



**Serviço Público Federal**  
**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS**  
**COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL / ARAXÁ**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – ATA DE DEFESA**

**ATA DA DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE**  
**ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL DO ALUNO IAGO SIMÕES VIEIRA**

Às 20 horas do dia 06 de julho de 2017, reuniu-se, no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais / Unidade Araxá, a Comissão Examinadora de Trabalho de Conclusão de Curso para julgar, em exame final, o trabalho intitulado **Modelagem dinâmica e controle de atitude de um quadricóptero**, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Engenheiro de Automação Industrial. Abrindo a sessão, a Presidente da Comissão, *Profa. Dra. Aline Fernanda Bianco*, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final.

Após a reunião da Banca Avaliadora, o candidato foi considerado aprovado com nota final de: 91 / 100 ( noventa e um pontos em cem pontos).

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pela Presidente da Comissão. O aluno abaixo-assinado declara que o trabalho ora identificado é de sua autoria material e intelectual, excetuando-se eventuais elementos, tais como passagens de texto, citações, figuras e datas, desde que as mesmas identifiquem claramente a fonte original, explicitando as autorizações obtidas dos respectivos autores, quando necessárias. Declara ainda, neste âmbito, não estar violando direitos de terceiros.

IAGO SIMÕES VIEIRA - *Iago Simões Vieira* - Araxá, 06 de julho de 2017.  
Nome do Aluno Assinatura Local e Data

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou os trabalhos e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Araxá, 06 de julho de 2017.

*Aline F. Bianco*

Profa. Dra. Aline Fernanda Bianco  
Orientadora

*Frederico Duarte Fagundes*

Prof. Me. Frederico Duarte Fagundes  
Avaliador

*Leandro Resende Mattioli*

Prof. Me. Leandro Resende Mattioli  
Avaliador

*Sérgio Luiz da Silva Pithan*

Prof. Me. Sérgio Luiz da Silva Pithan  
Avaliador/Suplente



**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
UNIDADE ARAXÁ**

**IAGO SIMÕES VIERA**

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE DE ATITUDE DE UM  
QUADRICÓPTERO**

**ARAXÁ-MG  
2017**

**IAGO SIMÕES VIEIRA**

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE DE ATITUDE DE UM  
QUADRICÓPTERO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Unidade Araxá, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Automação Industrial.

Orientadora: Profa. Dra. Aline Fernanda Bianco.

**ARAXÁ/MG**

**2017**

**IAGO SIMÕES VIEIRA**

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE DE ATITUDE DE UM  
QUADRICÓPTERO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Unidade Araxá,  
como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em  
Engenharia de Automação Industrial.

Data de Defesa: Araxá, 06 de julho de 2017.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Dra. ALINE FERNANDA BIANCO  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Unidade Araxá

---

Me. FREDERICO DUARTE FAGUNDES  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Unidade Araxá

---

Me. LEANDRO RESENDE MATIOLLI  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Unidade Araxá

## RESUMO

Quadricóptero é definido como uma aeronave de pousos e decolagens verticais popularizando nos anos 2000 por ser uma plataforma promissora para inúmeras aplicações devido, principalmente, a sua simplicidade mecânica. Com isso várias publicações da área abordam este tema, propondo metodologias numéricas para aprimorar a autonomia e confiabilidade na utilização prática destes veículos. O objetivo deste trabalho é apresentar o modelo dinâmico do quadricóptero obtido através do formalismo de Newton-Euler e duas estratégias de controle lineares, primeiramente o segundo método de Lyapunov invariante no tempo e o método LQR variante no tempo, considerando o efeito giroscópico gerado pelas velocidades angulares do corpo, capazes de estabilizar e atuar no cumprimento de trajetórias de um veículo quadricóptero. Com o modelo obtido, gerou-se respostas ao degrau para ambos os métodos para validar sua eficácia, em seguida, as eficácias das abordagens serão testadas realizando voos experimentais, onde serão verificados o impacto das simplificações de modelagem e o desempenho dos controladores.

**Palavras-chave:** Quadricóptero. Veículo Aéreo não Tripulado. Regulador Linear Quadrático (RLQ). Modelo Dinâmico. Sistemas Embarcados.

## ABSTRACT

The quadrirotor is an aircraft which has a vertical take off and landing. Due to the mechanical simplicity many articles have been published recently, proposing numeric methods to increase the reability on flights. This work presents the development of a dynamic model of a quadcopter that was obtained from the Newton-Euler formalism and also the development of two methods of a linear control system – Lyapunov method with a time invariant system and the Linear Quadratic Regulator with a time variant system considering the gyroscopic effect generated by the angular velocity from the propellers. Both methods must be able to stabilize and act on the trajectory compliance of a quadcopter. A simulation was developed on the Matlab® platform from the model obtained as a way to check the proposed control, and then analyze the experimental flights, where the simplifications on the mathematical model will be verified.

**Keywords:** Quadcopter U.nmanned Aerial Vehicle. Linear Quadratic Regulator (LQR). Dynamic Model, Embedded Systems.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Aeronaves de asa fixa.....	9
Figura 2 - Aeronaves de asa rotativa. ....	9
Figura 3 - Quadricóptero utilizado para realizar busca e salvamento.....	10
Figura 4 - Movimento de um quadricóptero a partir da variação da rotação das hélices. ....	12
Figura 5 - Representação de um sistema localmente estável.....	18
Figura 6 - Representação de um sistema globalmente assintoticamente estável. ....	18
Figura 7 - Representação de um sistema instável. ....	19
Figura 8 - Referencial inercial E e referencial fixo ao corpo B.....	35
Figura 9 - Curva motor relativo ao coeficiente de empuxo $b$ . ....	40
Figura 10 - Curva motor relativo ao coeficiente de arrasto $d$ . ....	41
Figura 11 - Desenho do quadricóptero no Solidworks®. ....	42
Figura 12 - Valores adquiridos a partir do desenho do Solidworks®.....	42
Figura 13 - Sistema em Cascata.....	44
Figura 14 - Resposta ao degrau para o ângulo $\phi$ . ....	52
Figura 15 - Resposta ao degrau para o ângulo $\theta$ . ....	52
Figura 16 - Resposta ao degrau para o ângulo $\psi$ . ....	52
Figura 17 - Resultados obtidos como o método RLQ variante no tempo .....	53
Figura 18 - Dados obtidos com a abordagem via Lyapunov. ....	53
Figura 19 - Dados obtidos com o RLQ.....	54

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- IMU - Unidade de Medidas Inerciais
- VANT - Veículos Aéreos Não Tripulados
- RLQ - Regulador Linear Quadrático
- PWM - Pulse-Width Modulation
- ESC - *Eletronic Speed Controller*

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	<b>12</b>
<b>2.1 Movimentos do Quadricóptero</b> .....	<b>12</b>
<b>2.2 Controle do sistema</b> .....	<b>13</b>
2.2.1 ESPAÇO DE ESTADOS .....	14
2.2.2 CONTROLE POR LYAPUNOV .....	16
2.2.3 CONTROLE POR RLQ .....	20
<b>3 MATERIAIS E MÉTODOS</b> .....	<b>25</b>
<b>3.1 Materiais</b> .....	<b>25</b>
3.1.1 MOTOR .....	26
3.1.2 ESC .....	26
3.1.3 BATERIA .....	27
3.1.4 HÉLICES .....	27
3.1.5 IMU .....	27
3.1.6 MICROCONTROLADOR .....	28
3.1.7 CONTROLE REMOTO .....	28
<b>3.2 Métodos</b> .....	<b>28</b>
3.2.1 SISTEMA DE COORDENADAS .....	29
3.2.2 MODELAGEM DINÂMICA .....	34
3.2.4 PROJETO DO CONTROLADOR POR LYAPUNOV .....	42
3.2.5 PROJETO DO CONTROLADOR POR RLQ .....	48
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	<b>51</b>
<b>5 CONCLUSÕES</b> .....	<b>55</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>56</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nos anos de 2015 e 2016, vem-se observando grande aumento no desenvolvimento e utilização de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), popularmente conhecidos como DRONES. Estes são veículos que não necessitam de pilotos na aeronave, sendo controlados remotamente ou de forma autônoma, possuindo algoritmos sofisticados de voo. Estão divididos em duas subclasses, de asa fixa e de asa rotativa, conforme FIG. 1 e 2.

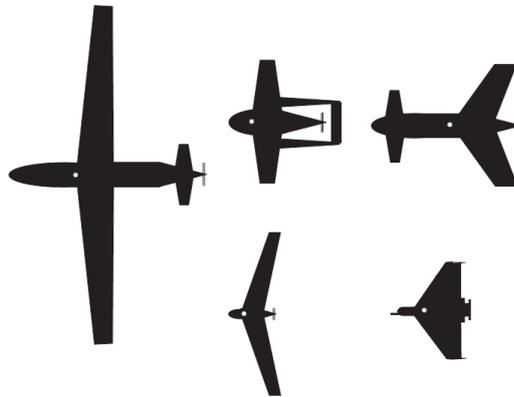


Figura 1 - Aeronaves de asa fixa.  
Fonte: AUSTIN (2011, p. 35).

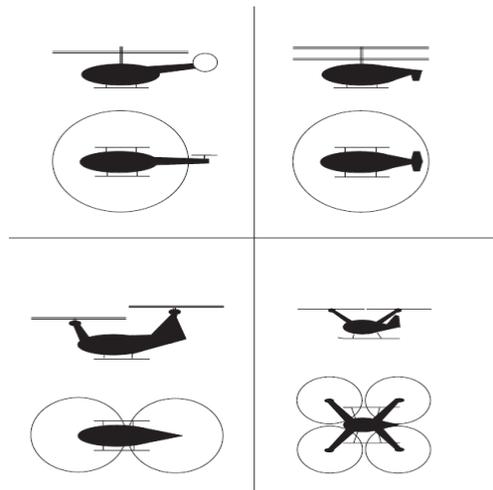


Figura 2 - Aeronaves de asa rotativa.  
Fonte: AUSTIN (2011, p. 37).

Para atividades como aquisição de imagens aéreas para reportagens, vigilância e agricultura, os veículos de asa rotativa possuem maior vantagem, podendo realizar voos verticais e pairar no ar.

Dentre os veículos de asa rotativa, a grande vantagem de um quadricóptero é sua simplicidade construtiva, conforme FIG. 3, quando comparado aos helicópteros convencionais, nos quais a inclinação do veículo é realizada através da alteração do ângulo de ataque das hélices do rotor principal, exigindo um mecanismo complexo e caro. Em um quadrirotor, por sua vez, a propulsão é realizada por quatro motores, com as quatro hélices posicionadas de forma horizontal e com hélices adjacentes girando em sentido contrário, duas giram em um sentido e as outras duas em sentido oposto, assim, não há necessidade de um rotor de calda para compensar o momento angular dos propulsores.



Figura 3 - Quadricóptero utilizado para realizar busca e salvamento.  
Fonte: WAHARTE; TRIGONI (2010, p. 12).

No mês de agosto de 2016, verifica-se uma tendência no desenvolvimento de pesquisas que viabilizem a aplicação prática dos quadricópteros, uma vez que a redução de custo, do tamanho de sensores e as baterias os tornam muito interessante para o mercado civil, sendo possível realizar miniaturização do VANT com um preço mais acessível.

A problemática em construir e controlar um quadrirotor está em sua natureza instável e em suas diversas variáveis de controle, como já dito anteriormente. Utilizando materiais de baixo custo na construção de um quadrirotor e buscando, ao mesmo tempo, garantir o funcionamento adequado da estrutura, o desafio torna-se ainda maior.

Sendo um sistema dinâmico, alterando as velocidades dos motores, os ângulos de Euler também serão alterados. Quadricópteros são veículos subatuados sendo sistemas inerentemente instáveis (BOUABDALLAH, 2007).

Por consequência da dinâmica inerentemente instável deste tipo de veículo, é necessário desenvolver um controlador, para torna o sistema estável. Com o surgimento de microcontroladores capazes de realizar processamento digital de sinais em tempo real, e sensores de unidade de medidas inerciais (IMU) de baixo custo e de dimensões reduzidas, os quadricópteros popularizaram-se junto ao público civil nos últimos anos.

O desenvolvimento deste trabalho está relacionado não apenas ao desenvolvimento prático de um quadricóptero, mas, sobretudo à aplicação e à comparação de técnicas de controle (invariantes e variantes no tempo) para garantir a estabilidade e segurança da aeronave em situações adversas. Para realização deste comparativo, serão utilizados os métodos de Lyapunov para o sistema invariante no tempo e o regulador linear quadrático (RLQ) para o sistema variante no tempo.

Este projeto inclui também o desenvolvimento de um modelo matemático para permitir uma estabilidade satisfatória, no intuito de desenvolver um algoritmo de código aberto (*opensource*) e disponibilizá-lo para que qualquer um possa desenvolver um quadricóptero, também podendo aprimorar este trabalho. Como o controle de atitude de um quadricóptero é a base para qualquer tipo de aplicação de um drone, todas as áreas de pesquisas envolvendo quadrirotor poderão se beneficiar com este trabalho.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um método de controle invariante e outro variante no tempo, capazes de estabilizar o voo de um veículo aéreo quadrirotor, além de fazer uma análise comparativa entre esses dois métodos. Assim, os objetivos específicos delimitados são:

- Obter o modelo matemático do quadricóptero por meio do método de Newton-Euler;
- Desenvolver uma estratégia de controle capaz de realizar a estabilização do veículo para o sistema invariante no tempo;
- Desenvolver uma estratégia de controle capaz de realizar a estabilização do veículo para o sistema variante no tempo;
- Simular em ambiente Matlab® o modelo matemático calculado para aferir a eficiência dos controladores;
- Realizar testes de voo no quadricóptero com ambos os métodos e comparar os resultados, relativos à estabilidade.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Movimentos do Quadricóptero

O funcionamento de um quadricóptero é possível graças a quatro rotores e dois pares de hélices, um par é usado para girar em um sentido e o outro usado no sentido reverso. A disposição correta dos motores elimina o efeito dos torques gerados por eles fazendo com que a plataforma fique em equilíbrio em uma determinada posição, quando os motores tiverem mesma velocidade angular (SÁ, 2012).

Na FIG. 4, as setas vermelhas indicam a direção do movimento da aeronave e as setas pretas exibem a magnitude da velocidade rotacional das hélices. Nota-se que, para a obtenção dos movimentos translacionais (letras: *a*, *b*, *c*, *d* - FIG. 4), varia-se as rotações dos motores coincidentes com a direção do movimento, mantendo-se constantes as velocidades dos outros motores. Para o movimento ascendente e descendente (letras: *e*, *f* - FIG. 4), deve-se elevar/diminuir a velocidade de rotação de todos os motores simultaneamente. Por fim, para a realização do movimento de rotação ao longo do eixo perpendicular ao corpo da aeronave (letras: *g*, *h* - FIG. 4) varia-se a velocidade dos rotores opostos entre si, de modo que o movimento horário é obtido acelerando-se os motores que giram no sentido anti-horário e vice-versa.

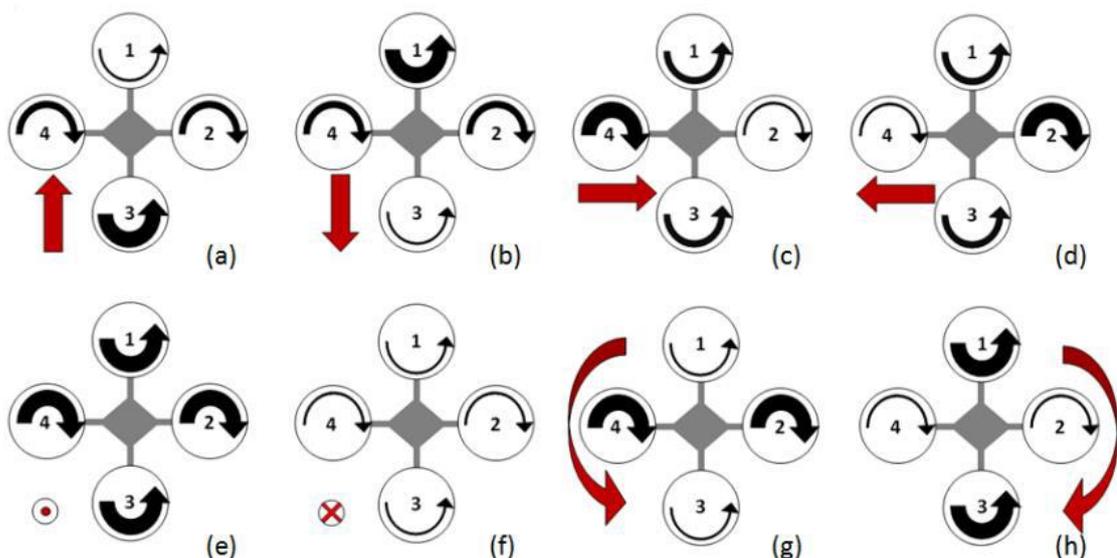


Figura 4 - Movimento de um quadricóptero a partir da variação da rotação das hélices.

Fonte: SÁ (2012, p. 15).

## 2.2 Controle do sistema

O projeto de desenvolvimento de um VANT está relacionado ao sistema de controle da aeronave. A decolagem, a estabilidade da aeronave em voo, a realização de manobras e o pouso são dependentes de um bom projeto de um controlador de voo. Um dos principais desafios do projeto de controladores de voo é a identificação da dinâmica de voo com fidelidade suficiente para ser usada em diferentes estágios de desenvolvimento do controlador. Os modelos matemáticos utilizados são apenas uma aproximação da dinâmica do veículo e servem para descrever a complexa dinâmica de voos reais (PAW; BALAS, 2011).

Como o foco deste trabalho é o controle de estabilidade de um quadricóptero, a revisão da literatura do controle de VANTs será focada neste tipo de aeronave. As características não lineares e multivariáveis fazem com que o quadricóptero seja difícil de se controlar (COZA; MACNAB, 2006). Técnicas tradicionais de controle lineares variante e invariantes no tempo têm sido aplicadas (ALVES, 2012).

Através dos resultados experimentais obtidos, HOFFMANN et al. (2007) concluem que, apesar do controlador PID apresentar bons resultados, a maioria dos trabalhos tem se focado principalmente em trajetórias simples, de baixas velocidades, em ambientes fechados. Observando o funcionamento do quadricóptero em velocidades mais altas e na presença de distúrbios, como o vento, os resultados mostram que os modelos existentes e a técnica de controle PID são inadequados para o acompanhamento de trajetórias exatas em ambientes não controlados.

As técnicas de controle ótimo RLQ (Regulador Linear Quadrático) e LQG (Linear Quadrático Gaussiano), descritos por MINH e HA (2010), são utilizadas para encontrar um controlador que forneça o melhor desempenho possível em relação a alguma medida específica de desempenho (por exemplo, uma função de energia, em que se deseja gastar a menor energia possível para controlar o sistema). A energia do sinal de controle é medida por uma função custo (índice de desempenho quadrático) que contém fatores de ponderação fornecidos pelo projetista do controlador. Deseja-se encontrar os parâmetros do controlador que minimizem esse índice, como, por exemplo, uma sequência ótima de entradas de controle, utilizando-se realimentação de estados.

### 2.2.1 ESPAÇO DE ESTADOS

A análise no modelo espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada representadas por  $u(t)$ , variáveis de saída representadas por  $y(t)$  e variáveis de estado representadas por  $x(t)$ .

O equacionamento de um sistema em espaço de estados contínuo no tempo, é definido por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.2)$$

sendo a primeira equação definida como equação de estados do sistema e a segunda denominada equação de saída, onde  $A(t)$  é chamada de matriz de estados,  $B(t)$ , matriz de entrada,  $C(t)$ , matriz de saída, e  $D(t)$ , de matriz de transmissão direta. Todas estas matrizes possuem dimensões apropriadas.

No modelamento em espaço de estados há vários elementos que necessitam definições (NISE, 2002):

- **Variável de sistema:** Qualquer variável que responda a uma entrada ou a condições iniciais em um sistema.
- **Variáveis de estado:** é a menor quantidade de funções  $x(t)$  capaz de determinar o estado do sistema, sendo que os estados são variáveis calculadas no tempo em que o conhecimento de  $x$  em  $t_0(x(t_0))$  juntamente com a entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$  determina o comportamento do sistema para  $t \geq t_0$ .
- **Vetor de estados:** é aquele composto pelas variáveis de estado e determina a dimensão do sistema.
- **Espaço de estados:** é o espaço n-dimensional onde os eixos são as variáveis de estado.
- **Equações de estados:** conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem, com n variáveis que são as variáveis de estado.
- **Equação de saída:** é a equação que expressa as variáveis de saída como combinações das variáveis de estado e das entradas.

Se as matrizes  $A(t), B(t), C(t)$  e  $D(t)$  das equações (2.1) e (2.2) forem constantes, ou seja, não dependentes do tempo, o sistema é dito invariante no tempo, assim considera as matrizes iguais a  $A, B, C$  e  $D$ . Caso contrário, o sistema é variante no tempo.

### 2.2.1.1 Propriedades do Sistema

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman. Eles têm papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados. As condições de controlabilidade e observabilidade determinam a existência de uma solução para o problema de projeto do sistema de controle, podendo o problema não possuir solução (OGATA, 2003).

Devido à importância dessas propriedades, a seguir iremos introduzir os conceitos sobre controlabilidade e observabilidade.

#### A) CONTROLABILIDADE

Se for possível obter uma entrada capaz de levar todas as variáveis de estado de um sistema de um valor inicial desejado para um estado final desejado, o sistema é dito controlável; em caso contrário, o sistema é não controlável (NISE, 2002).

O par  $(A, B)$  referente a equação (2.1) é controlável se, para todo estado inicial  $x(t_0) = x_0$  e todo estado final  $x_1 = x(t_1)$ , existe uma entrada  $u$  que leva  $x_0$  a  $x_1$  em  $t \in [t_0, t_1]$ .

A matriz de controlabilidade  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times n u}$  é definida por:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.3)$$

O sistema é considerado controlável se a matriz de controlabilidade possuir posto linha pleno, ou seja, os vetores  $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$  devem ser linearmente independentes.

#### B) OBSERVABILIDADE

O sistema definido pelas equações (2.1) e (2.2) será considerado completamente observável se todo estado  $x(t_0)$  puder ser determinado pela observação  $y(t)$  durante um intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . O sistema é, portanto, completamente observável se cada transição do estado puder afetar cada elemento do vetor de saída. O conceito de observabilidade é útil na solução de problemas de reconstrução de variáveis de estado não mensuráveis a partir de valores mensuráveis, no menor intervalo de tempo possível. Além de ser muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com o controle por realimentação de estado é que algumas variáveis de estado não são acessíveis por medição direta, sendo necessário estimar a variável não mensurável para construir o sinal de controle (OGATA, 2003).

Para o sistema ser observável, então a matriz de Observabilidade  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  deve possuir posto coluna pleno.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 CONTROLE POR LYAPUNOV

No estudo da teoria de controle a estabilidade é um dos pontos mais significativos a ser determinado. Existem alguns critérios de estabilidade como o de Nyquist e de Routh por exemplo, porém podem ser aplicados apenas em sistemas lineares e invariantes no tempo. Lyapunov desenvolveu dois métodos para a construção completa de uma nova teoria de estabilidade, englobando sistemas não lineares e variantes no tempo. O segundo método de Lyapunov ou Método Direto possui algumas vantagens sobre o primeiro método ou Método Indireto. No método direto não necessita da resolução de equações diferenciais, por isso torna-se mais atraente (ALVES, 2012).

Seja um sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.5)$$

sendo  $x$  o vetor de estado de dimensão  $n$  e  $f(x, t)$  um vetor de funções de  $x$  e  $t$  de dimensão também  $\mathbb{R}^n$ . Assume-se que esse sistema possua solução única dada uma condição inicial, com solução denotada por  $\phi(t, x) = x(t)$ , com  $x(t_0) = x_0$ . Definido um estado de equilíbrio ao sistema da equação (2.5)

$$f(\bar{x}) = 0 \quad (2.6)$$

Para um sistema linear e invariante no tempo do tipo  $f(x(t)) = Ax$  existem apenas um estado de equilíbrio caso a matriz  $A$  seja não singular de dimensões  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , caso contrário em sistemas não lineares pode ocorrer mais de um estado de equilíbrio.

Para definição da estabilidade no sentido de Lyapunov define-se uma região esférica de raio  $k$  em torno de um estado de equilíbrio  $\bar{x}$ , tal que

$$\|x - \bar{x}\| \leq k \quad (2.7)$$

onde  $\|x - \bar{x}\|$  é a norma Euclidiana representada por

$$\|x - \bar{x}\| = [(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2]^{1/2} \quad (2.8)$$

Seja um conjunto  $S(\delta)$

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \quad (2.9)$$

e outro conjunto  $S(\varepsilon)$

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon \quad (2.10)$$

Define-se que para um sistema ser considerado estável, uma trajetória iniciada em  $S(\delta)$  não ultrapasse a região correspondente de  $S(\varepsilon)$  como mostrado na FIG. 5, para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  ( $\delta$  dependente de  $\varepsilon$ ). Nas FIG. 5, 6 e 7, a região de  $S(\varepsilon)$  é limitada por um raio  $R$  e a região de  $S(\delta)$  é limitada por um raio  $r$ .

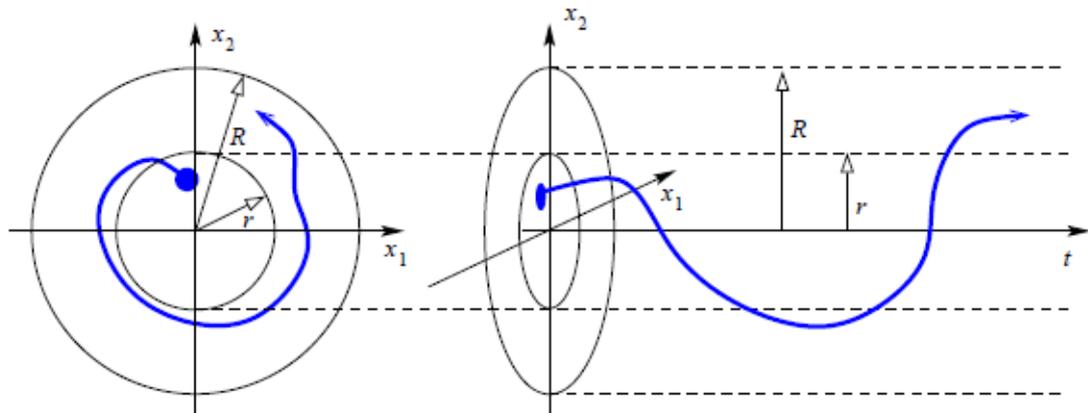


Figura 5 - Representação de um sistema localmente estável.  
Fonte: TÔRRES (2012, p. 7).

Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é localmente assintoticamente estável se uma trajetória iniciada em  $S(\delta)$  continue dentro desta mesma região, para  $\bar{x}$  com  $t$  tendendo ao infinito. E globalmente assintoticamente estável se respeitar as mesmas condições do localmente assintoticamente estável e se toda solução convergir para  $\bar{x}$ , como demonstrado na FIG. 6.

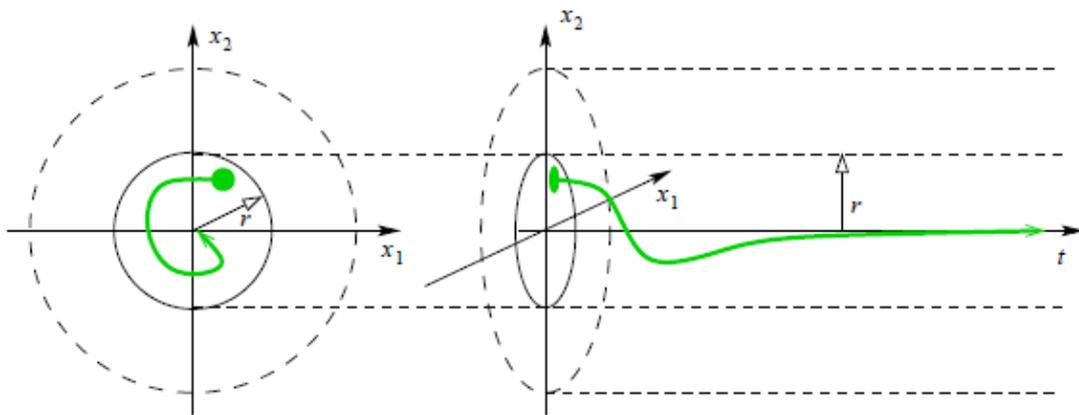


Figura 6 - Representação de um sistema globalmente assintoticamente estável.  
Fonte: TÔRRES (2012, p. 8).

Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é instável se uma trajetória iniciada em  $S(\delta)$  ultrapasse os limites da região  $S(\varepsilon)$ , para  $\bar{x}$  com  $t$  tendendo ao infinito, como mostra na FIG. 7.

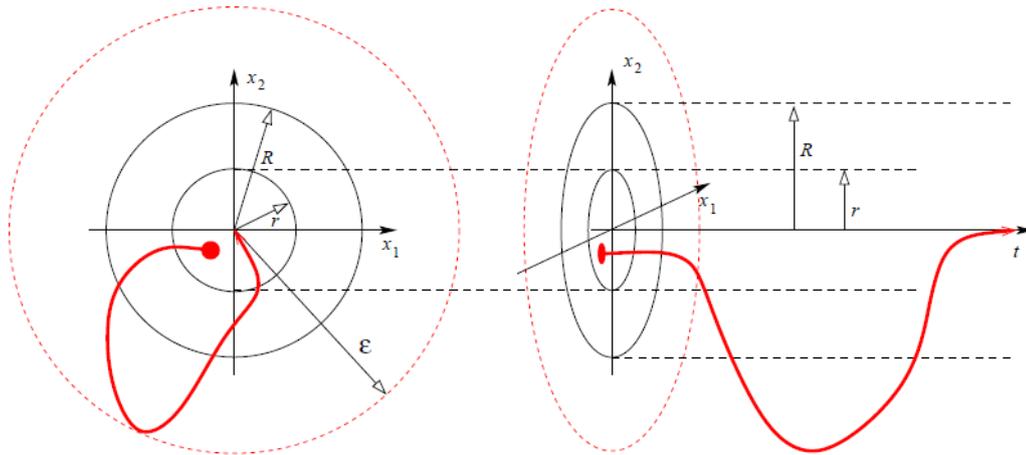


Figura 7 - Representação de um sistema instável.  
Fonte: TÓRRES (2012, p. 9).

Uma função escalar  $V(x)$  é definida positiva se para todo  $x \neq 0$  tem-se  $V(x) > 0$ . E semi-definida positiva se para todo  $x \neq 0$  tem-se  $V(x) \geq 0$ .

Para uma matriz ser definida positiva seus autovalores necessitam ser todos maiores que zero e semidefinida positiva os autovalores devem ser iguais ou maiores que zero. Analogamente uma matriz ser definida negativa indica que seus autovalores devem ser todos menores que zero e semidefinida negativa se os autovalores forem iguais ou menores que zero. Para matrizes indefinidas os autovalores possuem valores tanto positivos como negativos.

Para um sistema se tornar assintoticamente estável, a função de energia do sistema deve ser decrescente até que assuma um valor ótimo no estado de equilíbrio, ou a derivada da função de Lyapunov deverá ser definida negativa. Com isso as funções de Lyapunov  $V(x, t)$  e sua derivada  $\dot{V}(x, t)$  nos fornecem informações sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Considerando o sistema descrito

$$\dot{x} = Ax \quad (2.11)$$

com  $x$  sendo o vetor de estado de dimensão  $n$ . Para descrever a função de Lyapunov tem-se

$$V(x) = x^T P x \quad (2.12)$$

onde  $P$  é uma matriz definida positiva. A derivada em relação ao tempo da função de Lyapunov é

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}. \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.11) na (2.12) temos

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x \quad (2.14)$$

ou

$$\dot{V}(x) = x^T Q x. \quad (3.15)$$

Portanto para atingir a estabilidade assintótica do sistema é necessário que o termo  $Q = (A^T P + P A)$  da equação (3.15) seja definida negativa.

### 2.2.3 CONTROLE POR RLQ

#### A) FORMULAÇÃO PARA O SISTEMA CONTÍNUO

O controle linear quadrático (LQ) surgiu aproximadamente em 1960 e é uma técnica pertencente à Teoria de Controle Moderno.

Neste tópico será introduzido o Regulador Linear Quadrático (LQR) conforme definição de (OGATA, 2003). Seja considerado o problema do regulador quadrático ótimo que, dada a equação (2.16) do sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.16)$$

permite determinar a matriz  $K$  do vetor de controle ótimo

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.17)$$

para minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.18)$$

onde  $Q$  e  $R$  são matrizes hermitianas definidas positivas ou matrizes reais simétricas, sendo responsáveis por determinar a importância relativa do erro e o consumo de energia dos sinais de controle.

A lei de controle linear retroalimentado dada pela equação (2.16) é a lei de controle ótimo, portanto, se os elementos não conhecidos da matriz  $K$  forem determinados para minimizar o índice de desempenho, então  $u(t) = -Kx(t)$  será ótimo para qualquer estado inicial  $x(0)$ . A FIG. 8 mostra o diagrama de blocos para a configuração ótima.

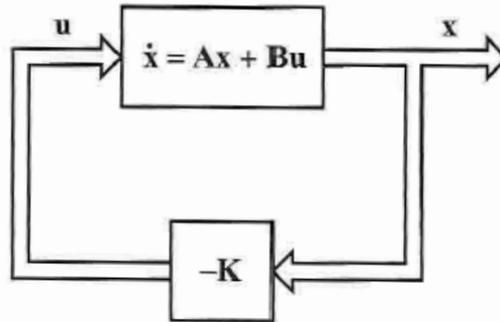


Figura 8 - Sistema regulador ótimo.  
Fonte: OGATA (2003).

Substituindo as equações (2.16) e (2.17) em (2.18), o funcional de custo poderá ser reescrito por:

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt \quad (2.19)$$

Fazendo

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x) \quad (2.20)$$

onde  $P$  também é uma matriz hermitiana definida positiva ou simétrica real, é possível obter:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x \quad (2.21)$$

Comparando ambos os lados da equação acima e sabendo que esta deve ser verdadeira para qualquer que seja  $x$ , tem-se necessariamente que

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (2.22)$$

Sendo  $A - BK$  uma matriz estável, existirá uma matriz definida positiva  $P$  que satisfaça à equação (2.20). É importante ressaltar que se pode encontrar mais de uma matriz  $P$  que satisfaça a equação, entretanto apenas uma  $P$  definida positiva será útil.

Então, o índice de desempenho  $J$  pode ser calculado como:

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0) \quad (2.23)$$

Como  $(A - BK)$  é estável, todos os seus autovalores possuem partes reais negativas, então se tem que  $x(\infty) \rightarrow 0$ . Desta forma, o índice de desempenho  $J$  será dado em função da condição inicial  $x(0)$  e  $P$ :

$$J = x^T(0) P x(0) \quad (2.24)$$

Como  $R$  também é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica, é possível escrevê-la como

$$R = T^T T \quad (2.25)$$

sendo  $T$  uma matriz não singular, então a equação (2.19) poderá ser expressa da seguinte forma:

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P^T]^T [TK - (T^*)^{-1} B^* P] - P B R^{-1} B^* P + Q = 0 \quad (2.26)$$

Assim, para resolver o problema de controle quadrático ótimo, deve-se minimizar  $J$  em relação a  $K$ , e para isso deve-se minimizar também em relação a  $K$  a seguinte equação:

$$x^* [TK - (T^*)^{-1}B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1}B^T P]x \quad (2.27)$$

Como esta última expressão é não negativa, o mínimo ocorre quando ela é zero ou quando

$$TK = (T^T)^{-1}B^T P \quad (2.28)$$

Portanto,

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1}B^T P = R^{-1}B^T P \quad (2.29)$$

a equação (2.29) fornece a matriz ótima  $K$ . Assim, quando o índice de desempenho é dado pela equação (2.19), a lei de controle ótimo é linear e é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (2.30)$$

A matriz  $P$  deve satisfazer a equação (2.22) ou a equação matricial reduzida de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.31)$$

## B) FORMULAÇÃO PARA O SISTEMA DISCRETO

O problema do regulador linear quadrático (RLQ) será estabelecido conforme definição de (OGATA, 1995). Considere o modelo linear discreto no espaço de estados

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i; \quad i = 0, \dots, N \quad (2.32)$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u_i \in \mathbb{R}^m$  o vetor entrada de controle,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes de parâmetros nominais assumidas conhecidas e  $\{u_i\}_{i=0}^N$  uma sequência de entradas de controle sem restrição. Assume que o sistema linear (2.31) é controlável.

Quando se trata do problema de controle ótimo quadrático deseja-se determinar uma lei de controle  $\{u_i^*\}_{i=0}^N$  onde minimiza o índice de desempenho quadrático, dado por

$$J = x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^N (x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j) \quad (2.33)$$

sendo  $P_{N+1} \geq 0, Q_j \geq 0$  e  $R_j > 0$  matrizes hermitianas semidefinidas positivas assumidas conhecidas.

O problema do RLQ pode ser escrito na forma de um problema de minimização sujeito a uma restrição de igualdade, dado por:

$$\min_{u_i} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^N (x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j) \right\} \quad (2.34)$$

$$s. a \ x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i; \quad i = 0, \dots, N$$

O problema de minimização restrita (2.34) é dado apenas em termos da variável de controle  $u_i$ . Além disso, a trajetória ótima  $\{x_i^*\}_{i=0}^{N+1}$  fica totalmente determinada pelo conhecimento prévio da sequência de controle ótimo  $\{u_i^*\}_{i=0}^N$ . Perceba também, através da restrição de igualdade (2.32) do problema, que cada etapa de minimização  $i$  a variável de estado  $x_{i+1}$  é dada visivelmente em função do estado  $x_i$  e da variável de controle  $u_i$ .

A solução recursiva ótima, denotada com o índice \*, do problema RLQ é dada por:

$$u_i^* = -K_i x_i; \quad i = 0, \dots, N \quad (2.35)$$

Sendo o ganho  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$K_i = (R_i + B_i^T P_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T P_{i+1} A_i \quad (2.36)$$

$$P_i = (A_i - B_i K_i)^T P_{i+1} (A_i - B_i K_i) + K_i^T R_i K_i + Q_i \quad (2.37)$$

O sistema em malha fechada com realimentação ótima (2.35) é dado por:

$$x_{i+1}^* = (A_i - B_i K_i) x_i; i = 0, \dots, N \quad (2.38)$$

E o custo ótimo para a sequência de controle ótimo  $\{u_i^*\}$  no intervalo de interesse  $[i, N]$ , é dado por:

$$J_i^* = x_i^T P_i x_i \quad (2.39)$$

Consequentemente, o valor mínimo do índice de desempenho da equação (2.33) é  $J^* = x_0^T P_0 x_0$ , dado em termo das condições iniciais. Esta mesma conclusão foi obtida na dedução do RLQ contínuo no tempo e de tempo infinito.

É possível ainda verificar que (2.37) combinada com (2.38) resulta na forma recursiva de Riccati em tempo discreto.

$$P_i = Q_i + A_i^T (P_{i+1} - P_{i+1} B_i (R_i + B_i^T P_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T P_{i+1} A_i) A_i \quad (2.40)$$

Como as matrizes  $B_i, Q_i$  e  $R_i$  são constantes (invariantes no tempo) e iguais respectivamente a  $B, Q$  e  $R$ , com isso obtém-se o valor de  $K_i$

$$P_i = A_i^T (P_i - P_i B (R + B^T P_i B)^{-1} B^T P_i) + Q \quad (2.41)$$

$$K_i = (R + B^T P_i B)^{-1} B^T P_i A_i \quad (2.42)$$

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 Materiais

A parte elétrica do quadricóptero tem os seguintes componentes: quatro motores elétricos do tipo *brushless*, uma bateria do tipo LiPo e barramento elétrico, um positivo e outro negativo, onde as cargas do sistema são conectadas.

Já a parte eletrônica divide-se em: microcontrolador; um sensor de medida inercial, composto de um giroscópio e de um acelerômetro, de três eixos

cada um; quatro controladores eletrônicos de velocidade, ou *Electronic Speed Controller* (ESC) e um rádio controle.

O *frame* (corpo da aeronave) foi construído artesanalmente, utilizando-se de perfis de alumínio.

### 3.1.1 MOTOR

O motor de corrente contínua *brushless* (sem escova) tem sua parte mecânica similar a um motor de corrente contínua *brushed* (com escova), porém, um motor *brushless* não possui escovas, assim não possuindo pontos de contato mecânico entre o rotor e o estator para passagem de eletricidade. Outra diferença importante é que este tipo de motor possui os ímãs no rotor e as bobinas no seu estator o contrário do que acontece com os motores *brushed*.

Escolheu-se motores AX-2810Q com rotação 750 KV ou 750 RPM/V.

### 3.1.2 ESC

É um dispositivo que, como o nome já sugere, tem como objetivo controlar a velocidade de rotação de motores elétricos do tipo *brushless*.

Para a escolha dos ESCs, é necessário analisar três requisitos:

- Frequência: deve ser elevada (geralmente na faixa de 400Hz). Aumentando a frequência do ESC, aumentará também a precisão e agilidade da resposta do funcionamento do motor. Para multirotores, é necessária certa agilidade na resposta a variações de velocidade, gerando maior agilidade e confiabilidade à aeronave.
- Corrente nominal: deve ser acima do valor requisitado pelo motor (25A para esta aplicação).
- Tensão de alimentação: deve ser compatível com a tensão de operação do motor. Como o motor selecionado opera de 12 V a 24 V, então é preciso escolher um ESC que opere na mesma tensão que ela fornece em seus terminais.

O ESC escolhido para essa aplicação (que atende os requisitos mencionados acima) é o 30A Plush da Turnigy.

Em motores *brushless*, não adianta apenas variar a corrente para alterar a velocidade de rotação, deve-se controlar a frequência de troca de fase. Este

processo é realizado através de um microcontrolador (embarcado no ESC), o qual possui um algoritmo que aciona saídas digitais, estas, por sua vez, estão ligadas a *mosfets*, que acionam as bobinas do motor na sequência correta e com uma frequência pré-calculada.

Para controlar a velocidade do motor, o ESC faz a leitura de um sinal *Pulse-Width Modulation* (PWM), ou modulação de largura de pulso, provido de um controlador de voo (arduino).

PWM é uma modulação por largura de pulso que funciona alterando o *dutycycle* (período em que a onda fica em nível lógico alto) de uma onda. Quando controlamos o *dutycycle* e, conseqüentemente, o tempo da chave desligada de uma onda quadrada com uma frequência determinada, pode-se controlar a potência média entregue à carga; quanto maior o tempo em que o pulso se mantiver em nível lógico alto, maior a potência entregue à carga; quanto menor o tempo em nível lógico alto, menor a entrega de potência.

### 3.1.3 BATERIA

A bateria foi escolhida a partir das especificações do motor, que requer uma bateria de 14,8V; escolheu-se uma bateria de LIPO 4s (4 células) da turnigy, de 4000 mAh, que proporciona uma autonomia de 15 minutos. Baterias LIPO possuem vantagem em relação às de níquel, sendo mais leves e capazes de oferecer uma descarga maior.

### 3.1.4 HÉLICES

As hélices usadas para esse projeto foram as hélices de tamanho 11x4.7, recomendadas pelo fabricante do motor, sendo duas hélices que giram no sentido horário e duas que giram no sentido anti-horário. Elas garantem ao motor o torque necessário para a aplicação.

### 3.1.5 IMU

O sensor utilizado para obter os ângulos de Euler será o MPU-6050, por se tratar de uma unidade de medida inercial de baixo custo, e de tamanho e peso também baixos, tendo, apesar disso, uma resolução satisfatória.

### 3.1.6 MICROCONTROLADOR

O Arduino será o cérebro por trás deste projeto, pois será em sua interface que se irá implementar o programa que controlará a estabilidade do quadricóptero. Além disso, serão do arduino os sinais PWM que acionarão os motores e a leitura do Acelerômetro e do Giroscópio. Por isso, o mecanismo necessita de um microcontrolador rápido e robusto que, neste caso, será o arduino Due, por esta placa conter um microprocessador ARM de arquitetura 32-bits e um *clock* de 84MHz.

### 3.1.7 CONTROLE REMOTO

O rádio controle a ser utilizado será o Flysky FS-T6, pois é um rádio barato e possui 6 canais, podendo utilizar funções extras além dos 4 canais necessários para se controlar a aeronave. O arduino realiza a leitura do sinal, em forma de PWM, proveniente do receptor do rádio.

## 3.2 Métodos

Primeiramente, será obtido o modelo do quadricóptero através da mecânica de Newton-Euler (BOUABDALLAH, 2007). A verificação deste modelo será realizada no Matlab® um simulador capaz de reproduzir o comportamento do modelo e fornecer os dados para análise da operação do controlador. A validação deste simulador ocorrerá a partir de ensaios com padrões de entradas e saídas esperados, presentes em diversos trabalhos da área.

Uma vez certificado o funcionamento do simulador, mediante a conferência das saídas esperadas em relação às entradas aplicadas, a etapa seguinte do trabalho contemplará o projeto do controlador.

Finalmente, testes comparativos serão realizados para que, através da análise da resposta do sistema em malha fechada, seja atestada a eficácia do

método proposto. Comparações serão realizadas entre a aplicação de um método Lyapunov (ALVES, 2012) e o do método RLQ (OGATA, 1995).

### 3.2.1 SISTEMA DE COORDENADAS

A utilização de sistemas de coordenadas diferentes é justificada por:

- Forças aerodinâmicas, torques e as equações de movimento de Newton são dadas em relação a um referencial fixo ao corpo
- Sensores inerciais IMU (giroscópios, acelerômetro e magnetômetro) fornecem informações referentes ao sistema fixo ao corpo
- Medidas de posição, podendo ser adquirida por GPS, velocidade de chão e alguns requisitos de missão como trajetória e ponto de parada, são medidas em relação ao referencial inercial.

Por conveniência define os seguintes referenciais: referencial inercial  $E = (O^E, x^E, y^E, z^E)$  e referencial fixo ao corpo  $B = (O^B, x^B, y^B, z^B)$ , como pode ser visto na FIG. 9.

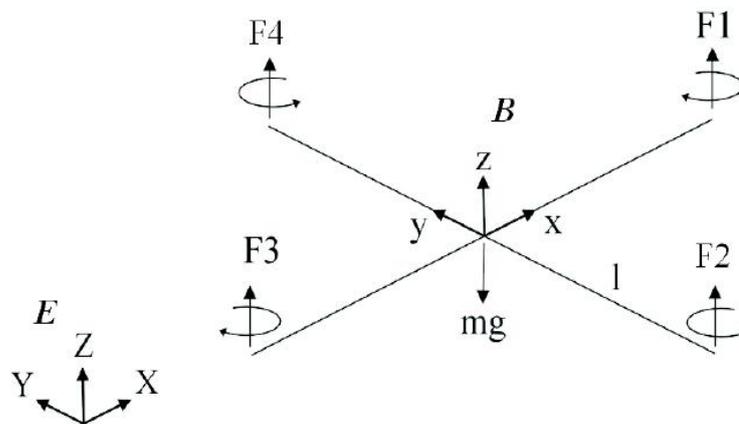


Figura 9 - Sistema de Coordenadas.  
Fonte: BOUABDALLAH (2007, p. 16).

O sistema de coordenadas inercial é um sistema de coordenadas fixo a Terra, com a origem definida no local de partida. Como pode-se ver na FIG. 10, o vetor unitário  $\hat{i}^E$  aponta para o norte,  $\hat{j}^E$  aponta para leste e  $\hat{k}^E$  aponta para o centro da Terra.

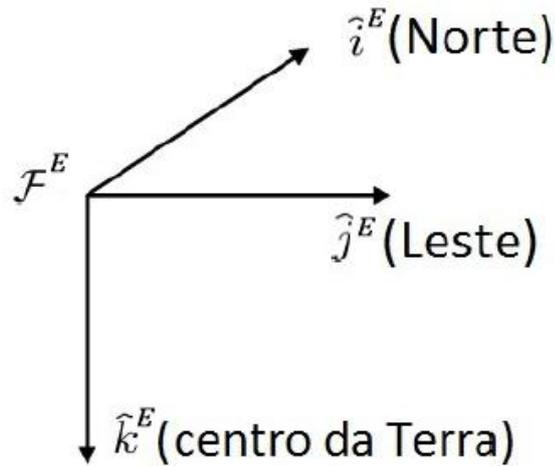


Figura 10 - Coordenadas Inerciais.  
Fonte: ALVES (2012, p. 38).

A rotação do eixo B sobre o eixo E pode ser realizada de forma extrínseca e intrínseca, sendo mais encontrada pesquisas envolvendo a última técnica (ALVES, 2012). O que difere os dois métodos é que na primeira, a rotação é realizada em relação à orientação inicial do sistema a ser rotacionado. Já no segundo método, a rotação sobre um determinado eixo é realizada levando-se em consideração a nova orientação deste eixo, após uma rotação anterior sobre outro eixo qualquer. Portanto a rotação do corpo no espaço pode ser parametrizada usando alguns diferentes métodos como os ângulos clássicos de Euler, Quaternions e ângulos de Tait-Bryan. Na engenharia aeroespacial é consideravelmente mais utilizado os métodos de Tait-Bryan, que são realizados de forma intrínseca.

Para sair do referencial inercial para o referencial fixo ao corpo são necessários três passos de rotação seguindo a sequência (z-y-x), baseado no modelo de rotação de Tait-Bryan ALVES (2012). Para isso cria-se dois referenciais auxiliares  $V1 = (O^{v1}, x^{v1}, y^{v1}, z^{v1})$  e  $V2 = (O^{v2}, x^{v2}, y^{v2}, z^{v2})$  para realizar os passos. Mesmo após os passos de rotação até o referencial final fixo ao corpo B a origem desses novos referenciais continuará sendo o centro de gravidade dos quadricópteros.

No primeiro passo obtém o referencial V1, rotacionando o referencial E em torno do eixo Z de um ângulo  $\psi$  (*yaw*), considerando os ângulos  $\phi$  (*roll*) e  $\theta$  (*pitch*) iguais a zero, como pode ser visto na FIG. 11, então  $\hat{i}^{v1}$  aponta para o "nariz" da aeronave,  $\hat{j}^{v1}$  aponta para a asa direita, e  $\hat{k}^{v1}$  alinhado com  $\hat{k}^E$  aponta para o centro da Terra.

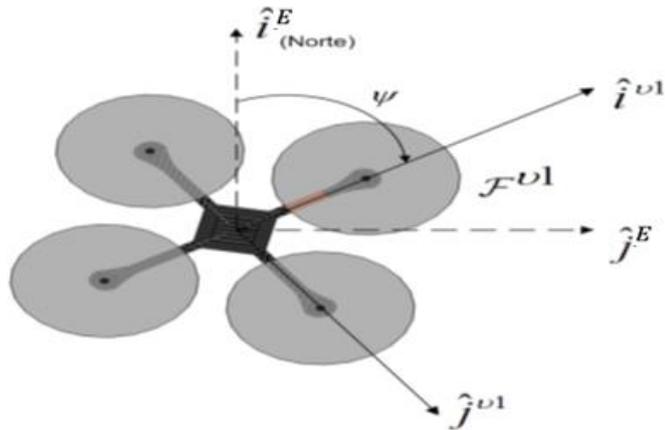


Figura 11 - Rotacionando em torno do eixo Z com um ângulo  $\psi$  (yaw).  
Fonte: ALVES (2012, p. 38)

A transformação entre o referencial E e V1 é dada por

$$p^{v1} = R_E^{v1}(\psi)p^E \quad (3.1)$$

onde

$$R_E^{v1}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Agora, no segundo passo obtém o referencial V2, rotaciona o referencial V1 em torno agora do eixo Y de um ângulo  $\theta$  (*pitch*), considerando os ângulos  $\phi$  (*roll*) e  $\psi$  (*yaw*), iguais a zero, como pode ser visto na FIG. 12, então  $\hat{i}^{v2}$  aponta para o nariz da aeronave,  $\hat{j}^{v2}$  aponta para a asa direita, e  $\hat{k}^{v2}$  aponta para a barriga da aeronave.

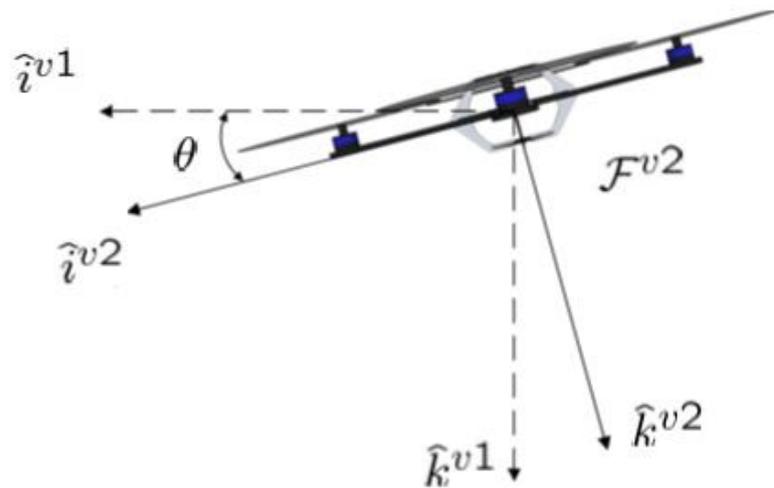


Figura 12 - Rotacionando em torno do eixo  $Y$  com um ângulo  $\theta$  (*pitch*).  
Fonte: ALVES (2012, p. 38).

A transformação entre  $V1$  e  $V2$  é dada por

$$p^{v2} = R_{v1}^{v2}(\theta)p^{v1} \quad (3.3)$$

onde

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

No terceiro passo já se obtém o referencial fixo ao corpo B, rotacionando o referencial  $V2$  em torno agora do eixo  $X$  de um ângulo  $\phi$  (*roll*), considerando os ângulos  $\theta$  (*pitch*) e  $\psi$  (*yaw*), iguais a zero, então,  $\hat{i}^b$  aponta para o nariz da aeronave,  $\hat{j}^b$  aponta para a asa direita e,  $\hat{k}^b$  aponta para a barriga do veículo. O referencial fixo ao corpo é mostrado na FIG. 13.

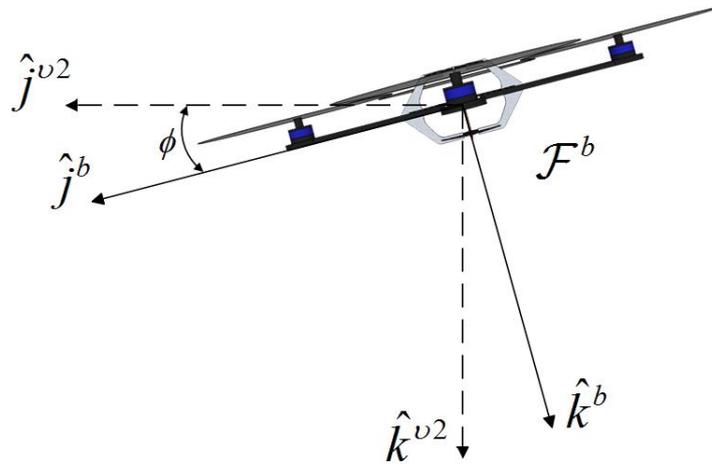


Figura 13 - Rotacionando em torno do eixo  $X$  com um ângulo  $\phi$  (roll).  
Fonte: ALVES (2012, p. 38).

A transformação entre  $V2$  e  $B$  é dada por

$$p^B = R_{v2}^B(\phi)p^{v2} \quad (3.5)$$

onde

$$R_{v2}^B(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

A transformação entre o referencial do veículo e o referencial fixo ao corpo pode ser obtido em apenas uma matriz de rotação, considerando as matrizes (3.2), (3.4) e (3.6).

$$R_E^B(\phi, \theta, \psi) = R_{v2}^B(\phi)R_{v1}^{v2}(\theta)R_E^{v1}(\psi) \quad (3.7)$$

$$R_E^B(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$R_E^B(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \text{sen}\phi\text{sen}\theta\cos\psi - \cos\phi\text{sen}\psi & \cos\phi\text{sen}\theta\cos\psi + \text{sen}\phi\text{sen}\psi \\ \text{sen}\psi\cos\theta & \text{sen}\phi\text{sen}\theta\text{sen}\psi + \cos\phi\cos\psi & \text{sen}\psi\text{sen}\theta\cos\phi - \text{sen}\phi\cos\psi \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta\text{sen}\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A variação temporal ou taxa de variação dos ângulos Euler  $[\phi \ \theta \ \psi]^T$  não é uma função contínua. Portanto é diferente das velocidades angulares  $[p \ q \ r]^T$  que são medidas fisicamente pelos giroscópios da aeronave

(BOUABDALLAH, 2007). A transformação da matriz  $[p \ q \ r]^T$  para  $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$  é dada por

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi\text{cos}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3.2.2 MODELAGEM DINÂMICA

Existem inúmeras pesquisas envolvendo o desenvolvimento de um modelo dinâmico para um veículo quadricóptero, utilizando algumas técnicas como dinâmica de corpos rígidos segundo equações de Coriolis ALVES (2012) e o formalismo Euler-Lagrange (BOUABDALLAH, 2007). Será utilizado o modelo dinâmico de corpos rígidos utilizando as forças e os torques baseado no formalismo de Newton-Euler para representar o comportamento dinâmico do voo de um quadricóptero (BOUABDALLAH, 2007):

$$\begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{3 \times 1} \\ \dot{\omega}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{3 \times 1} \times mV_{3 \times 1} \\ \omega_{3 \times 1} \times I_{3 \times 3} \omega_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{3 \times 1} \\ \tau_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde  $m$  é a massa total do sistema,  $I \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  é a matriz de inércia do corpo,  $V = (V_x, V_y, V_z)$  e  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  são respectivamente os vetores das velocidades lineares e angulares do veículo. O vetor de forças produzido pelas hélices é dado por  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$  e o vetor de torques  $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ .

O quadricóptero apresenta dois grupos de variáveis, as variáveis de posição,  $\xi = (x, y, z)$  que indicam o vetor deslocamento do centro de gravidade do veículo no espaço relativo ao sistema inercial. E as coordenadas de orientação

angular  $\eta = (\psi, \theta, \phi)$  que discriminam respectivamente os ângulos de Euler (*yaw*, *pitch* e *roll*) da aeronave. O vetor  $q = [\xi \ \eta]^{-1}$  é definido no referencial inercial.

O sistema está sujeito à ação de duas forças, sendo:

- Força Gravitacional:  $G$  conservativa, sempre vertical no sentido negativo de  $z^E$
- Força de Empuxo:  $T$  força não conservativa, resultante da somatória das forças de empuxo produzidos pelos quatro motores ( $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ ), como pode ser vista na FIG. 14, sempre no sentido positivo de  $z^B$ . Associado à entrada de controle  $U_1$ .

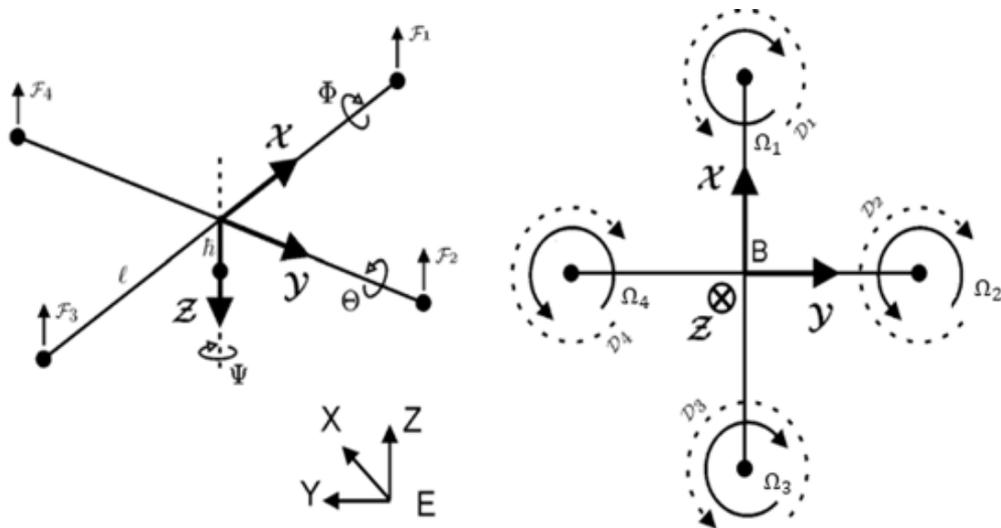


Figura 8 - Referencial inercial E e referencial fixo ao corpo B.  
Fonte: BOUABDALLAH (2007, p. 20).

$$T^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Com a força de empuxo gerada por uma hélice sendo igual ao quadrado de rotação da hélice multiplicada por um coeficiente de empuxo  $b$

$$F_{i=} \Omega_i^2 b \quad (3.14)$$

onde  $b$  é o coeficiente de empuxo e  $\Omega_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ , representa a velocidade angular da  $i$ -ésima hélice.

A velocidade e a aceleração angular do rotor implicam em um torque  $\tau_{Mi}$  ao longo do eixo do eixo do rotor.

$$\tau_{Mi} = d\Omega_i^2 + I_M \dot{\Omega}_i \quad (3.15)$$

Tendo  $I_M$  igual ao momento de inercia do rotor e  $d$  igual ao coeficiente de arrasto. Normalmente o efeito  $\dot{\Omega}_i$  é considerado pequeno, portanto este é omitido (LUUKKONEN, 2011).

Os toques são gerados pelas diferenças nas velocidades das hélices, são não conservativos, alguns deles são:

- Torque de Arfagem  $\tau_\theta$ : resultante das diferenças das forças de empuxo F1 e F3 e também relacionada a  $l$  que é a distância entre o centro do quadricóptero ao centro do motor. Associado à coordenada angular  $\phi$ . Associado à entrada de controle U2.
- Torque de Rolagem  $\tau_\phi$ : resultante das diferenças das forças de empuxo F2 e F4 e também relacionada a  $l$  que é a distância entre o centro do quadricóptero ao centro do motor. Associado à coordenada angular  $\theta$ . Associado à entrada de controle U3.
- Torque de Guinada  $\tau_\psi$ : resultante da subtração do torque  $\tau_{Mi}$  referente ao arraste das hélices que giram no sentido horário com as que giram no sentido anti-horário. Associado à coordenada  $\psi$ . Associado à entrada de controle U4.

$$\begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lb(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ lb(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Sendo as entradas do sistema  $u = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$ .

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Algumas suposições foram estabelecidas para a modelagem do quadricóptero:

- Assume que o corpo seja rígido;

- Assume que o corpo seja simétrico;
- Assume o centro de massa do corpo e igual ao da origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo;
- Assume as hélices sejam rígidas
- Assume as forças de empuxo e arrasto são proporcionais ao quadrado da velocidade das hélices;
- Assume-se a Terra plana e estacionária, ou seja, as acelerações de translação e rotação são nulas.

Devido à suposição que o veículo é simétrico, os termos relativos ao produto de inércia ( $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ ) são nulos (BOUABDALLAH, 2007), restando apenas os termos referentes aos momentos de inércia ( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ). Assim obtemos a matriz do momento de inercia igual a

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Tratando-se apenas de variáveis de posição, a equação (3.12) de Newton-Euler será dada da seguinte forma no referencial fixo ao corpo:

$$m\dot{V}^B + \omega \times (mV^B) = F \quad (3.19)$$

$$m\dot{V}^B + \omega \times (mV^B) = R^T G^E + T^B \quad (3.20)$$

com o termo  $m\dot{V}^B$  se tratando da força gerada devido á aceleração linear do corpo e  $\omega \times (mV^B)$  o termo da força centrífuga e  $F$  sendo igual soma da força gravitacional  $R^T G^E$  e a força empuxo  $T^B$ .

É necessário passar a equação para o referencial inercial e com isso a força centrífuga é anulada (LUUKKONEN, 2011). Pode-se considerar  $T^B = [0 \ 0 \ U_1]^T$

$$m\ddot{\xi} = G + RT^B \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{m} R^{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{U_1}{m} \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Apenas a força gravitacional e a força de empuxo contribuem para a aceleração do quadricóptero. Assim, obtém-se as variáveis de posição.

$$\ddot{x} = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} \quad (3.24)$$

$$\ddot{y} = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{U_1}{m} \quad (3.25)$$

$$\ddot{z} = -g + (\cos \psi \cos \theta) \frac{U_1}{m} \quad (3.26)$$

Referente às variáveis angulares da equação (3.12), a aceleração angular multiplicada pelo  $I\dot{\omega}$  momento de inercia somada às forças centrípetas  $\omega \times (I\omega)$  adicionadas às forças giroscópicas  $\Gamma$  obtém-se o (é igual ao) torque  $\tau$

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) + \Gamma = \tau \quad (3.27)$$

isolando a aceleração angular  $\dot{\omega}$  segue que

$$\dot{\omega} = I^{-1} \left( - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} p \\ I_{yy} q \\ I_{zz} r \end{bmatrix} - J_r \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Omega_r + \tau \right) \quad (3.28)$$

e resultando em

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{yy} - I_{zz})qr/I_{xx} \\ (I_{zz} - I_{xx})pr/I_{yy} \\ (I_{xx} - I_{yy})pq/I_{zz} \end{bmatrix} - J_r \begin{bmatrix} q/I_{xx} \\ -p/I_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} \Omega_r + \begin{bmatrix} \tau_\theta/I_{xx} \\ \tau_\phi/I_{yy} \\ \tau_\psi/I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde,  $\Omega_r = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$  e  $J_r$  é igual à inercia do rotor.

$$\dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr - J_r \frac{q}{I_{xx}} \Omega_r + \frac{lU_2}{I_{xx}} \quad (3.30)$$

$$\dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr + J_r \frac{p}{I_{yy}} \Omega_r + \frac{lU_3}{I_{yy}} \quad (3.31)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq + \frac{U_4}{I_{zz}} \quad (3.32)$$

### 3.2.2.1 Dinâmica do Motor

A descrição da equação de movimento do motor de corrente contínua (CC) sem escovas (SANCA; ALSINA; CERQUEIRA, 2008) que relaciona o torque desenvolvido, inércia e amortecimento são dados por:

$$\tau_e - \tau_l = J_r \frac{d\Omega(t)}{dt} + A\Omega(t) \quad (3.33)$$

$$\tau_e = K_t i(t) \quad (3.34)$$

sendo  $\tau_e$  o torque eletromagnético,  $\tau_l$  o torque da carga,  $J_r$  a inércia do motor,  $K_t$  a constante de torque do motor,  $A$  o coeficiente de atrito viscoso,  $i$  é a corrente e  $\Omega$  é a velocidade do motor.

Acrescentando os propulsores ao modelo dos motores e desconsiderando os efeitos elétricos, a velocidade angular passa a ser dada por:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{-k_m^2}{R_m(J_m + J_r)} \Omega_i - \frac{d}{J_m + J_r} \Omega_i^2 + \frac{k_m V}{R_m(J_m + J_r)} \quad (3.35)$$

onde  $\Omega_i$  representa a velocidade angular do  $i$ -ésimo rotor,  $k_m$  a constante de força eletromotriz,  $R_m$  a resistência interna do motor,  $J_m$  e  $J_r$  a inércia do motor e a inércia do rotor respectivamente e  $V$  a tensão de entrada no motor.

A empresa do motor utilizado no protótipo não informa as constantes, como  $J_m$ ,  $J_r$ ,  $R_m$  entre outras, necessárias para utilizar na equação (3.35), com isso é necessário o equacionamento da dinâmica do motor. Também é desconhecida constantes das hélices como o coeficiente de empuxo  $b$  e o coeficiente de arrasto  $d$ .

Nas FIG. 15 e FIG. 16 são traçadas as curvas dos motores no software Excel® com dados obtidos com um teste de bancada aplicando uma entrada PWM e verificando a saída em Newtons (N).

Com a curva da FIG. 11, referente as forças de empuxo das hélices de  $i = 1,2,3,4$ , obtem-se,

$$y_{b(i)} = 9 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0037 \cdot x + 0,1613 \quad (3.36)$$

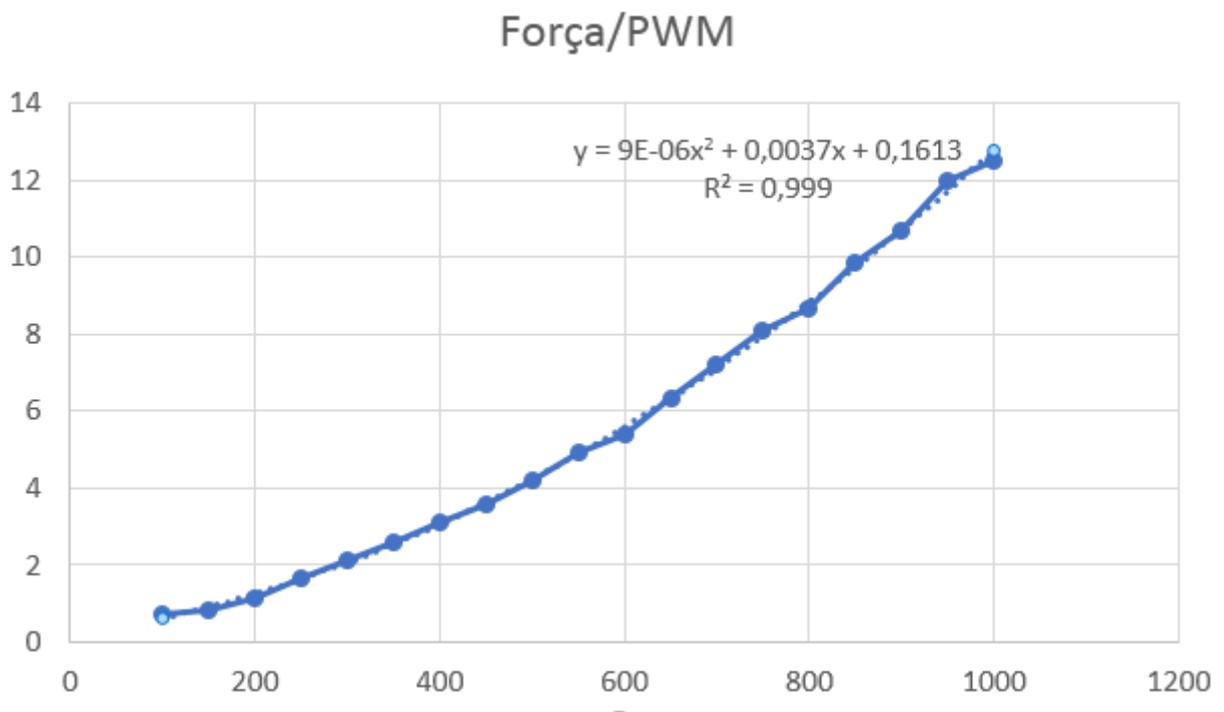


Figura 9 - Curva motor relativo ao coeficiente de empuxo  $\hat{b}$ .

Com a curva da FIG. 16, referente aos torques ao longo do eixo dos rotores gerados através dos arrastos das hélices de  $i = 1,2,3,4$ , obtem-se,

$$y_{d(i)} = 0,0014 \cdot x + 0,4484 \quad (3.37)$$

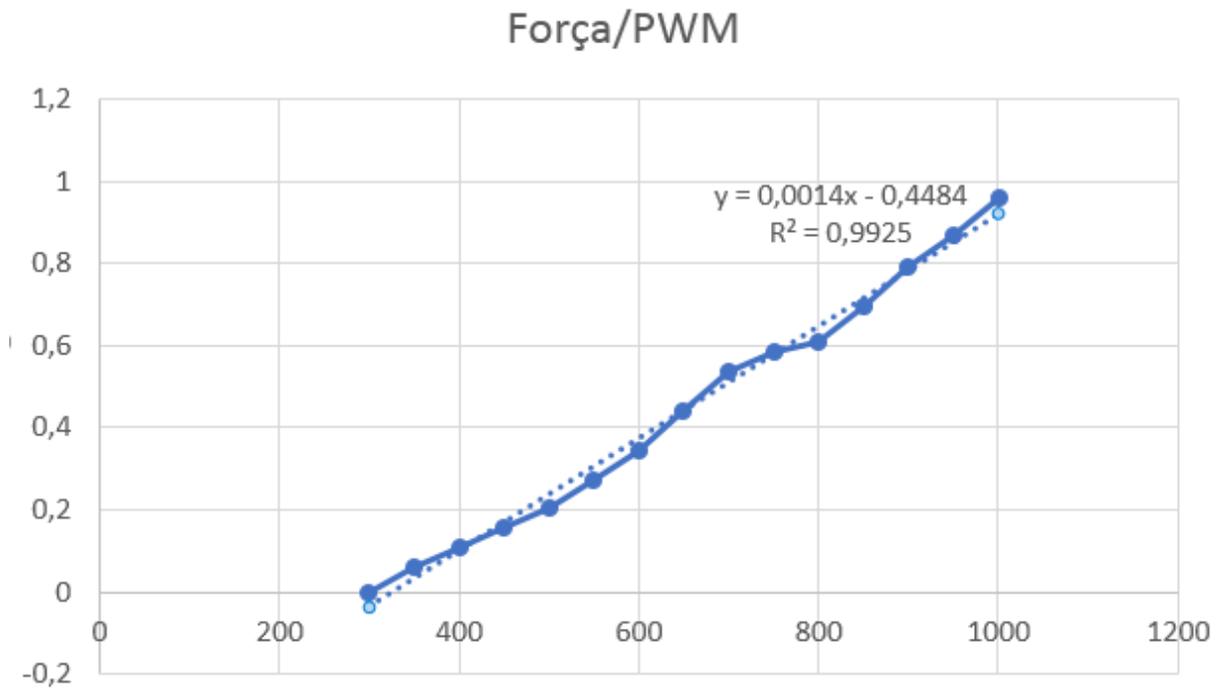


Figura 10 - Curva motor relativo ao coeficiente de arrasto  $d$ .

Substituindo as equações (3.36) e (3.37) na entrada do sistema (3.17), tem-se

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{b(1)} + y_{b(2)} + y_{b(3)} + y_{b(4)} \\ y_{b(4)} - y_{b(2)} \\ y_{b(3)} - y_{b(1)} \\ y_{d(1)} - y_{d(2)} + y_{d(3)} - y_{d(4)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.2.2.2 Momento de Inércia

O momento de inércia descreve o comportamento dinâmico de um corpo em rotação em torno de um eixo definido (BRESCIANI, 2008). Devido à geometria simétrica do quadricóptero, nos cálculos dos momentos de inércia consideram-se apenas a massa dos motores e a massa da caixa que contém os componentes eletrônicos, bem como suas posições na estrutura (AMIR; ABBASS, 2008).

O momento de inércia de cada componente da matriz  $I$  depende do design e das dimensões do quadricóptero construído (CRAIG, 2008). O momento  $I_{xx}$  representa o momento de inércia relativo à rotação em torno do eixo  $x$ ,  $I_{yy}$  o momento de inércia relativo a rotação sobre o eixo  $y$  e  $I_{zz}$  o momento de inércia relativo a rotação sobre o eixo  $z$ .

Para obter uma maior precisão a matriz de inercia foi calculada utilizando o SOLID WORKS®, como visto na FIG. 17, aplicando todas as medidas e pesos dos componentes, obtendo assim a matriz de inercia  $I$ , conforme FIG.18.

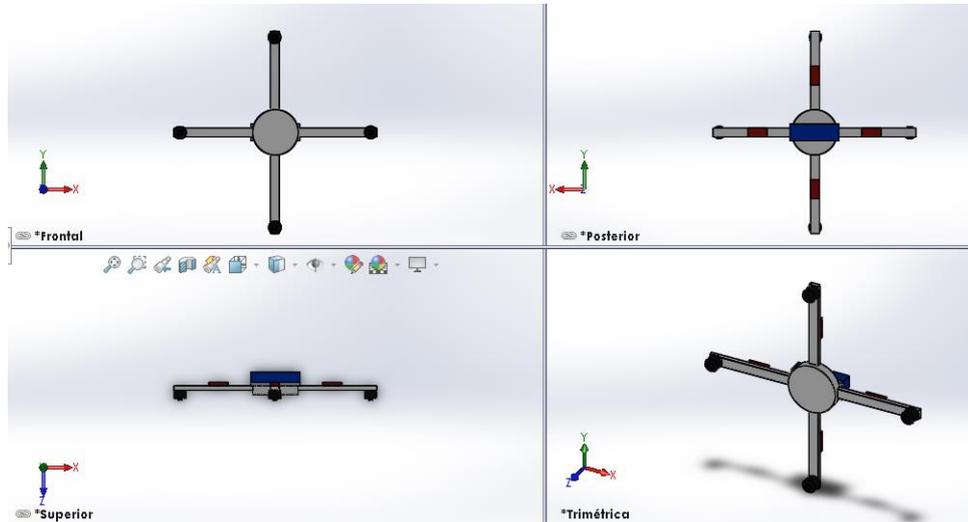


Figura 11 - Desenho do quadricóptero no Solidworks®.

Massa = 1441.23 gramas	
Volume = 784875.13 milímetros cúbicos	
Área de superfície = 249039.24 milímetros quadrados	
Eixos principais de inércia e momentos de inércia principais: ( gramas * milímetros quadrados ) Tomado no centro da massa.	
$I_x = (1.00, 0.00, 0.00)$	$P_x = 17477521.85$
$I_y = (0.00, 1.00, 0.00)$	$P_y = 18187200.02$
$I_z = (0.00, 0.00, 1.00)$	$P_z = 34478892.51$

Figura 12 - Valores adquiridos a partir do desenho do Solidworks®.

Então definimos que a matriz  $I$  é composta por,

$$I = \begin{bmatrix} 17,4775 & 0 & 0 \\ 0 & 18,1872 & 0 \\ 0 & 0 & 34,4789 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^3$$

### 3.2.4 PROJETO DO CONTROLADOR POR LYAPUNOV

Para o projeto do controlador segundo Lyapunov será simplificado o modelo para um sistema em cascata, linear e invariante no tempo. O modelo simplificado do sistema que se deseja controlar em espaço de estados possui

algumas considerações, como os coeficientes de empuxo e arrasto sendo constantes e que a transformação entre a variação da posição angular medida pelos sensores  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  e a velocidade angular do corpo  $(p, q, r)$  pode ser considerada idêntica se as perturbações no voo da aeronave forem pequenos. Então pode-se dizer que  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$  (BOUABDALLAH, 2007).

O sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.39)$$

$$y = Cx \quad (3.40)$$

sendo o vetor de estado  $x = [\phi \dot{\phi} \theta \dot{\theta} \psi \dot{\psi} x \dot{x} y \dot{y} z \dot{z}]^T$  e o vetor de entradas  $u = [U_1 U_2 U_3 U_4]^T$  e substituindo as equações (3.30), (3.31) e (3.32) em (3.49), obtém-se

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} x_4 x_6 - J_r \frac{x_4}{I_{xx}} \Omega_r + \frac{lU_2}{I_{xx}} \\ x_4 \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} x_2 x_6 + J_r \frac{x_2}{I_{yy}} \Omega_r + \frac{lU_3}{I_{yy}} \\ x_6 \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} x_2 x_4 + \frac{U_4}{I_{zz}} \\ x_8 \\ -g + (\cos \phi \cos \theta) \frac{U_1}{m} \\ x_{10} \\ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} \\ x_{12} \\ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Com as variáveis de estado iguais a,

$x_1 = \phi$	$x_7 = z$
$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\phi}$	$x_8 = \dot{x}_7 = \dot{z}$
$x_3 = \theta$	$x_9 = x$
$x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\theta}$	$x_{10} = \dot{x}_9 = \dot{x}$

$x_5 = \psi$	$x_{11} = y$
$x_6 = \dot{x}_5 = \dot{\psi}$	$x_{12} = \dot{x}_{11} = \dot{y}$

O sistema em cascata pode ser dividido em dois subsistemas, um controle de atitude e outro controle de posição do quadricóptero no espaço, como pode ser visto na FIG. 19.

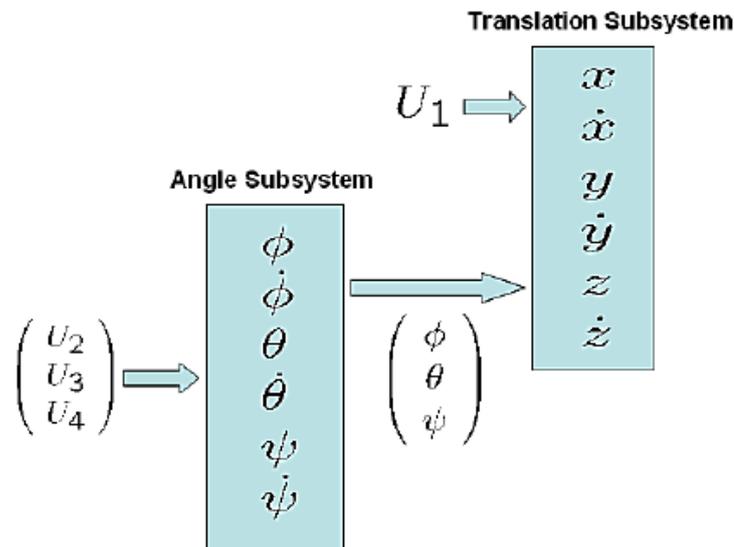


Figura 13 - Sistema em Cascata.  
Fonte: BOUABDALLAH (2007, p. 47)

Neste trabalho o foco será no controle de atitude que é o ponto chave para a estabilidade de voo de uma aeronave. Com isso, os estudos serão focados apenas nas variáveis angulares o que condizem que este problema,

$$\dot{x}_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} x_4 x_6 - J_r \frac{x_4}{I_{xx}} \Omega_r + \frac{lU_2}{I_{xx}} \\ x_4 \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} x_2 x_6 + J_r \frac{x_2}{I_{yy}} \Omega_r + \frac{lU_3}{I_{yy}} \\ x_6 \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} x_2 x_4 + \frac{U_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Considerando que o modelo representado tem acesso a todas as saídas do sistema, pode-se dizer que a matriz  $C$  da equação (3.40) é uma matriz identidade e portanto  $x = y$ .

É desejável controlar o sistema linearizado, no caso específico deste sistema, linearizar em torno de um ponto de equilíbrio levaria o sistema para mais longe da realidade do modelo físico. Para permitir que o sistema seja otimizado, pode-se linearizar em torno de cada estado. Cada termo do efeito giroscópico referente ao corpo é representado duas vezes, fixando e variando um estado a cada instante de tempo (BOUABDALLAH, 2007), com isso obtemos as matrizes do novo modelo em espaço de estados são obtidas para o sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_{yy} - I_{zz}/2I_{xx})\dot{\psi} & 0 & (I_{yy} - I_{zz}/2I_{xx})\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (I_{zz} - I_{xx}/2I_{yy})\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & (I_{zz} - I_{xx}/2I_{yy})\dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (I_{xx} - I_{yy}/2I_{zz})\dot{\theta} & 0 & (I_{xx} - I_{yy}/2I_{zz})\dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l/I_{xx} & 0 & -J_r\dot{\theta}/I_{xx}d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/I_{yy} & J_r\dot{\phi}/I_{yy}d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix}$$

A partir daqui serão feitas algumas suposições para simplificar o modelo com a intenção de torná-lo invariante no tempo.

Como uma primeira suposição consegue-se eliminar o efeito giroscópico gerado pelas hélices  $(J_r\Omega_r\dot{\theta})$ , considerando o quadricóptero perfeitamente simétrico. Uma segunda suposição deve ser considerada caso o modo de voo seja do tipo pairar, voos lentos com variações nos ângulos de até  $30^\circ$  e velocidades angulares  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  próximas à zero pode-se, então, eliminar o efeito giroscópico gerado pelo corpo  $[(I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi}]$ . Assim, tem-se um modelo mais simplificado.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & l/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Com esse modelo simplificado nota-se a possibilidade de desacoplar o sistema em outros três subsistemas, assim possuindo uma função independente para cada ângulo de Euler. Primeiramente, projeta-se o controlador para ângulo  $\phi$  calculando uma matriz de ganho  $K$  que leve o sistema para a estabilidade, onde:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l/I_{xx} \end{bmatrix} u \quad (3.45)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Antes de projetar o controlador é necessário certificar se o sistema é controlável. Essa condição é verificada através do posto da matriz de controlabilidade  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] \quad (3.47)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & l/I_{xx} \\ l/I_{xx} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Como as linhas são linearmente independentes, o modelo a ser projetado é controlável.

Seja  $\tilde{A}$  uma matriz com os autovalores desejados em malha fechada, onde não existem autovalores comuns entre  $A$  e  $\tilde{A}$ . Como o sistema possui apenas duas variáveis de estado, o sistema pode ser definido como de segunda ordem, os autovalores desejados deste sistema coincidem com os polos da função de transferência da equação abaixo

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2} \quad (3.49)$$

Para obter uma resposta transitória satisfatoriamente rápida e amortecida, escolhe-se valores típicos de amortecimento  $\zeta$  entre 0,4 e 0,8 OGATA (2003). Escolhendo um  $\omega_n = 6,75 \text{ rad/s}$  e  $\zeta = 0,8$ , obtem-se o vetor de polos  $s = [-8.0 \pm 6.0i]^T$ , então

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Arbitrariamente escolhendo um vetor  $\tilde{K}$  para que o par  $\tilde{A}\tilde{K}$  seja observável

$$\tilde{K} = [1 \quad 1] \quad (3.51)$$

então

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}\tilde{A} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

As colunas são linearmente independentes. Portanto, o par  $\tilde{A}\tilde{K}$  é observável.

Assim, possuindo as matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{K}$  é possível determinar a matriz  $P$ , solução da equação de Lyapunov.

$$AP - P\tilde{A} = B\tilde{K} \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l/I_{xx} \end{bmatrix} [1 \quad 1] \quad (3.54)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Em seguida, como  $P$  é não singular, determina-se os ganhos de  $K$

$$K = \tilde{K}P^{-1} \quad (3.56)$$

$$K = [6,0267 \quad 0,9643]$$

Possuindo a entrada com sinal de realimentação de estados do tipo  $u = -Kx$ , tem-se

$$u = -[6,0267 \quad 0,9643] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Para calcular o ângulo  $\psi$  e  $\theta$  pode ser feito seguindo os mesmos passos utilizados para calcular os ganhos para o ângulo  $\phi$ , apenas alterando os parâmetros como momento de inercia e a entrada do sistema.

### 3.2.5 PROJETO DO CONTROLADOR POR RLQ

Para o projeto do controlador utilizando a teoria do Regulador Linear Quadrático será utilizado o modelo em espaço de estados linear e variante no tempo do controle de atitude do quadricóptero. O sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$x_{i+1} = A_i x_i + B u_i \quad (3.58)$$

$$y_i = C x_i \quad (3.59)$$

Com o vetor entrada  $u = [U_2 \ U_3 \ U_4]^T$  e o vorto de estados  $x = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ .

Como visto no capítulo (3.2.4) sobre projeto de controlador segundo Lyapunov as matrizes  $A, B$  e  $C$  foram arranjadas de forma a ser um sistema linear, primeiramente foi mostrada uma versão variante no tempo e, após algumas simplificações, um modelo invariante no tempo.

Este capítulo abordará o modelo linear variante no tempo, considerando o efeito giroscópico referente ao corpo  $[(I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi}]$ .

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_{yy} - I_{zz}/2I_{xx})\dot{\psi} & 0 & (I_{yy} - I_{zz}/2I_{xx})\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (I_{zz} - I_{xx}/2I_{yy})\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & (I_{zz} - I_{xx}/2I_{yy})\dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (I_{xx} - I_{yy}/2I_{zz})\dot{\theta} & 0 & (I_{xx} - I_{yy}/2I_{zz})\dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O projeto do regulador utilizando (RLQ) tem como o objetivo determinar uma matriz de ganho  $K_i$ , tal que  $u_i = -K_i x_i$ , onde o índice de desempenho  $J$  seja minimizado garantindo o estado  $x_{i+1}$  alcance o equilíbrio.

De acordo com (OGATA, 2003), as matrizes  $Q$  e  $R$  determinam respectivamente a importância relativa do erro e o consumo de energia das entradas, isto é, são ponderações dos erros.

A escolha dessas matrizes pode ser efetuada utilizando a Regra de Bryson como visto em (FRANKLIN, G. F.; POWELL J. D.; EMAMINAEINI, 2013). Na prática, para a obtenção de valores aceitáveis  $x$  e  $u$  é inicialmente a escolha apropriada das matrizes diagonais  $Q$  e  $R$ , tais que

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{maior valor aceitável de } [x_i^2]} \quad (3.60)$$

$$R_{ii} = \frac{1}{\text{maior valor aceitável de } [u_i^2]} \quad (3.61)$$

Primeiramente calculando a matriz  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sendo  $\Delta x_i$  a amplitude aceitável para os desvios de cada estado  $x_i$ , sendo  $Q_{ii} = 1/(\Delta x_i)^2$ .

$$\Delta x_1 = 90^\circ - (-90^\circ) = 180^\circ \quad (3.62)$$

ou em radianos

$$\Delta x_1 = 1,57rad - (-1,57rad) = 3,14rad \quad (3.63)$$

$$\Delta x_2 = 400^\circ/s - (-400^\circ/s) = 800^\circ/s \quad (3.64)$$

ou em radianos por segundo

$$\Delta x_2 = 6,98rad/s - (-6,98rad/s) = 13,96rad/s \quad (3.65)$$

Valores foram escolhidos, respectivamente, devido aos ângulos e velocidades angulares aceitáveis do quadricóptero e  $\Delta x_1 = \Delta x_3 = \Delta x_5$  e  $\Delta x_2 = \Delta x_4 = \Delta x_6$ . Assim, obtém-se

$$Q = \begin{bmatrix} 0.101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.101 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.101 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 \end{bmatrix}$$

Agora calculando a matriz  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sendo  $n$  o número de entradas e  $\Delta u_i$  a amplitude aceitável para os desvios de cada estado  $u_i$ , sendo  $R_{ii} = 1/(\Delta u_i)^2$ .

$$\Delta u = 10 - (-10) = 20 \quad (3.66)$$

Valores foram escolhidos de acordo com a variação PWM da entrada do sistema, sendo igual para as quatro entradas, portanto

$$R = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

Agora com as matrizes  $Q$  e  $R$  definidas e sabendo que o modelo é controlável, será utilizado o Matlab® para calcular a matriz de ganho  $K_i$ , conforme código apresentado no Apêndice B.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo abordará os resultados obtidos durante todo o desenvolvimento do trabalho, uma parte desenvolvida no Matlab® para aferir a eficácia do controlador, outra executando teste pratico do controle de voo, utilizando-se o quadricóptero da FIG. 20.



Figura 20 – Quadricóptero utilizado no projeto.

Foram desenvolvidos dois controladores para a quadricóptero, um variante e outro invariante no tempo, utilizando respectivamente os métodos de Lyapunov e LQR.

As FIG. 21, FIG. 22 e FIG. 23 mostram os resultados do simulador para o controle via Lyapunov em cada ângulo proposto, sem presença de distúrbios de voo. Em cada figura são mostrados dois gráficos sendo o primeiro referente ao ângulo e o segundo referente a velocidade angular, ambos em relação ao tempo, para cada eixo do quadricóptero. Apêndice A mostra o código feito no Matlab®, para discretizar o sistema e obter os resultados da simulação, pois na seção (3.2.4) foi desenvolvido o método contínuo.

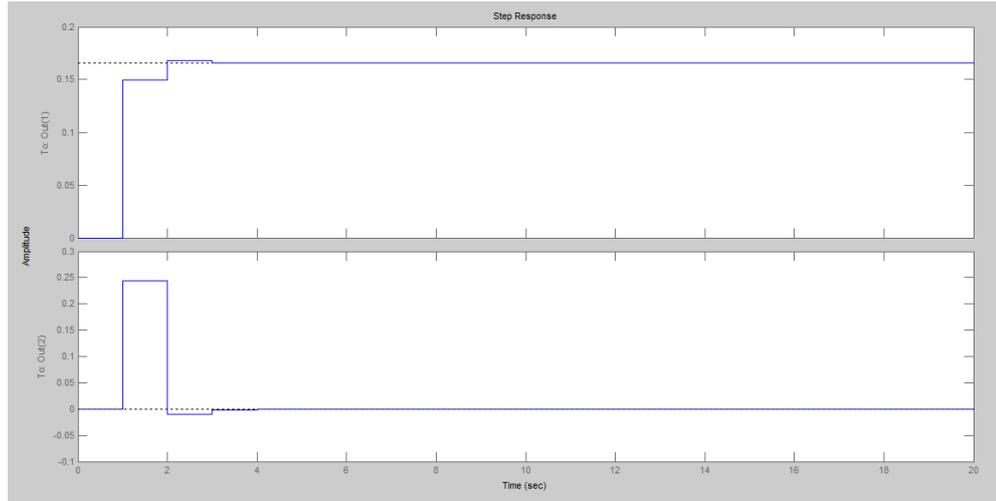


Figura 14 – Resposta ao degrau para o ângulo  $\phi$ .

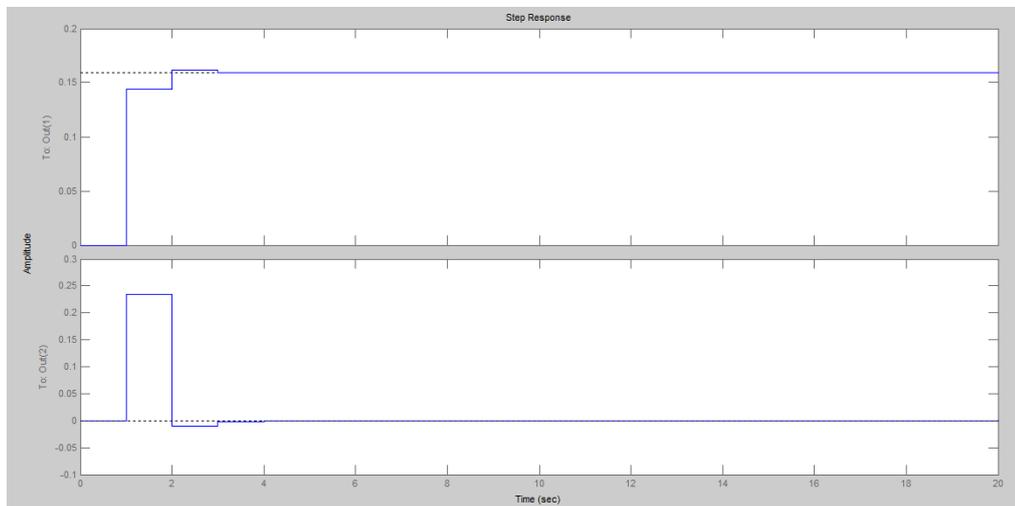


Figura 15 – Resposta ao degrau para o ângulo  $\theta$ .

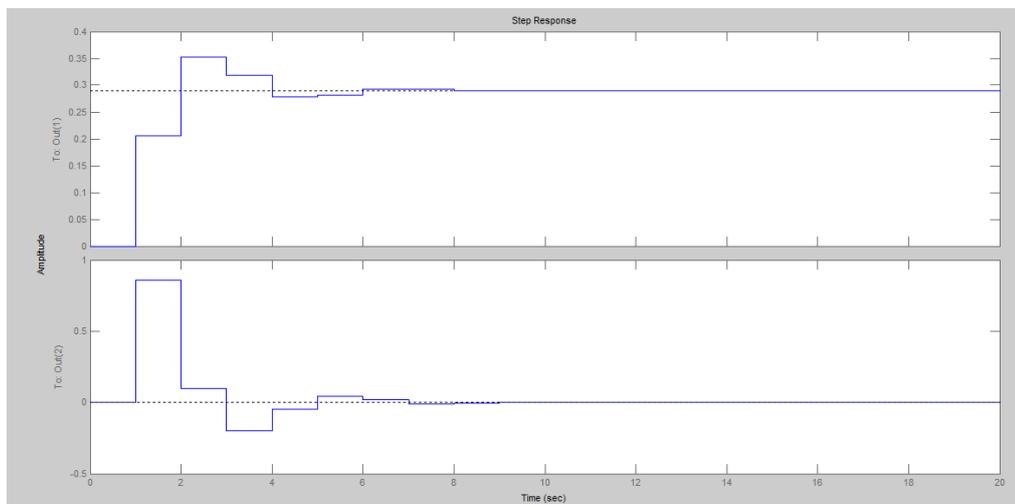


Figura 16 – Resposta ao degrau para o ângulo  $\psi$ .

Para o método RLQ variante no tempo desenvolvido no Apêndice B, os estados são apresentados na FIG.24, com o estado inicial  $x_i(0)$  com  $i = 1,2,\dots,6$ .

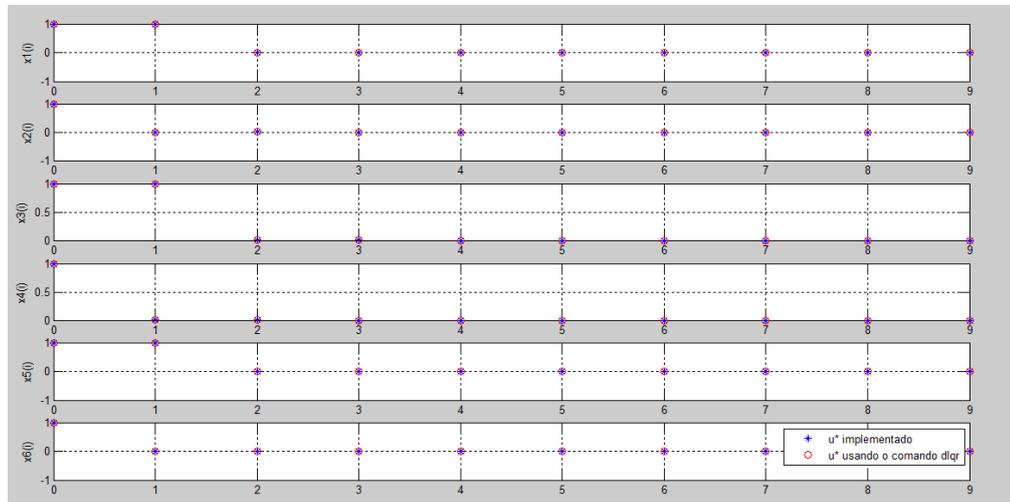


Figura 17 – Resultados obtidos como o método RLQ variante no tempo.

Foram feitas leituras referentes ao ângulo associado ao eixo x em graus para os dois métodos propostos, aplicado em voos de teste no protótipo sob influências de perturbações externas como, por exemplo, o vento. Para ambos os métodos realizou-se 1000 leituras com um tempo de amostragem de 0.01s. Na FIG. 25 estão os dados obtidos com a abordagem via Lyapunov.

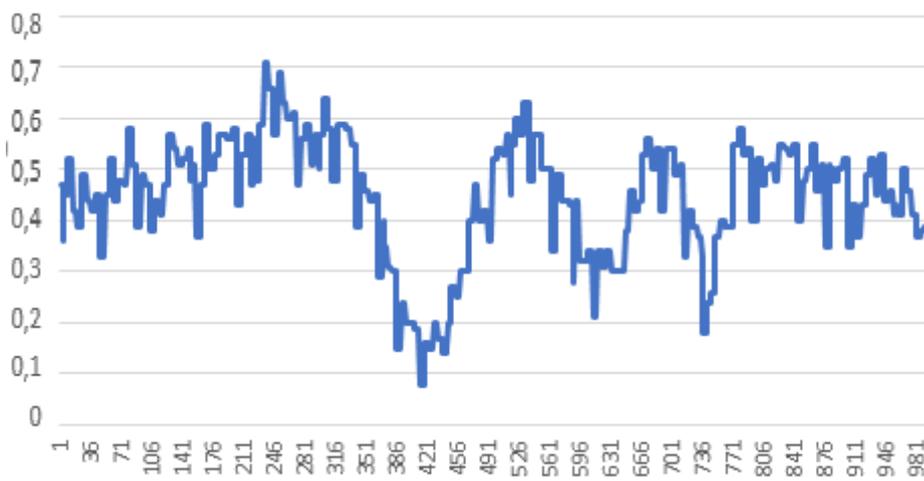


Figura 18 - Dados obtidos com a abordagem via Lyapunov.

Na FIG. 26 são os dados relativos ao Regulador Linear Quadrático.

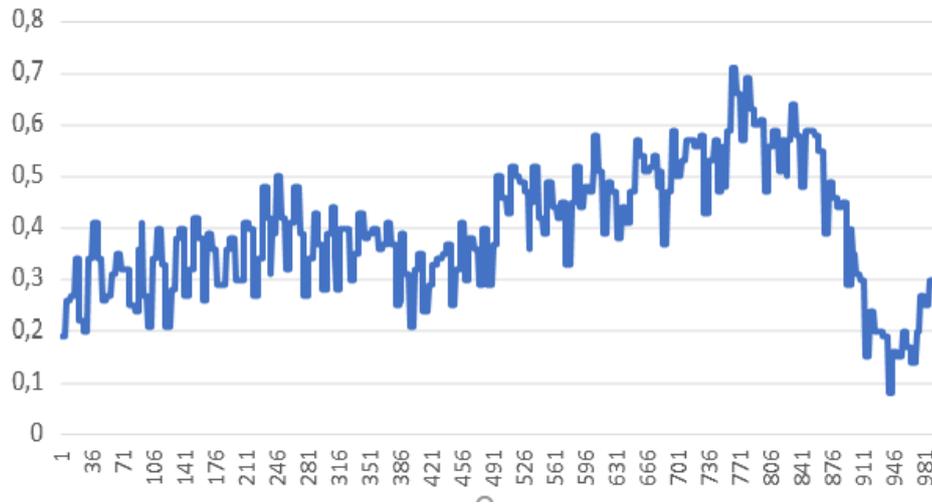


Figura 19 - Dados obtidos com o RLQ.

Os resultados práticos mostraram eficazes para a utilização proposta, variando os ângulos em apenas um grau. Não podendo realizar um comparativo entre os métodos.

## 5 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresentou a modelagem matemática do quadricóptero segundo equações físicas e aerodinâmicas, com parâmetros fiéis ao modelo real, sendo feito um modelo no Solidworks® para gerar os momentos de inércia com uma certa precisão. Para os motores, foram geradas curvas onde se aplicou entrada PWM obtendo a força em Newtons.

Desenvolvido os métodos de controle via Lyapunov e o Regulador Linear Quadrático, validou-se os métodos através de simulações computacionais feitas no Matlab®. Após a validação, foram realizados testes práticos onde se observou voos com resultados satisfatórios, mesmo após algumas simplificações feitas no modelo dinâmico do sistema. Não foi feito um comparativo direto entre os métodos, entretanto, ambos mostraram-se controláveis e estáveis em aplicações onde a taxa de variação nos ângulos foi pequena.

Com o sistema variante no tempo, o método RLQ mostrou maior complexidade na elaboração do algoritmo de controle, tendo em vista que a cada iteração gera-se uma nova matriz de ganho  $K$ , onde é necessário cálculos com matrizes no microcontrolador. Todavia, o microcontrolador mostrou-se capaz de realizar estes cálculos de forma satisfatória.

Propõe-se a partir dos resultados obtidos realizar novas estratégias de controle robusto, como por exemplo o RLQ robusto ou  $H_\infty$ , onde mostra-se mais eficaz na presença de incertezas paramétricas e ruídos durante a operação. Desenvolver estes controladores em conjunto com estratégias de controle adaptativo ampliando assim a estabilidade e robustez de voo.

## REFERÊNCIAS

- ADIGBLI, P. et al. **Nonlinear attitude and position control of a micro quadrotor using sliding mode and backstepping techniques**. Cidade: Citeseer, 2007.
- ALVES, A. S. C. **Estudo e aplicação de técnicas de controle embarcadas para estabilização de voo de quadricopteros**. TESE (Doutorado em Sistemas de Energia) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.
- AMIR, Y., ABBASS, V., **Modeling of Quadrotor Helicopter Dynamics**. IEEE International Conference on Smart Manufacturing Application (ICSMA'2008), Korea, 2008.
- AUSTIN, R. **Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment**. [S.I.]: Wiley, 2011.
- BELLMAN, R. E.; R. KALABA. **Dynamic Programming and Modern Control Theory**. New York: Academic Press (1965).
- BOUABDALLAH, S. **Desing and control of quadrotors with application to autonomous flying**. PhD Thesis, Échole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Local, 2007.
- BRESCIANI, T. **Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter**. Dissertação de mestrado, Universidade de Lund, Suécia. 2008.
- CERRI, J. P. **Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado**, 126f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2009.
- CRAIG, J. J., **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**, 3. ed., Pearson, 2008.
- COZA, C.; MACNAB, C. **A new robust adaptive-fuzzy control method applied to quadrotor helicopter stabilization**. In: IEEE. Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS, Annual meeting of the North American [S.I.], 2006.
- FRANKLIN, G.F.; POWELL, J. D. and EMAMI-NAEINI, A.: **Sistemas de Controle para Engenharia**, 6. ed., Bookman, 2013.
- HOFFMANN, G. et al. **Quadrotor helicopter ight dynamics and control: Theory and experiment**. In: Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. [S.I.: s.n.], 2007.
- H. K. Khalil. **Nonlinear systems**. Prentice hall, 3rd edition, 2002.
- LEISHMAN, J. G. **A History of Helicopter Flight**. S.I.: University of Maryland, 2000. Disponível em: <<http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history.html>> .

Luukkonen, T. **Modelling and control of quadcopter**. Espoo, 2011.

MILHINM, A. B. **Modeling and Fault Tolerant PID Control of a Quad-Rotor UAV**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Concordia University, Canada, 2010.

MINH, L.; HA, C. **Modeling and control of quadrotor mav using vision-based measurement**. In: IEEE. Strategic Technology (IFOST), International Forum on, [S.I.], 2010.

NISE, Norman S.: **Engenharia de Sistemas de Controle**, 6. ed. LTC, 2012.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 4th. ed. New York: Prentice Hall, 2003.

OGATA, K. **Discrete-time control systems**. 2nd ed. (ph 1995).

PAW, Yew Chai; BALAS, Gary J. **Development and application of an integrated framework for small UAV flight control development**. *Mechatronics* (2011) 789-802.

SÁ, R. C. **Construção, Modelagem Dinâmica e Controle PID para Estabilidade de um Veículo Aéreo Não Tripulado do Tipo Quadrirotor**. 2012. 67 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Teleinformática) - Curso de Engenharia em Teleinformática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

SANCA, A.S.; ALSINA, P.J., CERQUEIRA, J. de J. F., **Dynamic Modelling of a Quadrotor Aerial Vehicle with Nonlinear Inputs**, IEEE Latin American Robotic Symposium (LARS'2008), pp.143-148, 2008.

Tôrres, L. A. B. **Teoria de estabilidade de Lyapunov**. 2012.

WAHARTE, S.; TRIGONI, N. **Supporting search and rescue operations with uavs**. In: IEEE. Emerging Security Technologies (EST), International Conference on, [S.I.], 2010.

## APÊNDICE A

### Código Fonte do Programa criado no MATLAB® para simular o método Lyapunov proposto

```

clear all;
close all;
clc

% atribuição de valores aos parâmetros do modelo
Ix=0.0174775;
Iy=0.0181872;
Iz=0.0344789;
l = 0.29;

%matrizes no modelo espaço de estados
A=[0 1;
   0 0];
B=[0 ; 1/Ix]

C = eye(2);
D = [0;0];

%matriz de controlabilidade
Co=ctrb(A,B);

rank(Co);

if rank(Co) ==2
    disp('O Sistema é Controlável')
else
    disp('O Sistema é não Controlável')
end

% polinômio característico de segunda ordem
qsi = 0.8;
wn = 10; %rad/s
syms s
polinomio = s^2+2*qsi*wn*s+wn^2;

%polos a serem alocados
polos = roots([1 2*qsi*wn wn^2]);
polo1 = polos (1,:);
polo2 = polos (2,:);

%Matriz de estados desejada
Ad=[polo1 0 ;
    0 polo2]

Kd=[1 1];

%matriz de observabilidade
Ob=obsv(Ad,Kd);

```

```

if rank(Ob) == 2
    disp('O Sistema é Observável')
else
    disp('O Sistema é não Observável')
end

%Determinar matriz P

p11=-1/(Ix*polo1^2);
p12=-1/(Ix*polo2^2);
p21=-1/(Ix*polo1);
p22=-1/(Ix*polo2);

P=[ p11 p12;
    p21 p22];
i=eye(2);

%Determinar matriz de ganhos K

K=real(Kd*inv(P))

%Verificando
Ac=(A-B*K);
[T,D1]=eig(A-B*K);

[num,den]=ss2tf(Ac,B,C,D)
T = 0.3; % Período de Amostragem T = 0.3 s
[numd,dend] = c2dm(num, den, T); % FT discretizada com zero order hold
printsys(numd, dend, 'z') % Exibição da FT discretizada
dstep(numd, dend) % Resposta ao degrau da FT discretizada

```

## APÊNDICE B

### Código Fonte do Programa criado no MATLAB® para simular o LQR proposto

```

close all
clear all
clc

% =====
% Atribuição de valores aos parâmetros do modelo
% =====

Ix = 0.0174775;
Iy = 0.0181872;
Iz = 0.0344789;
l  = 0.29;

a = (Iy-Iz) / (2*Ix);
b = (Iz-Ix) / (2*Iy);
c = (Ix-Iy) / (2*Iz);

d = l / Ix;
e = l / Iy;
f = l / Iz;

% =====
% Matrizes no modelo espaço de estados
% =====

B = [
    0  0  0;
    d  0  0;
    0  0  0;
    0  e  0;
    0  0  0;
    0  0  f
];

C = eye(6);

% =====
% RLQ Recursivo
% =====

x0(:,1) = ones(6,1);
x1(:,1) = ones(6,1);
q11=0.101;
q22=0.0005;

Q = [q11 0 0 0 0 0;
     0 q22 0 0 0 0;
     0 0 q11 0 0 0;
     0 0 0 q22 0 0;
     0 0 0 0 q11 0;
     0 0 0 0 0 q22];

r=0.0025;

```

```

R = eye(3)*r;

P = 0.1*eye(6);
for cont = 1:9
Ai=[0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 a*x0(6,cont) 0 a*x0(4,cont);
    0 0 0 1 0 0;
    0 b*x0(6,cont) 0 0 0 b*x0(2,cont);
    0 0 0 0 0 1;
    0 c*x0(4,cont) 0 c*x0(2,cont) 0 0];

idx1 = (cont - 1) * 3 + 1;
idx2 = idx1 + 2;
temp = inv(R+B'*P*B);
Ki = temp * B'*P*Ai
M = (P-(P*B * temp * B'*P));
P = ((Ai'*M*Ai)+Q)

x0(:,cont+1) = (Ai-B*Ki) * x0(:,cont);
uOtimo(idx1:idx2) = -Ki * x0(:,cont);

[KM,P,E] = dlqr(Ai,B,Q,R);
x1(:,cont+1) = (Ai-B*KM)*x1(:,cont);
u1Otimo(idx1:idx2) = -KM*x1(:,cont);
end

% =====
% Saída no Console
% =====

disp('A lei de controle u*(k), k=0,1,...,9 para minimizar JN(u) é')
disp('Implementado')
uOtimo
disp('Usando o comando dlqr')
u1Otimo

% =====
% Gráficos
% =====

% Plotando
k = 0:9;
k1 = 0:9;
x0 = x0';
x1 = x1';

for i = 1:6
    subplot(6,1,i)
    plot(k,x0(:,i),'r*',k,x1(:,i),'go')
    ylabel(sprintf('x%d(i)', i));
    grid;
end

```