, Vinícius. **Pesquisa Operacional**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. **Introduction to Linear Optimization**. Belmont, USA: Athena Scientific, 1997.
- BRUZIQUES, Carlos G. O. *et al.* NIÓBIO: UM ELEMENTO QUÍMICO ESTRATÉGICO PARA O BRASIL. **Química Nova**, 2020.
- CBMM. O que é Nióbio? **CBMM**, 2025. Disponível em: <https://cbmm.com/pt/niobio>. Acesso em: jul. 2025.
- DANTZIG, George B. Maximization of a linear function subject to linear. **Annals of Mathematics Studies**, Princeton University, 1953. 147-151.
- GOLDBARG, Marco; LUNA, Henrique. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- GRIFFITH, W. P.; MORRIS, P. J. T. Charles Hatchett FRS (1765–1847), chemist and discoverer of niobium. **Notes Rec. R. Soc.**, London, 2003.
- HEIN, Nelson; LOESCH, Cláudio. **Pesquisa operacional: Fundamentos e Modelos**. 1. ed. São Paulo: Saraiva Uni, 2009.
- HILLIER F.S., Lieberman G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. São Paulo: Mc Graw Hill, 2013.
- LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2009.
- MARTIM NETO, Robert F. **Análise de Dados no Excel**. [S.I.]: Instituto Alpha, 2016.
- MILAGRES, Joyce M. **Novo Paradigma para o Problema de Mistura**. Universidade Federal de Ouro Preto. [S.I.]. 2019.
- PEREIRA JUNIOR, R.F. Nióbio. **DNPM**, 2009. Disponível em: [https://sistemas.dnpm.gov.br/publicacao/mostra\\_imagem.asp?IDBancoArquivoArquivo=3976](https://sistemas.dnpm.gov.br/publicacao/mostra_imagem.asp?IDBancoArquivoArquivo=3976).
- PEREIRA, A. S.; AMARANTE, A. C. Homogeneização de pilhas de minério para processamento: uma revisão bibliográfica. **International Engineering Journal**, 2015.
- PINDYCK R., Rubinfeld F. **Microeconomia**. 6. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2010.

- RAMALHETE, Manuel; GUERREIRO, Jorge; MAGALHÃES, Alípio. **Programação Linear**. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal, 1984.
- RAVINDRAN, A.; PHILIP, R. N.; SOLBERG, J. S. **Operations research. Principles**. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- SCHRAGE, Linus E. **Lindo: Linear, Integer, and Quadratic Programming**. Provo - Utah: Course Technology, 1998.
- TAHA, Hamdy A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2007.
- TARSELLI, Michael. Subtle niobium. **Nature Chemistry**, 2015.
- TOFFOLO, T. A. **OTIMIZAÇÃO DO FLUXO DE PRODUTOS DE UMA EMPRESA MINERADORA**. Universidade Federal de Minas Gerais. [S.I.]. 2009.
- WINSTON, Wayne L. **Operations research: applications and algorithm**. [S.I.]: Thomson Learning, 2004.
- WISNIAK, Jaime. William Prout. **Educación Química**, 2015.
- WU, S. *et al.* Ore-blending optimization model for sintering process based on characteristics of iron ores. **International Journal of Minerals, Metallurgy, and Materials**, 2012. 217-224.



*ATA Nº 14/2025 - DFGAX (11.57.03)*

*(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)*

*(Assinado digitalmente em 25/07/2025 07:38 )*

*ALINE FERNANDA BIANCO MATTIOLI*

*PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO*

*DFGAX (11.57.03)*

*Matrícula: ###208#0*

Visualize o documento original em <https://sig.cefetmg.br/documentos/> informando seu número: **14**, ano: **2025**, tipo: **ATA**, data de emissão: **25/07/2025** e o código de verificação: **56212fd5a2**