

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS  
GERAIS

Curso de Engenharia de Automação Industrial

**OTIMIZAÇÃO DA ALOCAÇÃO DE VEÍCULOS EM MINERAÇÃO  
UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR**

Willian Baunier de Melo

Araxá, MG

2014

**Willian Baunier de Melo**

**OTIMIZAÇÃO DA ALOCAÇÃO DE VEÍCULOS EM MINERAÇÃO  
UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR**

Curso de Engenharia de Automação Industrial do  
Centro Federal de Educação Tecnológica de  
Minas Gerais (CEFET-MG), campus Araxá, pelo  
aluno Willian Baunier de Melo.

Orientador (a): Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Aline Fernanda Bianco  
Co-Orientador: Geraldo Dutra Neto

Araxá, MG

2014

Dedico a todas as pessoas  
que colaboraram direta  
ou indiretamente para a  
deste trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço inicialmente a Deus por me dar a vida, minha família e esta oportunidade.

Agradeço também a meus pais, Silvia e Carlos, e ao meu irmão Gabriel, que me apoiaram e me ajudaram durante minha caminhada acadêmica.

Agradeço a minha professora e orientadora Aline por estar sempre disponível a ajudar e por me ensinar a teoria necessária para realizar esse trabalho.

Agradeço a Geraldo Dutra Neto e a todos os colaboradores da Instale TI pelo apoio e pela colaboração nesses últimos meses.

Agradeço aos meus colegas de sala e professores que foram essenciais no meu crescimento pessoal e acadêmico.

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso trata da modelagem matemática computacional aplicada ao setor de otimização de processos de sistemas de despacho de veículos na mineração. No Brasil muitas empresas de mineração ainda utilizam a alocação manual com base nas decisões do operador, que não é o ideal tendo em vista os recursos tecnológicos hoje disponíveis. Por isso o trabalho foi feito para otimizar a produção da mina tendo como principal parâmetro a alocação de caminhões. Foram realizadas alocações de caminhões no processo de carregamento e descarregamento do minério, visando melhorar a capacidade de avaliação após o estudo de casos e levantamento de dados realizados em uma mineradora. Tais resultados podem ser estendidos para outras áreas como, por exemplo, na agroindústria, no transporte de grãos na malha rodoviária ou na implementação de uma alocação nos vagões de carga que transportam grãos.

**Palavras-Chave:** Algoritmos, Programação Linear, Sistema de Despacho, Pesquisa Operacional.

## **ABSTRACT**

This work treats of completion of computational mathematical modeling applied to process optimization dispatch vehicles in mining sector systems. In Brazil many mining companies are still using manual allocation decisions based on the operator, which is not ideal given the technological resources available today. So work has been done to optimize the production of the mine with the main parameter allocation of trucks. Allocations trucks for forming a stack of ore were conducted to improve the ability to review after the case studies and survey data conducted in a mining company. These results can be extended in agribusiness in grain transportation in highway or implementation of an allocation in freight cars carrying grain.

**Keywords:** Algorithms, Linear Programming, Dispatch System, Operational Research.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Esquema organizacional para resolução de um problema de Pesquisa Operacional .....	18
FIGURA 2 - Região factível referente ao 1º quadrante .....	28
FIGURA 3 - Reta que delimita a região da restrição $X_1 + 3X_2 \leq 6$ .....	29
FIGURA 4 - Região factível delimitada pela restrição $X_1 \leq 3$ .....	29
FIGURA 5 - Região factível delimitada pela restrição $X_2 \leq 1,5$ .....	30
FIGURA 6 - Região factível definida pela intersecção das restrições .....	30
FIGURA 7 - Representação das curvas de nível na região factível .....	31
FIGURA 8 - Ciclo de carregamento e descarregamento .....	37
FIGURA 9 - Descarregamento de caminhões no britador .....	41
FIGURA 10 - Tempos de cada atividade no ciclo de transporte .....	42
FIGURA 11 - Representação esquemática das rotas dos equipamentos de transporte .....	46
FIGURA 12 - Interface de resultados do <i>software</i> LINGO .....	62

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Forma tableau Simplex genérica para uma solução inicial.....	23
QUADRO 2 - Forma tableau Simplex inicial.....	24
QUADRO 3 - Resultado obtido depois da 1 <sup>a</sup> iteração .....	26
QUADRO 4 - Resultado obtido após a 2 <sup>a</sup> iteração .....	26
QUADRO 5 - Características dos equipamentos de carga .....	40
QUADRO 6 - Teores dos minérios referentes às frentes de lavra.....	48
QUADRO 7 - Tempo de ciclo, carregamento e descarregamento dos equipamentos de transporte. ....	52
QUADRO 8 - Resultados obtidos com a otimização .....	62

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>16</b>
2.1	Pesquisa operacional .....	16
2.2	A matemática da pesquisa operacional. ....	18
<b>3</b>	<b>MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR .....</b>	<b>21</b>
3.1	Método simplex .....	21
3.2	Método gráfico .....	27
<b>4</b>	<b>CARACTERÍSTICAS DA MINA.....</b>	<b>33</b>
4.1	Características gerais de uma mina .....	33
4.1.2	Equipamento .....	35
4.1.3	Ciclo de carregamento e descarregamento da mina .....	36
4.2	Funcionamento da mina K que baseará o modelo .....	38
4.2.2	Equipamentos da mina K.....	39
4.2.3	Tempo gasto no ciclo do caminhão.....	41
<b>5</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>43</b>
5.1	Alguns modelos existentes.....	43
5.2	Desenvolvimento do modelo matemático.....	44
5.2.1	Função Objetivo.....	45
5.2.2	Restrição de qualidade .....	47
5.2.3	Restrição do ritmo de descarga do material .....	49
5.2.4	Restrição do número de caminhões por trajeto .....	51
5.2.5	Restrição do limite de produção por frente de lavra .....	53
5.2.6	Restrição de alocação de equipamentos de transporte.....	55
5.2.7	Restrição de alocamento dos equipamentos de carga .....	56

5.2.8	Restrições de não negatividade .....	57
5.3	Modelo Final .....	58
6	RESULTADOS E SIMULAÇÃO .....	60
7	CONCLUSÃO.....	64
	REFERÊNCIAS.....	65

# 1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais a nova tendência mundial é cortar gastos, através da otimização dos processos existentes para se obter o máximo de produção utilizando o mínimo de recursos, sendo que os produtos resultantes devem estar dentro dos padrões de qualidade. Com a complexidade cada vez maior das operações, tornou-se necessário alocar os recursos de forma mais racional.

Essa nova cultura organizacional mudou muitas práticas empresariais nos últimos anos. A grande revolução tecnológica tornou os processos mais dependentes de implantação de automação e desenvolvimento de novas tecnologias. Os estudos dos processos passaram a ser mais criteriosos e revisados periodicamente. Na área de mineração não foi diferente, uma vez que as empresas investiram pesado em pesquisa e inovação dentro dos seus processos industriais. Nos últimos anos, o interesse em melhorar o método de transporte de minério dentro da mina aumentou, surgindo, assim, pesquisa e investimentos para otimizar a produção.

A mineração é um ramo em constante expansão e possui um plano governamental de incentivos fiscais e crescimento definido até 2020. A alocação manual de caminhões na mina ainda é muito utilizada nesta área e pode gerar perdas não aceitáveis nos dias atuais. Com a otimização da alocação de veículos na mina, utilizando técnicas matemáticas como a Programação Linear ou heurística, a empresa poderá reduzir os gastos, garantir uma maior produção, gerar economia no seu capital podendo usar o dinheiro para realizar projetos semelhantes.

A Matemática busca leis que regem os fenômenos, processos ou sistemas, que podem ser físicos, químicos, biológicos ou econômicos, a partir de sua observação. Os modelos matemáticos são relações matemáticas estabelecidas entre variáveis que descrevem essas leis, isto é, descrevem o comportamento desses fenômenos, processos ou sistemas.

Já a modelagem matemática computacional é uma área de conhecimento que trata da aplicação de modelos matemáticos e técnicas da computação à análise, compreensão e estudo da fenomenologia de problemas complexos, encontrados em diversas áreas, tais como: engenharias, economia, ciências biológicas, ambientais e humanas.

A teoria de otimização é um campo da matemática dedicado ao desenvolvimento de métodos eficientes de determinação de máximos e mínimos de funções de uma ou mais variáveis (IZMAILOV, 2002). Nessa teoria, busca-se a melhor solução, denominada solução ótima, dentre as diversas possíveis em um problema, segundo um critério de otimalidade estabelecido previamente.

A pesquisa operacional surgiu da necessidade de alocar, de forma otimizada, suprimentos e pessoas durante a segunda guerra mundial e, a partir daí, expandiu sua atuação para diversas áreas, desde finanças, medicina até segurança pública. Ela é a ferramenta para desenvolvimento de métodos científicos para auxiliar na resolução de problemas e nas tomadas de decisão. A otimização linear, conhecida como Programação Linear, pertence à área da Pesquisa Operacional e utiliza a função objetivo como meta e as restrições lineares como delimitações dos valores viáveis.

Uma aplicação da modelagem matemática computacional encontra-se no setor de otimização de processos de sistemas de despacho de veículos. Seus diversos métodos são aplicados em variados tipos de situações, desde definir a melhor rota em um GPS no veículo comum até o aumento de produtividade de operação de uma mineradora.

Visando o maior aproveitamento dos recursos da mina, utiliza-se a Programação Linear como método matemático principal, onde as principais metas são o aumento da produção e redução dos gastos, no processo de alocação de veículos em uma

mina a céu aberto, obtendo como resultados também a redução do tempo de fila e um número menor de caminhões ociosos.

O método *simplex*, que é um dos métodos de resolução da Programação Linear, é conhecido por ser um método que dispndia baixo processamento computacional, ser relativamente simples e possuir um vasto campo de aplicações com diversos trabalhos de autores reconhecidos que conseguiram resultados satisfatórios e, muitas vezes, superou as metas propostas.

Outros métodos matemáticos de resolução destes problemas estão sendo estudados recentemente por alguns autores que aplicaram outras metodologias como, por exemplo, computação evolutiva. Porém, no estudo comparativo entre os métodos não há grandes disparidades nos resultados obtidos, sendo que todos os métodos apresentaram bons resultados.

Para desenvolver esse estudo de alocação de caminhões em minas a céu aberto foram pesquisados e coletados dados de uma mina K, posteriormente utilizou-se alguns *softwares* matemáticos para assistir na resolução do problema de Programação Linear para achar o ponto ótimo de operação da mina. Esses dados são o ponto de início para o desenvolvimento do modelo, pois, a partir deles, consegue-se analisar melhor as perdas e localizar os dados relevantes para serem utilizados no projeto.

Outro ponto importante é mostrar o bom desempenho da Programação Linear no sistema de alocação, para justificar o gasto com a possível automação desse processo, pois as tomadas de decisão dentro da indústria na atualidade, não podem acontecer sem um prévio estudo ou sem a assistência computacional que garante a melhor decisão.

O *software* LINGO será utilizado para solucionar o problema de Programação Linear e obter os resultados da otimização. Esse sistema possui uma interface

simples e já foi utilizado por diversos pesquisadores que alcançaram os valores ótimos e ajudaram na validação dos seus trabalhos.

O modelo matemático pronto servirá de base para a automação do processo. Utilizando tecnologia embarcada, as variáveis poderão ser captadas por sensores nos caminhões e transmitidas a um controlador central cujo processamento irá utilizar o modelo matemático desenvolvido para determinar o ponto ótimo de operação dos equipamentos.

Como resultado preliminar deste presente trabalho, foi apresentado um artigo (MELO ET al, 2013) em 07 de novembro de 2013, no congresso da Brasil ISA Automation 2013.

Este trabalho é estruturado basicamente em 6 capítulos. No Capítulo 2 temos as revisões bibliográficas que englobam as bases da pesquisa operacional, mostrando seus aspectos principais, um pouco da história e alguns tópicos da Programação Linear.

No capítulo 3 os métodos Simplex e gráfico serão explorados matematicamente, pois são os principais métodos de resolução da Programação Linear. No atual trabalho o método utilizado no problema da alocação foi o método Simplex.

No Capítulo 4 é mostrada, de forma geral, a organização da mina, os equipamentos utilizados, o ciclo de transporte de minério, onde é especificado o problema que ocorre na alocação dos equipamentos. Além disso, neste capítulo são mostradas algumas variáveis levantadas na mina K para formulação do modelo de otimização.

No Capítulo 5 é desenvolvido o modelo matemático associado ao problema de despacho de veículos na mineração. Cada passo da construção do modelo é demonstrado, e o modelo completo é apresentado ao final do capítulo.

No capítulo 6 o modelo é simulado através do *software* LINGO, o resultado final é apresentado assim como uma comparação dos ganhos obtidos com o uso do modelo.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A otimização no setor da mineração vem ganhando espaço no cenário acadêmico e de pesquisas comerciais devido ao alto grau de aproveitamento de recursos e diminuição de gastos que ocorre em empresas de todos os setores. A parte industrial de uma empresa mineradora era o foco principal de pesquisas e investimentos, porém recentes estudos mostraram que a otimização de recursos na mina pode melhorar significativamente as metas de desempenho da empresa. Alguns autores já desenvolveram trabalhos com resultados satisfatórios no campo de alocação de veículos em mina, e o assunto vem demandando esforços principalmente para as empresas, na procura do melhor algoritmo para otimizar sua produção.

O desenvolvimento de um algoritmo matemático precisa ser embasado em uma técnica matemática, ou seja, um modelo matemático que tratará as variáveis e revelará o ponto ótimo de operação. Este trabalho desenvolverá a otimização tendo como base a Programação Linear pertencente à Pesquisa Operacional, uma técnica já bastante difundida e com resultados notáveis obtidos em diversos trabalhos e pesquisas de otimização. Esta técnica possui alguns métodos de resolução que possuem certas peculiaridades, porém não são complexos e podem ser processados rapidamente por qualquer máquina simples.

### 2.1 Pesquisa operacional

A pesquisa operacional é um campo da matemática dedicado à otimização e surgiu para combater o desperdício de recursos. Ela apareceu em 1936, e foi desenvolvida para que o império britânico pudesse estudar como o radar eletrônico poderia ser usado para interceptar aviões militares. Porém a pesquisa operacional só conseguiu desenvolver-se na segunda guerra mundial (1939) quando os governos norte-americanos e britânicos viram sua importância na distribuição de recursos escassos, como alimentos, remédios e uniformes. Logo após o término da segunda guerra mundial a pesquisa operacional ampliou o campo de estudo e evoluiu rapidamente. Os governos americano e britânico implantaram em 1947 o projeto SCOOP

(Scientific Computation of Optimal Programs), coordenados pelo matemático Dantzig e o economista Marshall para ajudar nas decisões das operações aéreas militares. Esse estudo resultou na criação do método Simplex, um algoritmo eficaz na resolução de problemas de otimização linear.

Nos anos seguintes foram fundados vários núcleos de pesquisa, tendo como principais o ORS, sociedade inglesa de pesquisa operacional fundada em 1953 e a ORSA, sociedade americana de pesquisa operacional fundada em 1952. Em 1957 ocorreu a primeira conferência internacional de pesquisa operacional em Oxford.

A consolidação da pesquisa operacional aconteceu entre as décadas de 1950 e 1960 em decorrência da sua forte utilização tanto nos setores público quanto no privado. A maioria das aplicações concentrava-se nos setores da mineração, construção civil e militar, problemas de transporte, serviços bancários, ramo têxtil, serviço policial dentre outros.

Com o passar dos anos, a pesquisa operacional tem ganhado o reconhecimento tanto no setor industrial quanto no acadêmico. A partir da década de 1970 ela passou a ser estudada não somente em cursos de pós-graduação como também em cursos de graduação.

No Brasil, a pesquisa operacional surgiu em meados da década de 1960. O primeiro simpósio brasileiro ocorreu em 1968 no ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica). Poucos anos após esse episódio foi criado o SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa operacional), um grupo de pesquisas que está em funcionamento até hoje.

A pesquisa operacional já foi definida de várias formas e uma definição antiga é dada por Kittel (1947): “Pesquisa Operacional é o uso do método científico com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões, com relação a operações sob seu controle”. Uma definição mais atual, com os conceitos mais consolidados é: “Pesquisa Operacional é uma metodologia de estruturar processos aparentemente não estruturados por meio da construção de modelos. Utiliza um conjunto de técnicas quantitativas com o intuito de resolver os aspectos matemáticos dos modelos” (EHRlich, 1991).

## 2.2 A matemática da pesquisa operacional.

Os modelos matemáticos são utilizados para representar matematicamente sistemas reais da forma mais fiel possível, tendo por base uma sequência lógica de decisões para solucionar os problemas associados aos sistemas em questão. Para ser útil, o modelo deve retratar integralmente fielmente os principais aspectos do problema.

Dependendo do objeto do estudo podemos ter dois tipos de modelos: o abstrato ou concreto. O primeiro desses é utilizado para comprovar e descrever fenômenos físicos ou teorias matemáticas. Já os modelos concretos são explorados, por exemplo, em protótipos de carros quando estes são submetidos a testes aerodinâmicos ou de resistência. Porém os dois modelos podem ser utilizados em um problema, o abstrato pode ser usado primeiramente para estudar as alternativas do problema e o concreto para o momento de implantação ou resolução do mesmo.

Os modelos matemáticos utilizados para solucionar os problemas reais de tomada de decisão, abordam o problema de forma progressiva, tendo por base o cumprimento de algumas etapas:

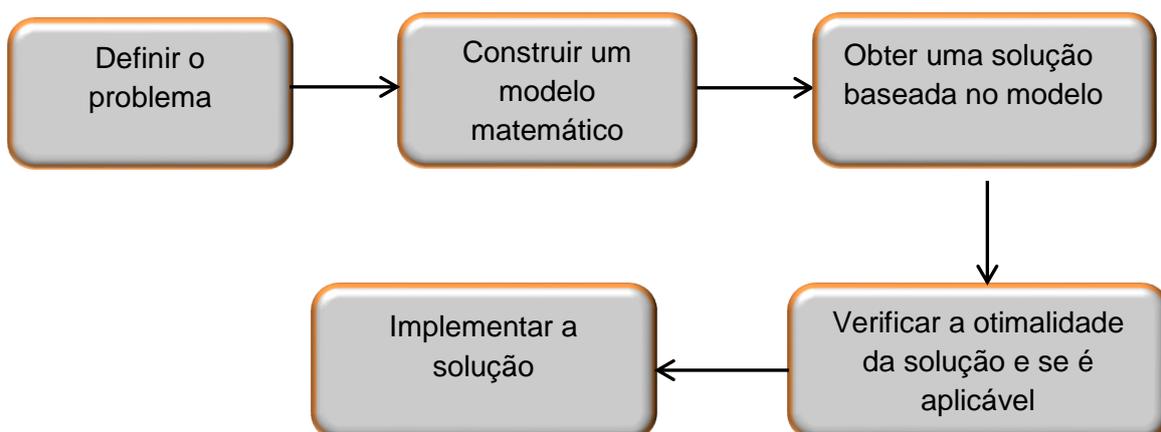


Figura 1 - Esquema organizacional para resolução de um problema de Pesquisa Operacional

Fonte: Elaborado pelo autor

A definição do problema é uma premissa básica para resolvê-lo, sendo que nesta etapa, o escopo deve ser delimitado, as variáveis básicas devem ser identificadas e os objetivos do projeto definidos.

Na construção do modelo devem-se definir as notações adequadas e variáveis utilizadas. O modelamento deve ser feito utilizando as regras principais da Programação Linear, definindo-se primeiramente a função objetivo e as funções de restrição do problema, e expressando-as expressá-las em formas de equações e inequações lineares. Em seguida, deve-se verificar o objetivo da função (maximizar ou minimizar), representando-a na função-objetivo. Depois do modelo construído, os dados devem ser introduzidos para se obter uma solução, que, posteriormente, será examinada, para se verificar a viabilidade da mesma ao problema proposto.

A Programação Linear modela os problemas utilizando uma função objetivo, que é otimizada seguindo um critério de maximização ou minimização. Além disso, devem ser utilizadas funções de restrições no problema, que seriam alguns limites de quantidades ou recursos apresentados. As variáveis que são descritas na função objetivo e nas funções de restrição são chamadas de variáveis de decisão.

Os modelos matemáticos na pesquisa operacional podem ser representados na forma padrão, (ARENALES, 2007):

$$\text{Minimizar } F(X_1, X_2, \dots, X_n) = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

*Restrições:*

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1n}X_n = b_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2n}X_n = b_2$$

⋮

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \dots + A_{mn}X_n = b_m$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Os coeficientes das restrições formam a matriz A, chamada de matriz tecnológica, as variáveis da função objetivo formam o vetor C também conhecido como vetor de

custos; e as variáveis independentes  $b$  formam o vetor chamado vetor de recursos. Na forma padrão, a função principal deve ser minimizada e as funções de restrição são formadas por variáveis não negativas e equações lineares.

Quando o problema apresenta um modelamento fora do modelo padrão devemos ajustá-lo usando alguns artifícios matemáticos. Se a função objetivo for de maximização, deve-se torná-la um problema de minimização utilizando uma premissa básica de que encontrar uma solução que maximize a função  $F(x)$  tem o mesmo efeito de encontrar uma solução que minimize a função  $-F(x)$ . Em termos matemáticos seria:  $\max F(x) = \min -F(x)$ . Porém se as restrições forem formadas por inequações, devemos inserir novas variáveis para transformar as restrições em equações lineares.

Variáveis de folga são somadas e inseridas no primeiro membro de inequações lineares quando o primeiro membro é inferior ao segundo. Já as variáveis de excesso são subtraídas e inseridas quando o primeiro membro é maior que o segundo membro. Ambas as variáveis de folga e excesso são não negativas.

### 3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

#### 3.1 Método simplex

O método simplex é a técnica mais utilizada e difundida para resolução de problemas envolvendo Programação Linear. Inicialmente, nesse método, serão utilizados problemas modelados na forma padrão descrita anteriormente. A ideia do simplex é fazer uma análise da região factível movendo-se de vértice em vértice até encontrar a solução ótima. O critério de parada consiste na falta de novos candidatos para entrarem na base que forma a solução.

Considerando um problema na forma padrão, pode-se reescrever a matriz  $A$  ( $m \times n$ ) dos coeficientes da seguinte forma  $A = [B \mid N]$ , sendo  $B$  uma base, uma submatriz quadrada ( $m \times m$ ), e  $N$  é uma submatriz formada pelas variáveis que não estão na base. As variáveis associadas a base  $B$  são chamadas variáveis básicas e as associadas a matriz  $N$  são chamadas de não- básicas.

O vetor  $C$  de custos e o vetor  $X$  também podem ser escritos em função da matriz básica e não básica:  $C = [C_B \mid C_N]$ ,  $X = \begin{bmatrix} X_B \\ - \\ X_N \end{bmatrix}$ .

A solução básica factível é a solução obtida, quando as variáveis básicas não são negativas e as variáveis não básicas são tomadas como nulas. Se a solução encontrada apresentar uma variável com valor negativo ela é apenas uma solução básica não factível.

Comumente adota-se uma solução básica factível situada em um dos vértices onde as variáveis de folga e excesso são variáveis básicas e as variáveis originais do problema são tomadas como não básicas.

No método simplex, as variáveis básicas são transformadas em variáveis não básicas, fazendo assim que a solução mude de vértice em vértice a cada iteração, até alcançar o vértice da região factível que corresponde ao valor ótimo.

Como as variáveis de tomada de decisão são tomadas inicialmente como não básicas, ao longo das iterações, essas variáveis são transformadas em variáveis básicas e, reciprocamente, as variáveis básicas são transformadas em não básicas. Para cada base é feito o teste de otimalidade para verificar se a base encontrada é ótima.

O método simplex será descrito abaixo na forma matemática. Considere o problema na forma padrão:

$$\text{MIN } Z = -C_1X_1 + -C_2X_2 + \dots + -C_nX_n$$

Sujeito a :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + \dots + a_{3n}X_n = b_3$$

⋮

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m$$

O primeiro passo é construir uma quadro inicial, colocando as variáveis de folga e excesso como variáveis básicas. Esses pontos vão referenciar um vértice da região factível, que será nossa solução inicial. Na forma tableau simplex são representados os vetores de custos, matriz dos coeficientes e o vetor dos recursos.

Base	Z	$X_1$	$X_2$	...	$X_n$	$X_{n+1}$	...	$X_{n+m}$	b
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0	...	0	$b_1$
$X_{n+1}$	0	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	1	...	0	$b_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$X_{n+m}$	0	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	0	...	1	$b_m$

Quadro 1 – Forma tableau simplex genérica para uma solução inicial

Fonte: Elaborado pelo autor

O próximo passo são as iterações que representam as passagens de vértice em vértice da região factível até encontrar a solução ótima. Para verificar a otimalidade do vértice, o vetor de custos deve ser analisado. Caso ele possua algum coeficiente negativo, a solução em questão não é ótima e deve ser feita mais uma iteração, transformando a variável que possui o coeficiente mais negativo, vide ser um problema de minimização, em uma variável básica. Caso não exista nenhuma variável com coeficiente negativo capaz de minimizar a função objetivo, a solução é ótima.

O critério de escolha da variável que sairá da base é simples e parte do princípio de que aquela que possuir a menor razão entre o valor da variável de custo e o coeficiente da variável de entrada será a variável que se transformará em não básica, uma vez que ela limita menos a sua função objetivo. Em termos matemáticos, a variável de saída é determinada por  $\min(\frac{b_i}{a_j}, x_j > 0)$ , sendo  $x_j$  a variável de entrada.

Seguindo a metodologia deve-se examinar as variáveis não básicas e verificar se há alguma que possa entrar na base, para que sejam feitas mais algumas iterações. Caso não haja, a solução em questão é ótima.

Abaixo encontra-se um exemplo de aplicação do método passo a passo. Seja:

$$\text{Maximizar } Z = X_1 + 2X_2$$

Sujeito a:

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1 - X_2 \leq 4$$

$$-X_1 + X_2 \leq 4$$

Para se utilizar o método simplex, primeiramente é necessário transformar as variáveis na forma padrão lembrando que  $\max F(x) = \min -F(x)$ . Logo, segue que:

$$\text{Minimizar } -Z = -X_1 - 2X_2$$

Sujeito a:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 6$$

$$X_1 - X_2 + X_4 = 4$$

$$-X_1 + X_2 + X_5 = 4$$

As inequações foram transformadas em equações lineares através da inserção de um conjunto de variáveis não-negativas, denominadas variáveis de folga ( $X_3, X_4, X_5$ ). Com a forma padrão já é possível colocar o nosso problema no modelo do quadro simplex:

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b
Z	1	-1	-2	0	0	0	0
$X_3$	0	1	1	1	0	0	6
$X_4$	0	1	-1	0	1	0	4
$X_5$	0	-1	1	0	0	1	4

Quadro 2 – Forma tableau Simplex inicial

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando os valores QUADRO 2 percebe-se que a matriz básica é uma matriz

quadrada  $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , e a dimensão dessa matriz é dada pelo número de

variáveis de folga. A matriz não-básica dos coeficientes é dada por  $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Observando-se os valores dos coeficientes das variáveis não básicas da 1ª linha conclui-se que a solução não é ótima. A solução será ótima e única se todos os valores dos coeficientes forem positivos. Caso apareçam valores nulos, a solução ótima não será única.

No problema deve-se retirar uma variável básica e colocar uma variável não básica em seu lugar de forma que otimize a solução final. Como  $X_2$  possui coeficiente mais negativo ele decrescerá a função objetivo mais rápido que  $X_1$ , logo essa variável deverá entrar na base. Agora deve-se determinar a variável que sairá da base, fazendo-se uma análise matemática para verificar qual variável é mais limitada, ou seja, qual pode assumir um menor número de valores:

$$X_2 + X_3 = 6 \Rightarrow X_3 = 6 - X_2 \geq 0 \Rightarrow X_2 \leq 6$$

$$X_2 - X_4 = 4 \Rightarrow X_4 = 4 + X_2 \geq 0 \Rightarrow X_2 \geq -4$$

$$X_5 + X_2 = 4 \Rightarrow X_5 = 4 - X_2 \geq 0 \Rightarrow X_2 \leq 4$$

Como  $X_2$  é maior que 0, podemos perceber que o caso mais limitado é com a variável  $X_5$ ; então é ela que deve sair da base. Logo na base teremos as variáveis  $X_3$ ,  $X_4$  e  $X_2$ .

O próximo passo será escalonar as equações lineares de modo que os valores ocupados na coluna  $X_5$  movam-se para a coluna  $X_2$ . Depois de escalonado os resultados podem ser vistos no QUADRO 3:

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b
Z	1	-3	0	0	0	2	8
$X_3$	0	2	0	1	0	-1	2
$X_4$	0	0	0	0	1	1	8
$X_2$	0	-1	1	0	0	1	4

Quadro 3 – Resultado obtido depois da 1ª iteração

Fonte: Elaborado pelo autor

A primeira iteração foi feita, porém este ainda não é o vértice ótimo, pois ainda há um coeficiente negativo na variável não-básica da 1ª linha; logo  $X_1$  deverá entrar na base e, para isso, devemos definir a variável que sairá da base:

$$2X_1 + X_3 = 2 \Rightarrow X_3 = 2 - 2X_1 \geq 0 \Rightarrow X_1 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = 4 - X_1 \geq 0 \Rightarrow X_1 \leq 4$$

$$X_4 = 8$$

De maneira análoga ao mostrado anteriormente, verifica-se que a variável que sairá da base para  $X_1$  entrar será  $X_3$ . Utilizando técnicas de escalonamento, foi estruturada novamente fornecendo o seguinte resultado:

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b
Z	1	0	0	1.5	0	0.5	11
$X_1$	0	1	0	0.5	0	-0.5	1
$X_4$	0	0	0	0	1	1	8
$X_2$	0	0	1	0.5	0	0.5	5

Quadro 4 - Resultado obtido após a 2ª iteração

Fonte: Elaborado pelo autor

As variáveis básicas agora são compostas por  $B = [ X_1, X_2, X_4 ]$ . Nessa iteração o ponto ótimo é obtido, uma vez que as variáveis não-básicas da 1ª linha, correspondente à função custo, são todas positivas. Logo, a solução ótima final do problema é:

$$X_1 = 1 \qquad Z = 11 - 1.5X_3 - 0.5X_5$$

$$X_2 = 5$$

$$X_4 = 8$$

Como as variáveis  $X_3$  e  $X_5$  estão fora da base, seus valores são tomados como nulos, e a função maximizada tem valor  $Z = 11$ . Os valores das variáveis básicas são  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 5$  e  $X_4 = 8$ . Como o critério de parada foi satisfeito, o ponto encontrado é o ótimo do problema.

### 3.2 Método gráfico

O método gráfico é um uma técnica matemática que utiliza a construção de gráficos na busca pelo ponto ótimo de um problema. A região factível e as possíveis soluções são facilmente identificadas no gráfico, porém esse método possui a limitação de otimizar problemas com apenas duas variáveis de decisão.

O primeiro passo para resolução de problemas através do método gráfico é desenhar a região factível, composta pelas interseções das retas correspondentes às restrições, e identificar qual vértice da região fornece o valor ótimo para a função objetivo.

$$\text{Maximizar } F(X_1, X_2) = X_1 + 4X_2$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 1,5$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Primeiramente, é necessário representar graficamente as retas correspondentes às restrições. As primeiras retas satisfazem as condições de não negatividade das variáveis  $X_1 \geq 0$  e  $X_2 \geq 0$ . A região obtida pela interseção destas duas condições é dada pelo primeiro quadrante do plano.

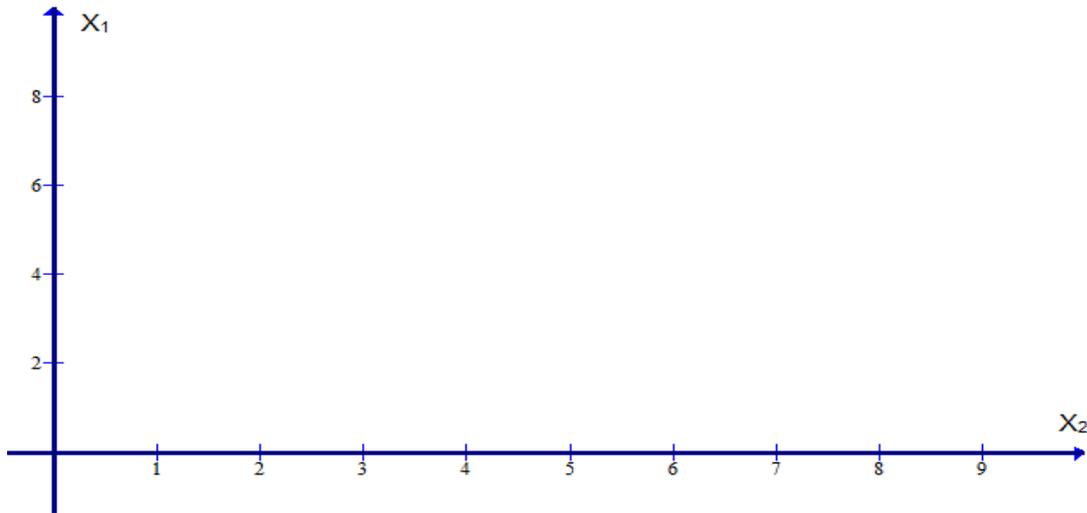


Figura 2 - Região factível referente ao 1º quadrante

Em seguida, serão representados os pontos que satisfazem todas as outras restrições lineares. A primeira restrição  $X_1 + 3X_2 \leq 6$  será representada pela reta correspondente à equação linear  $X_1 + 3X_2 = 6$ . Como uma reta pode ser bem definida conhecendo-se 2 pontos, neste problema serão considerados os pontos  $(X_1, X_2) = (0, 2)$  e  $(X_1, X_2) = (6, 0)$ . O lado que representa a região factível da restrição  $X_1 + 3X_2 \leq 6$  é aquele em que qualquer ponto escolhido respeitará a condição da restrição.

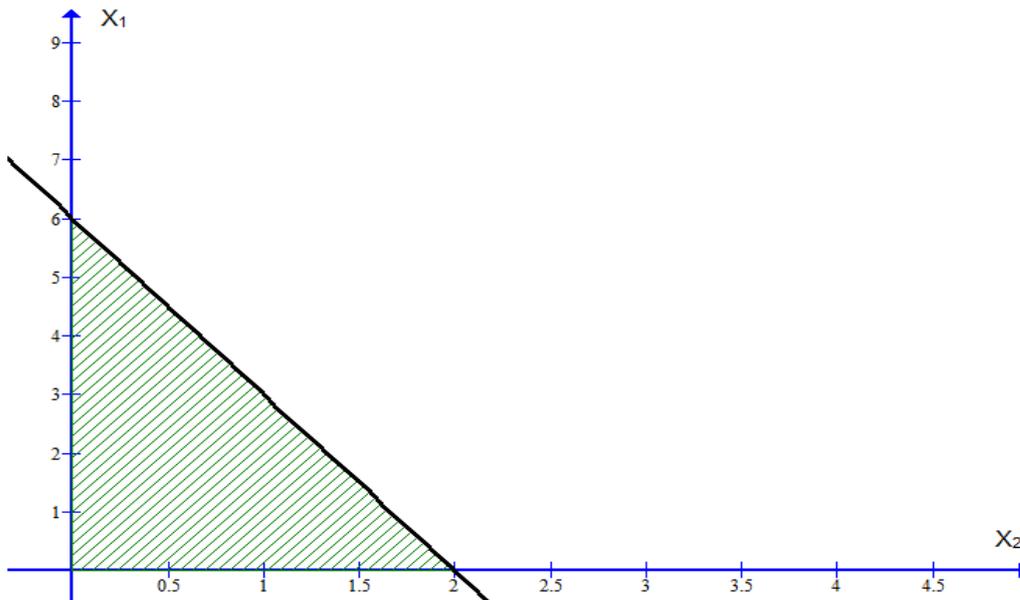


Figura 3 - Reta que delimita a região da restrição  $X_1 + 3X_2 \leq 6$

A região hachurada identifica a interseção das condições de não negatividade com região delimitada pela primeira restrição. De modo semelhante, desenham-se as regiões correspondentes às restrições  $X_1 \leq 3$  e  $X_2 \leq 1,5$ .

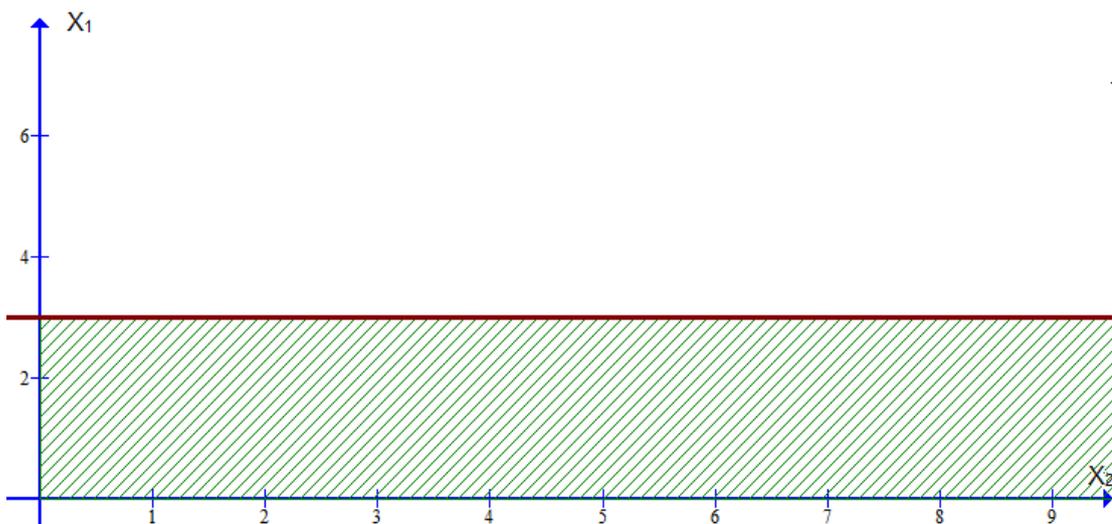


Figura 4 - Região factível delimitada pela restrição  $X_1 \leq 3$

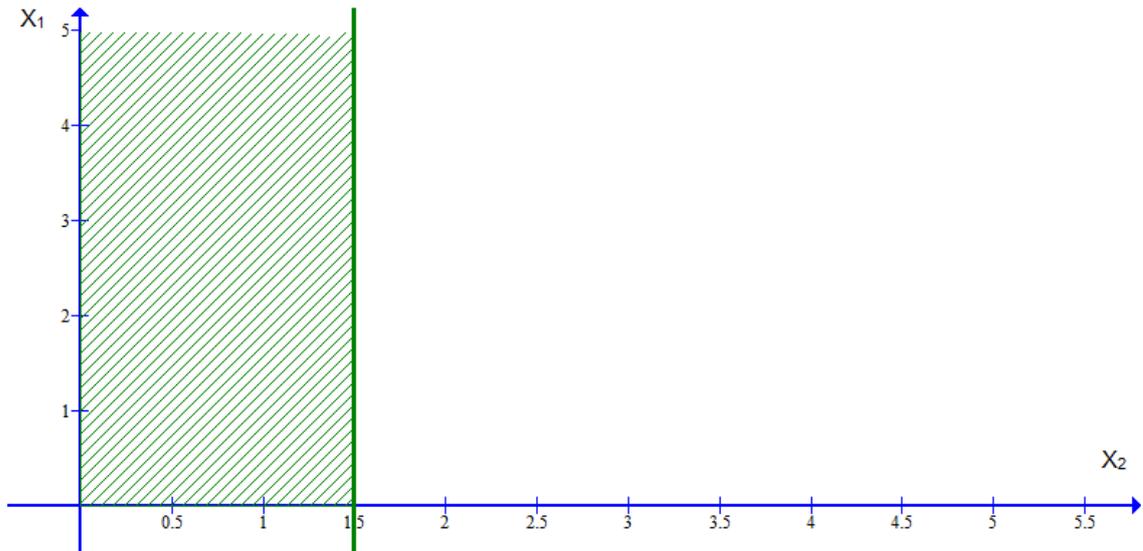


Figura 5 - Região factível delimitada pela restrição  $X_2 \leq 1,5$

Agora com todos os gráficos traçados, pode-se achar a região factível do problema que é a interseção de todas as regiões representadas nas figuras 2, 3, 4 e 5.

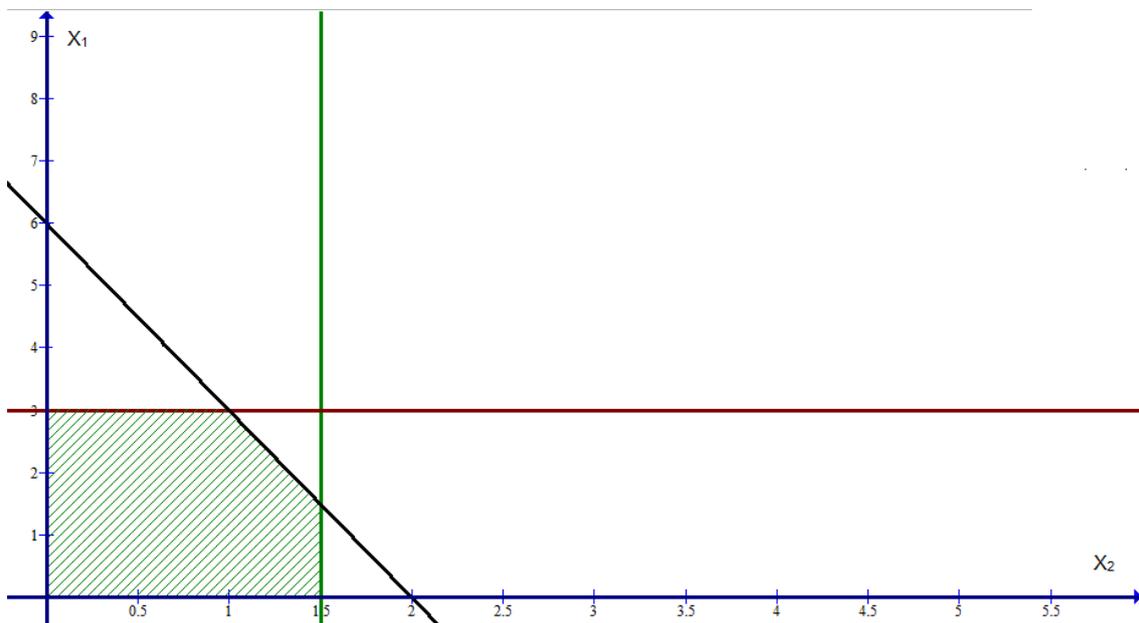


Figura 6 - Região factível definida pela intersecção das restrições

A função objetivo  $F(X_1, X_2) = X_1 + 4X_2$  pode assumir infinitos valores, conforme a posição no gráfico em que se encontra. Porém, deve-se identificar qual é o ponto da região factível que fornece maior valor dentre todos os possíveis, definido pelo

critério de otimalidade. Assim, serão utilizadas curvas de nível, que são o conjunto de pontos que atribuem mesmo valor à função objetivo, para auxiliar na resolução. Desenhando a reta correspondente à equação  $X_1 + 4X_2 = 0$ , deslocam-se as curvas de nível na direção do vetor gradiente,  $\nabla f(X_1, X_2)$ , que representa o vetor dos coeficientes e aponta no sentido de crescimento da função  $f$ . A função é deslocada até um extremo da região factível onde não há mais pontos no sentido do vetor gradiente. Este ponto ótimo é tal que as suas coordenadas  $X^* = (X_1, X_2)$  assumem valor máximo da função; sendo assim, neste problema, não existe ponto da região factível onde  $F(X^*) < F(X)$ .

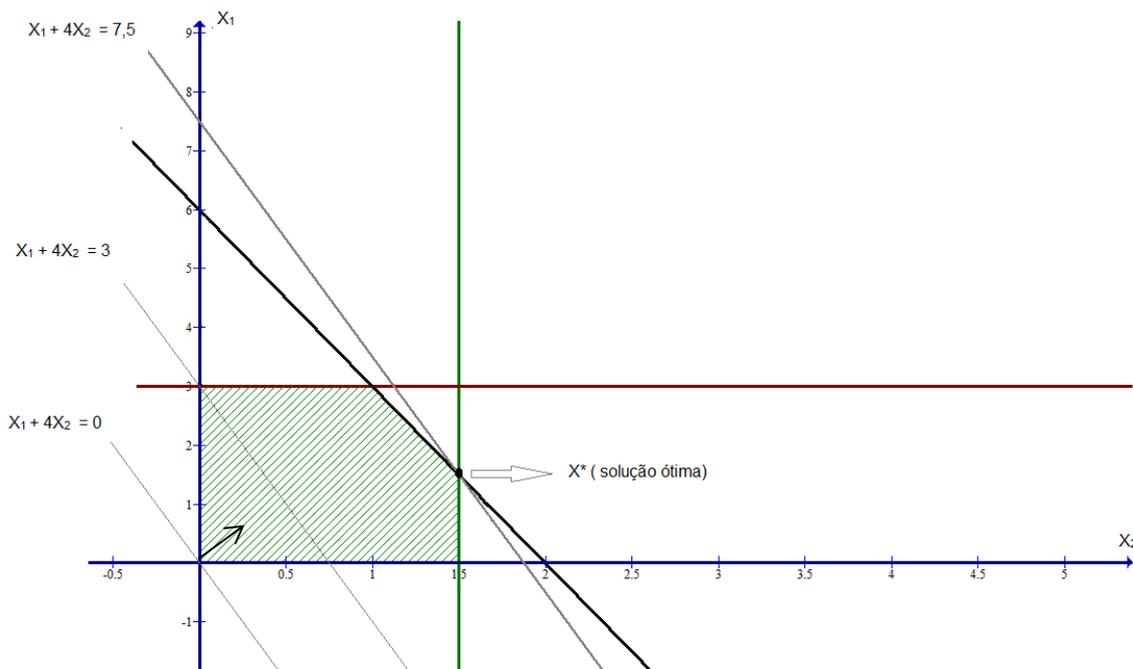


Figura 7 - Representação das curvas de nível na região factível

Na Figura 7, as representações das curvas de nível mostram o sentido do gradiente da função. Observando a primeira curva  $f'' = 0$ , percebemos que há outros pontos na curva que atribuem valores maiores que 0. Na curva de nível  $f'' = 7,5$  chegamos ao vértice  $X^* = (1,5; 1,5)$ , que é a solução ótima do problema e nenhum outro ponto da região factível atribui um valor igual ou superior a 7,5. Pela figura, nota-se também que os vértices da região factível são formados pela intersecção das retas correspondentes às restrições que delimitam região.

Segundo Arenales et al. (2007, P.61) e conforme o exemplo acima exposto, intui-se que a solução de um problema de Programação Linear, quando for única, estará em um vértice da região factível.

## **4 CARACTERÍSTICAS DA MINA**

A mineração brasileira vem exercendo um papel importante na balança comercial. Segundo o IBRAM (Instituto brasileiro de mineração) a produção mineral nacional saiu de 7,7 bilhões de dólares em 2001 para 50 bilhões de dólares em 2011, uma evolução de 550% em 10 anos.

As empresas mineradoras sentiram necessidade de otimizar recursos e buscar produzir mais sem aumentar o seus custos. Diante dessa situação os investimentos no desenvolvimento de novas tecnologias e pesquisas de otimização estão ganhando grande espaço dentro das companhias brasileiras.

Os investimentos dentro da mineração possibilitam a busca por novas tecnologias e estudos para melhorar a utilização dos recursos disponíveis. Com essa perspectiva surgiram aplicações de técnicas de otimização em minas a céu aberto, e rapidamente, elas desenvolveram-se e mostraram a sua importância no aumento da produção e redução dos custos.

As minas a céu aberto possuem características importantes que devem ser estudadas preliminarmente para que o modelo proposto realmente tenha efetividade. O conhecimento pleno de todo o processo e extração mineral e os equipamentos envolvidos trarão benefícios ao trabalho e aproximará o modelo matemático do real. Além disso, garantirá que os resultados esperados se aproximem melhor dos resultados que serão obtidos depois da implantação do modelo.

### **4.1 Características gerais de uma mina**

A lavra em mineração entende-se por operações coordenadas para o bom aproveitamento das jazidas desde a extração do minério até o beneficiamento. As características da mina determinam o método de lavra a ser escolhido, principalmente tendo por base sua viabilidade econômica. As principais etapas do processo de lavra são:

- ✓ Perfuração: A rocha que contém o minério é perfurada com diâmetro, distância e comprimento entre os furos rigorosamente calculados, além disso, um maior diâmetro do furo melhora produtividade, pois diminui a quantidade de furos e proporciona menor deslocamento de máquinas.
- ✓ Desmonte: Os furos feitos nas rochas são preenchidos com explosivos para detonação e fragmentação a rocha. Muitas empresas ainda utilizam poucos explosivos para o desmonte devido ao seu alto custo, porém, o efeito benéfico causado por um desmonte feito adequadamente aumenta a taxa de carregamento, escavação o que evita retrabalhos.
- ✓ Escavação e carga: O minério fragmentado é retirado por escavadeiras, retroescavadeiras, carregadeiras ou *moto scraps*. Para alcançar o maior rendimento do carregamento dos caminhões deve-se utilizar as escavadeiras em ambos os lados, o que é ainda pouco utilizado no Brasil.
- ✓ Transporte: O processo de transporte é responsável por levar o material da frente da lavra até as pilhas intermediárias, pilhas de estéril ou da britagem. Ressalta-se que o transporte concentra o maior custo operacional da mina. Existe a discussão de qual método seria mais produtivo, utilizar uma maior quantidade de caminhões ou aumentar a capacidade dos mesmos.

As operações da mina sendo bem executadas aumentam a produção utilizando a mesma quantidade de recursos. O conhecimento avançado dos métodos de extração e das características da mina possibilita um maior aproveitamento do minério e dos equipamentos resultando em menores gastos na produção e na manutenção dos materiais. A mina possui uma larga área operacional, sendo dividida basicamente em quatro áreas, mostradas a seguir:

- Áreas de lavra: São as próprias frentes de lavra. São os locais onde serão retirados o minério ou o estéril. Nessas áreas estão alocados os equipamentos

de carga (escavadeiras, carregadeiras), e existe uma grande circulação de caminhões para carregamento do material.

- Áreas de descarga do material: São as áreas de descarga definitiva do material. São representadas pelos britadores primários e pilhas de estéril.
- Áreas de estoque: São pilhas intermediárias que são formadas e depois retomadas. Essas pilhas são apenas pilhas de estoque e não são utilizadas para homogeneizar o minério, uma vez que as pilhas de homogeneização não fazem mais parte dessa classificação.
- Áreas de acesso: Essas áreas são caracterizadas pelo transporte de material de forma eventual e não sistemática. São estradas, acessos para transporte de material.

#### **4.1.2 Equipamento**

No processo de exploração mineral, vários tipos de máquinas são utilizados para exercer atividades que vão desde extração até o transporte do minério. O estudo prévio da necessidade da mina é necessário para se dimensionar corretamente a quantidade de equipamentos e as especificações técnicas dos mesmos. A necessidade da mina é baseada em vários fatores, segundo Pinto (1999), os principais são: escala de produção, capacidade financeira do grupo minerador e características da mina após se testarem as diversas alternativas disponíveis. Esses equipamentos são divididos em:

- Equipamentos de perfuração: São os equipamentos responsáveis pela perfuração da rocha, sendo compostos pelas perfuratrizes.
- Equipamentos de carga: Esses equipamentos retiram o material do ponto de carga e carregam os caminhões. Normalmente esse carregamento é feito

lateralmente para facilitar a operação de carregamento. Os equipamentos geralmente utilizados são as escavadeiras e as pás- carregadeiras.

- Equipamentos de transporte: São os equipamentos responsáveis por transportar o minério ou estéril do ponto de carga até o ponto de descarga. São representados pelos caminhões, que possuem diferenças quanto à capacidade de carga.
- Equipamentos de apoio: São os veículos que possibilitam o bom funcionamento dos outros equipamentos e auxiliam nas atividades diárias da mina. Os principais equipamentos de apoio são os caminhões pipa, motoniveladoras e caminhões comboio.

#### **4.1.3 Ciclo de carregamento e descarregamento da mina**

O ciclo de carregamento e transporte envolve as atividades desde a extração do material até o seu ponto de descarga. Os equipamentos envolvidos são deslocados conforme a produção da frente de lavra, que é o ponto de extração do material.

O processo começa com a extração do material e o posicionamento dos equipamentos de carga nas frentes de lavra. Os equipamentos de carga (escavadeiras) irão carregar os caminhões conforme a sua capacidade e esses caminhões irão descarregar o material num ponto de descarga (britagem, pilha de estéril, ponto de alimentação). Esse ciclo é feito continuamente até que uma frente de lavra esgote seu material. O seguinte esquema exemplifica o ciclo descrito:

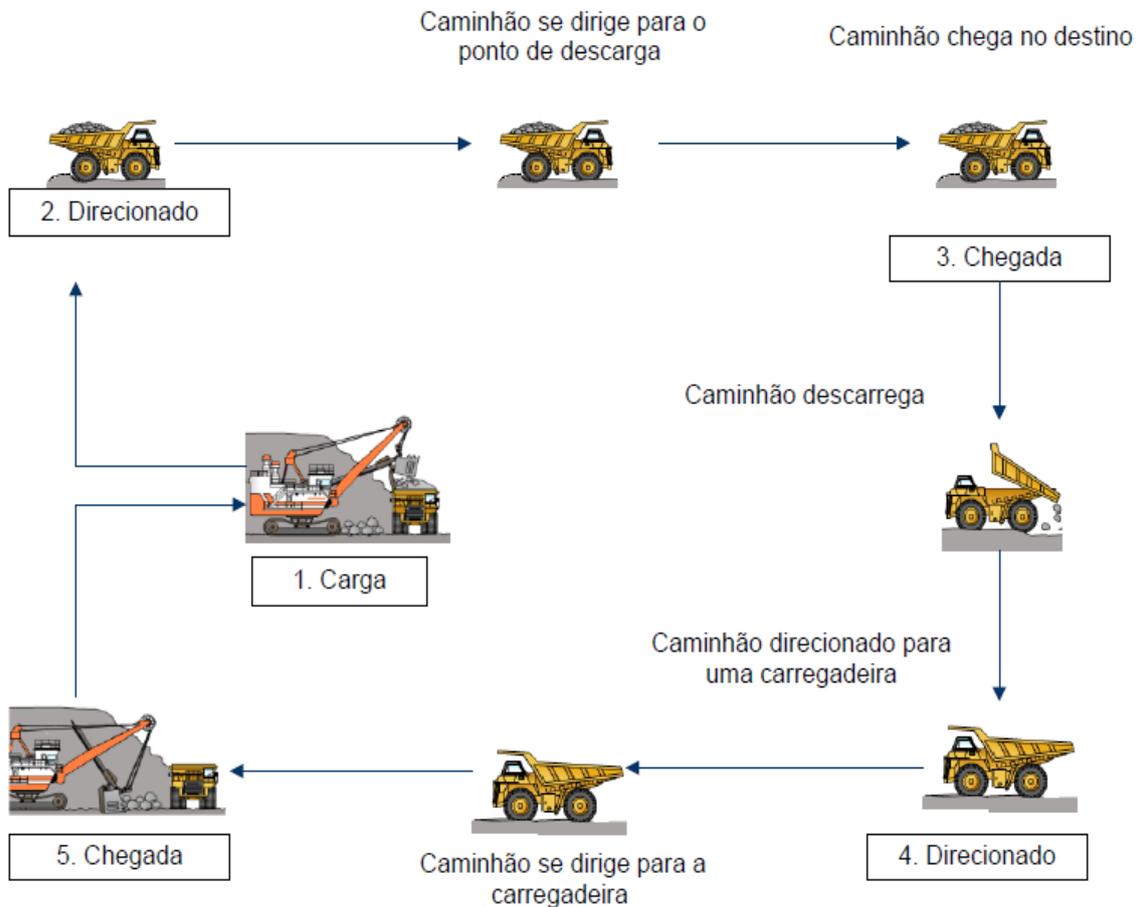


Figura 8 - Ciclo de carregamento e descarregamento

Fonte Puc Rio

No ciclo de carregamento e báscula dos caminhões, eles são alocados em diferentes rotas dependendo diretamente do método de escolha e gestão das rotas adequadas a cada um deles. Esse processo pode ser feito de modo manual, que é baseado apenas na decisão do operador, ou pode ser realizado através de um estudo e um *software* específico, que alocará os caminhões maximizando a produção, diminuindo o tempo de fila e garantindo os índices mínimos de teor do minério. A maior dificuldade na alocação dos caminhões é a redução ou eliminação do tempo perdido com as filas que se formam nos pontos de carga e de báscula, que diminuem a produção e o rendimento do serviço dos caminhões.

Essa análise da rota e alocação otimizada dos caminhões será o foco deste trabalho, analisando os dados coletados e as condições de restrição do problema de

transporte. Assim, será possível desenvolver um algoritmo capaz de otimizar o transporte do minério e evitar desperdício de tempo e recursos.

O processo atual pressupõe a alocação baseada nos instintos, o operador instrui a posição dos equipamentos de carga e transporte de acordo com suas próprias decisões baseadas no visual e nas informações via rádio. Esse tipo de tomada de decisão não está de acordo com a política de otimização de custos e recursos das empresas modernas e o modelo terá por função mostrar os ganhos existentes com a automatização da mina.

#### **4.2 Funcionamento da mina K que baseará o modelo**

A mina K na qual serão coletados os dados que servirão de base para o algoritmo matemático possui algumas características únicas. A mina é de grandes dimensões e para a simulação e desenvolvimento da otimização será considerada uma parte específica da mina. Serão consideradas quatro frentes de minério que apresentam diferentes tonelagens com equipamentos de carga alocados em cada uma. Os caminhões serão alocados com base na concentração de material de cada frente.

Cada frente possui também teores diferentes que deverão ter atenção especial no modelo para atender os níveis mínimos e máximos de qualidade de minério requeridos pela usina.

O caminhão poderá ser direcionado para o britador primário ou para um ponto de alimentação secundário. Esse ponto de alimentação secundário diminui as filas no descarregamento e diminui o deslocamento dos caminhões em pontos longe do britador.

De acordo com Alarie e Gamache (2002) o rendimento de uma frota de caminhões depende das distâncias percorridas e do seu tamanho. Caso os caminhões não sejam suficientes teremos períodos improdutivos, devido ao tempo ocioso gerado nos equipamentos de carga, mas, se, ao contrário, houver caminhões em grande

quantidade, pode gerar filas nos pontos de carga e descarga de material. Porém como o sistema é fechado e conhecido essas filas podem ser previstas e reduzidas.

Os trajetos dos caminhões serão alocados de acordo com o DMT (Distância média de transporte). O DMT pode ser parcial, a distância que o caminhão percorrerá entre o carregamento (frentes de lavra) e o descarregamento (britador, pilhas de estéril), ou por ciclo, que representa a distância total apresentada em um ciclo de Carregamento – Báscula - Carregamento. Com o DMT é possível medir o tempo médio de transporte e determinar qual a rota na qual o caminhão gastará menos tempo ou aquela em que não acumulará filas.

O processo de alocação de caminhões deverá levar em conta também as diferentes capacidades de transporte dos caminhões e o tipo de equipamento de carga que será utilizado. A descrição desses equipamentos segue na próxima seção.

#### **4.2.2 Equipamentos da mina K**

Os equipamentos utilizados nas minas diferem de uma empresa para outra dependendo da capacidade dos equipamentos, de sua marca e da quantidade que a empresa possui. Atualmente na mina K, são encontrados dois tipos de equipamentos de transporte operando. Os novos modelos são da marca Mercedes Bens modelo Actros 4844, com capacidade de 37 toneladas. Os outros caminhões utilizados eram da marca Mercedes Bens modelo Axor com capacidade de 35 toneladas, porém, por serem antigos, eles estão em processo de desativação, e serão utilizados em apenas duas rotas do modelo. As capacidades dos caminhões são cruciais no processo de alocação para determinar a produção e o tempo de carregamento. Esse tempo gasto no carregamento será utilizado para prever formação de filas, portanto devem-se saber todas as especificações dos caminhões. Além disso, existem alguns outros tempos ociosos que podem ocorrer no ciclo dos caminhões, principalmente paradas para manutenção, quando os caminhões ficam inativos por certos períodos de tempo.

Os equipamentos de carga também são igualmente importantes no processo de otimização. Esses equipamentos são representados por escavadeiras e pás carregadeiras ambas da marca Volvo. Para o modelo será considerado que cada carregadeira ou escavadeira atenderá um caminhão por vez, carregando-os lateralmente.

Algumas das principais características e parâmetros dos equipamentos de carga estão no QUADRO 5, onde são apresentadas características como tempo e capacidade de carga, dentre outros dados relevantes para o modelo.

Equipamento	Modelo	Capacidade (Concha)	Tempo de carga médio (s)
Carregadeira	Volvo L60 F	4,5 M <sup>3</sup>	130
Escavadeira	Volvo EC 460	3,6 M <sup>3</sup>	125

Quadro 5 – Características dos equipamentos de carga

Fonte: Elaborado pelo autor

Os pontos de descarga apresentam características que devem ser utilizadas no desenvolvimento do modelo, pois esses pontos caracterizam-se por apresentarem algumas limitações de descarga de material. No cenário da simulação foram considerados dois pontos de descarga:

**Britador primário:** O britador primário é o local onde o minério é descarregado e transportado, através de correias, para a usina de beneficiamento onde o minério será tratado. O britador possui capacidade de alimentação de 2100 toneladas por hora, limitando assim o número de viagens dos caminhões dependendo da sua capacidade. Por esse motivo alguns caminhões de pequeno porte poderão descarregar mais vezes que aqueles com maior capacidade devido a essa limitação de produtividade.

**Ponto de alimentação (PA):** É um ponto de alimentação secundário, utilizado principalmente para diminuir a fila formada no britador primário. Ele possui um limite de 1700 toneladas por hora em sua alimentação.



Figura 9 – Descarregamento de caminhões no britador

Fonte: ARAÚJO, 2008.

### 4.2.3 Tempo gasto no ciclo do caminhão

O tempo de ciclo do caminhão varia muito, pois as filas surgem ou desaparecem à medida que os caminhões são alocados corretamente ou incorretamente, dependendo das decisões tomadas. A formação de filas é um dos principais problemas na operação da mina, pois diminuem a produtividade e alteram o tempo de ciclo dos caminhões. Além disso, algumas paradas não programadas podem ocorrer, por consequência de quebras e mau funcionamento de equipamentos além de más condições da pista. A seguir, apresentam-se o gráfico mostrando a proporção de tempo gasto pelos caminhões na mina.

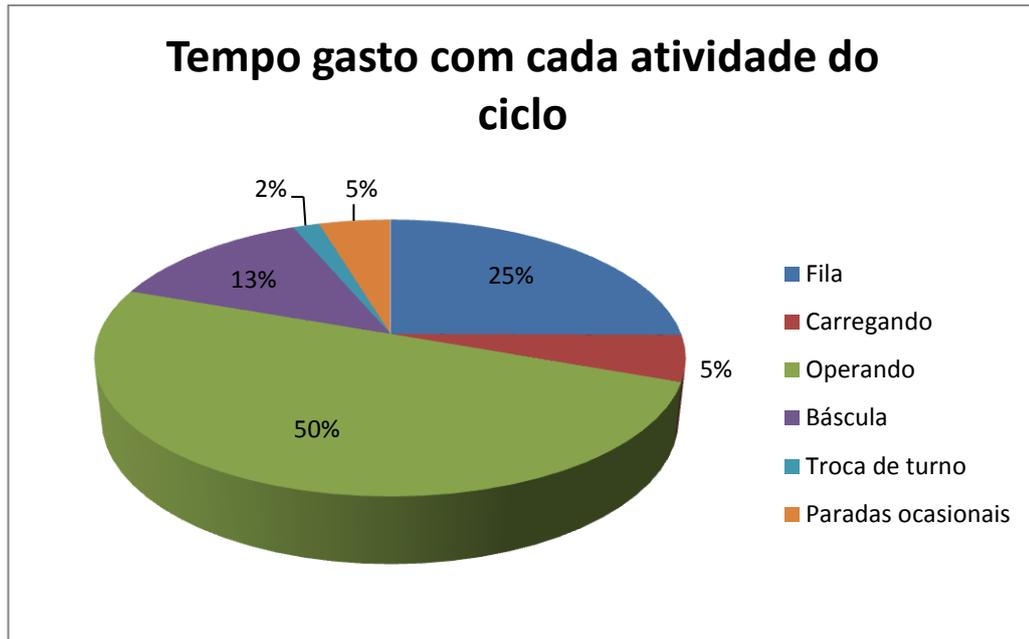


Figura 10 – Tempos de cada atividade no ciclo de transporte

Fonte: Dados coletados pela empresa

O tempo gasto com filas na mina é alto, se comparado com o ciclo total, e é maior que o tempo de balsa e carregamento juntos. Com a formulação do modelo esse tempo ocioso tende a diminuir. O aproveitamento e número de viagens dos caminhões aumentarão de forma que sejam distribuídos uniformemente entre os trajetos existentes.

Extinguindo o tempo de fila as vantagens são inúmeras, principalmente na produção, pois possibilitará um maior número de viagens para os caminhões em um mesmo período de tempo.

## 5 MODELO MATEMÁTICO

Após a coleta de dados e estudo do funcionamento da mina, será possível desenvolver um modelo matemático bem estruturado e funcional. Para fundamentar teoricamente e obter bases consistentes para formular o modelo serão apresentados alguns modelos desenvolvidos por autores que possuem uma vasta produção acadêmica na área.

### 5.1 Alguns modelos existentes

As minas a céu aberto ganharam espaço nos últimos anos e viraram alvo de vários estudos e pesquisas, sendo desenvolvidos importantes modelos matemáticos, baseados principalmente em Programação Linear. Esses trabalhos mostraram grande eficácia e se tornaram modelo para implementação em algumas minas.

White e Olson (1986) propõem um modelo baseado em Programação Linear, sendo o trabalho dividido em duas partes. Na primeira parte, realiza-se uma otimização da mistura do minério diminuindo-se os custos com qualidade e transporte de material, além de manter uma solução perto das restrições críticas de blendagem. Na segunda parte do modelo, o objetivo é otimizar o transporte na mina diminuindo o número de caminhões envolvidos. A programação dinâmica aloca os caminhões cujo trajeto demora menos tempo para ser percorrido.

Chanda e Deagdelen (1995) propõem um modelo de Programação Linear com o objetivo de maximizar os ganhos econômicos e minimizar desvios quanto à qualidade e tonelagem do minério. Os autores afirmam que essa técnica de manter a qualidade do minério é mais aproximada do real das mineradoras.

Merschmann (2002) desenvolveu um modelo em dois módulos. No primeiro destes um problema de Programação Linear é resolvido e no segundo é apresentada a simulação que permite utilizar os dados da resolução da Programação Linear como a entrada da simulação. O objetivo da simulação é otimizar o processo de

blendagem do minério proveniente de várias frentes de minério, segundo as metas de qualidades da usina, e realizando a alocação dos veículos às frentes adequadas.

Moraes et al. (2005) modela o problema da determinação da qualidade do minério com enfoque na mistura de produtos de um pátio de minério de ferro. O objetivo desse modelo é identificar as áreas do pátio de minério que devem ser primeiramente esvaziadas para reposição do material. Como o tempo de deslocamento das reformadoras é alto pilhas de estoque muito distantes não devem ser retirados em uma única operação. O modelo foi validado comparando-se os resultados obtidos com os produzidos pela empresa.

## **5.2 Desenvolvimento do modelo matemático**

O modelo matemático que será desenvolvido neste presente trabalho terá como objetivo principal aumentar a produção da mina, ou seja, maximizar o ritmo de lavra respeitando algumas restrições como, por exemplo, qualidade e alimentação máxima do ponto de descarga. O material será transportado por uma frota heterogênea de caminhões, que possuem duas capacidades de carga diferentes.

Para o desenvolvimento do modelo será utilizada uma parte específica da mina, que consiste em quatro frentes de lavra e dois pontos de descarga do material, sendo um o britador primário e o outro um ponto de alimentação secundário. São dados conhecidos do problema: a capacidade dos caminhões, a quantidade máxima de produção de cada frente, os teores de minério de cada pilha, a taxa de carregamento dos equipamentos de carga, o tempo perdido em cada processo, e a taxa de alimentação que o britador e o ponto de alimentação suportam.

A seguir será desenvolvido o modelo, descrevendo cada uma das suas características, principalmente a equação que compõe a função objetivo e as que descrevem as restrições do problema, e a partir da junção destas será estruturado o modelo final completo.

### 5.2.1 Função Objetivo

O principal objetivo do modelo, considerando características econômicas, é maximizar a produção, ou seja, aumentar o ritmo de lavra (t/h), que depende de vários outros fatores e principalmente da alocação correta dos caminhões e diminuição do tempo de filas. A seguir será equacionada a função objetivo:

$$\max \sum_{f \in F} P_f \quad \forall f \in F$$

Onde :

F : Conjunto de frentes de minério

$P_f$  : Ritmo de lavra relativo a f-ésima frente.

O principal objetivo dessa função é maximizar a produção das frentes de lavra, aumentar a produção utilizando o mínimo de recursos disponíveis, reduzindo-se também os custos do transporte e conseqüentemente otimizando o lucro da empresa. Para solucionar o problema utilizaremos o método simplex, logo devemos deixar as inequações do modelo na forma simplex padrão e o modelo será a base de entrada de dados do *software* LINGO. A base das variáveis dessa função será o trajeto utilizado pelos caminhões, e as variáveis  $X_{fi}$  representarão o número de viagens do trajeto da frente f ao ponto i. Abaixo segue uma representação esquemática dos trajetos para o caso, descrito anteriormente, de quatro frentes de lavra e dois pontos de descarregamento:

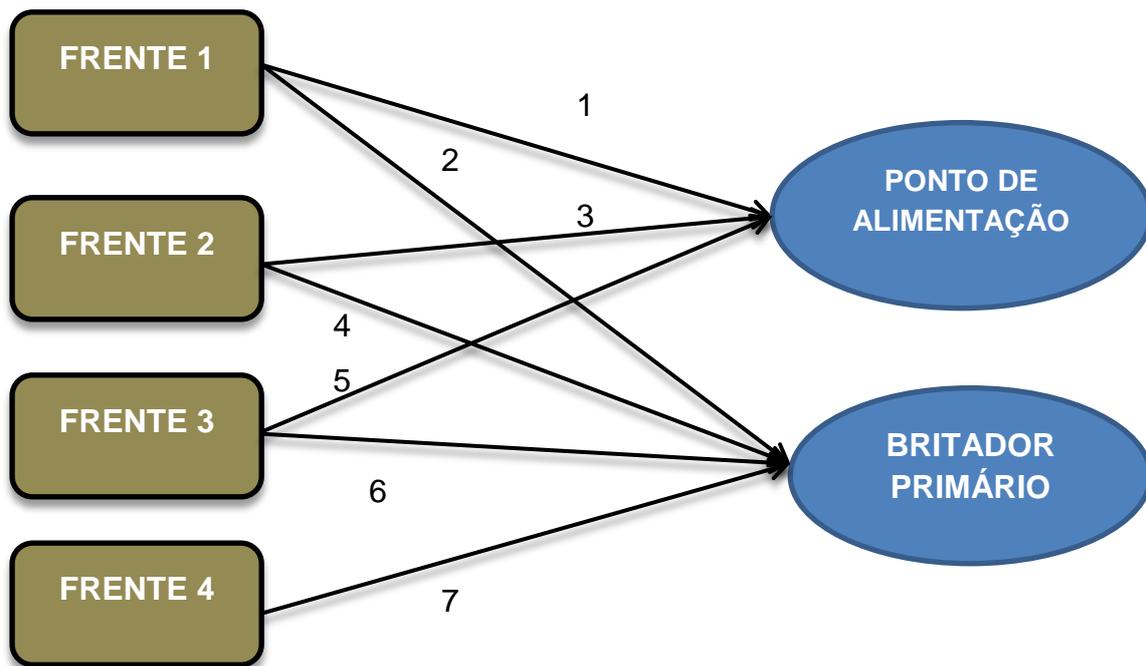


Figura 11 – Representação esquemática das rotas dos equipamentos de transporte

Fonte: Elaborado pelo autor

A rota 1 , que representa o deslocamento da frente 1 até o ponto de alimentação, equivalerá a variável  $X_{11}$  .Analogamente , Frente 1 – Britador Primário =  $X_{12}$ , Frente 2 – Ponto de Alimentação =  $X_{21}$ , Frente 2 – Britador Primário =  $X_{22}$ , Frente 3 – Ponto de Alimentação =  $X_{31}$ , Frente 3 – Britador Primário =  $X_{32}$  e Frente 4 – Britador Primário =  $X_{42}$

A partir da caracterização das variáveis, a função objetivo será dada pela soma dos produtos das multiplicações de cada rota pela capacidade de carga dos caminhões alocados as mesmas. Abaixo é mostrado a função objetivo do modelo:

$$\text{Max } 37 X_{11} + 37 X_{12} + 35X_{21} + 37 X_{22} + 37X_{31} + 35X_{32} + 37X_{42}$$

Como  $\max F(x) = \min -F(x)$ , a função objetivo será dada por:

$$\text{Min } - 37 X_{11} - 37 X_{12} - 35X_{21} - 37 X_{22} - 37X_{31} - 35X_{32} - 37X_{42}$$

Essa equação expressa a produção realizada em toneladas, sendo que o número de viagens em cada trecho possui o tipo de caminhão alocado estaticamente. A mina utiliza, em sua maioria, caminhões com capacidade de 37 toneladas sendo usados caminhões de 35 toneladas em apenas dois trechos. O ritmo de lavra será baseado no período de uma hora de produção ininterrupta, que será mostrado nas próximas restrições.

### 5.2.2 Restrição de qualidade

A restrição de qualidade expressa o limite em que é possível explorar o material de determinada pilha. Esse tipo de restrição limita diferenças grandes de viagens de determinada frente em relação às outras garantindo uma mistura do minério dentro dos limites de qualidade adequados de forma que chegue à usina de beneficiamento com o máximo de aproveitamento. Além disso, é esperado que se obtenha o máximo de homogeneidade. A restrição de qualidade pode ser vista na seguinte inequação:

$$\sum_{f \in F} V_c P_f - VM_c \sum_{f \in F} P_f \geq 0$$

Onde:

$V_c$  é o teor de minério para o trajeto C.

$P_f$  é o ritmo de lavra para a  $f$  – ésima frente.

$VM_c$  é o teor mínimo admissível

A restrição apresenta o limite inferior que o teor do minério pode assumir, ou seja, a média dos teores do minério retirado das frentes, considerando-se que estes devem ser maiores que o teor mínimo admissível para a produção. Além desta restrição de qualidade inferior, existe também a restrição de qualidade superior que limita a extração da rocha rica no minério e aumenta também a vida útil da mina. Segue a restrição:

$$VZ_c \sum_{f \in F} P_f - \sum_{f \in F} P_f V_f \geq 0$$

Onde :

$VZ_c$  é o teor máximo admissível para o minério.

$V_f$  é o teor de minério para a frente  $f$ .

A restrição limita o teor de qualidade em um valor pré-estabelecido de forma que a média aritmética dos teores de minério retirados das frentes seja menor que a produção total utilizando apenas o minério com teor máximo.

Essas duas restrições adequam o teor do minério, que chega à usina de beneficiamento, a uma faixa de valores aceitável, não comprometendo assim a qualidade do produto.

Para utilizar essas inequações no *software*, elas devem ser transformadas na forma padrão do modelo simplex. Nessa formulação é necessário conhecer os valores de teor máximo e mínimo admissíveis e os teores de cada frente de minério que serão apresentados a seguir:

Ponto de Carga	Teor do minério (%)	Teor médio máximo (%)	Teor médio mínimo (%)
Frente 1	2,18	2,7	2,3
Frente 2	2,46		
Frente 3	2,75		
Frente 4	2,36		

Quadro 6 – Teores dos minérios referentes às frentes de lavra

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir dos dados mostrados no QUADRO 6 é possível montar as restrições seguindo o modelo simplex, para isso introduziremos duas variáveis de excesso ( $X_1$ ,

$X_2$ ) nas restrições. Abaixo serão apresentadas as equações das restrições de máximo e mínimo dos teores admissíveis:

$$(2,18 - 2,3)37 X_{11} + (2,18 - 2,3)37X_{12} + (2,46 - 2,3)35X_{21} + (2,46 - 2,3)37X_{22} \\ + (2,75 - 2,3)37X_{31} + (2,75 - 2,3)35X_{32} + 2,2X_{42} - X_1 = 0$$

$$(2,7 - 2,18)37 X_{11} + (2,7 - 2,18)37X_{12} + (2,7 - 2,46)35X_{21} + (2,7 - 2,46)37X_{22} \\ + (2,7 - 2,75)37X_{31} + (2,7 - 2,75)35X_{32} + 12,58X_{42} - X_2 = 0$$

Estas restrições simplificadas resultam nas seguintes equações:

$$-4,44 X_{11} - 4,44X_{12} + 5,6X_{21} + 5,9X_{22} + 16,65X_{31} + 15,75X_{32} + 2,2X_{42} - X_1 = 0$$

$$19,24 X_{11} + 19,24X_{12} + 8,4X_{21} + 8,8X_{22} - 1,85X_{31} - 1,75X_{32} + 12,58X_{42} - X_2 = 0$$

A primeira equação determina a produção, segundo um teor de minério mínimo admissível, forçando uma equalização do número de viagens entre os caminhões. A segunda equação mostra uma limitação quanto ao limite superior do teor de minério. O conjunto delas é responsável por avaliar a qualidade do produto e viabilizar o máximo de viagens possíveis sem diminuir a qualidade do produto.

### 5.2.3 Restrição do ritmo de descarga do material

Essa restrição está relacionada com a capacidade máxima de material que o britador ou o ponto de alimentação consegue processar, ou seja, essa restrição irá, de certa forma, limitar o ritmo de extração de minério das frentes de lavra. Essa diminuição do ritmo de lavra é fundamental para que não ocorra uma sobrecarga de material sobre os pontos de descarga.

O ponto de alimentação, que nada mais é do que um ponto intermediário para levar o material via correia para o britador, possui uma capacidade menor que o britador, resultando em uma menor quantidade de material transportada até esse ponto. Segue abaixo o modelo da restrição da produção:

$$P_t - \sum_{f \in F} P_f \geq 0$$

Onde:

$P_t$  é o máximo ritmo de lavra admissível

$P_f$  é o ritmo de lavra para a f-ésima frente.

Essa restrição mostra que o ritmo de lavra de todas as frentes de lavra não podem ser maiores que o ritmo de processamento de material pelo britador primário e pelo ponto de alimentação.

Para expressar a restrição em forma padrão do modelo simplex, será utilizada a produção máxima permitida aos pontos de descarga em uma hora de operação da mina. Serão inseridas também duas variáveis de folga ( $X_3$ ,  $X_4$ ). Segundo os dados recolhidos a capacidade máxima de material descarregado no britador primário é de 2100 toneladas e no ponto de alimentação é de 1700 toneladas. As equações de restrição são apresentados abaixo:

$$37X_{11} + 35X_{21} + 37X_{31} + X_3 = 1700$$

$$37X_{12} + 37X_{22} + 35X_{32} + 37X_{42} + X_4 = 2100$$

A primeira equação limita o número de viagens que tem como destino o ponto de alimentação, diminuindo o número total de viagens dos equipamentos alocados nessas rotas. Já a segunda equação apresenta um valor máximo para produção nas

frentes, segundo o limite apresentado para o britador primário. Estes valores são referentes à produção de minério em toneladas.

#### 5.2.4 Restrição do número de caminhões por trajeto

Esta restrição irá limitar o número de caminhões por frente, ou por trajeto. A principal função dessa restrição é diminuir o tempo de fila, ou seja, não deixar que vários caminhões sejam alocados na mesma rota e aumentem as filas nos procedimentos de carga e descarga. A representação matemática pode ser dada por:

$$CP * \frac{3600}{T_c} N_{cmf} H_{il} - P_{ft} \geq 0 \quad \forall f \in F$$

Utilizando a relação  $N_{cmf} = \frac{T_{des}}{T_{carg}}$ , a equação ficará:

$$\frac{3600 * CP * T_{des}}{T_{carg} * T_c} H_{il} - P_{ft} \geq 0 \quad \forall f \in F$$

Onde:

CP é a capacidade de carga do caminhão

$T_{carg}$  é o tempo de carregamento do caminhão

$T_c$  é o tempo de ciclo

$N_{cmf}$  é o número máximo de caminhões for cada frente f

$T_{des}$  é o tempo de deslocamento total

$P_{ft}$  é a produção da frente por trajeto

$H_{il}$  é a alocação do veículo i a rota l

O tempo de carga será utilizado em segundos é 3600 se remete a produção referente a uma hora. O número máximo de caminhões para uma determinada

frente é calculada dividindo o tempo de ciclo pelo tempo de carregamento. Na segunda parte da restrição houve uma simplificação, pois foi substituído o número máximo de caminhões pela relação de tempos que eles representam. O desenvolvimento dessa restrição foi baseado no modelo de Pinto (1995).

Nesse tipo de restrição é de fundamental importância conhecer o tempo de carga, descarga, tempo de deslocamento do equipamento a ser alocado e o seu tempo de ciclo total. Esses dados irão variar de trajeto para trajeto, pois cada rota possui um DMT (Distância média de transporte) diferente das outras e cada caminhão alocado possui um tempo maior ou menor de carga dependendo da sua capacidade. Além disso, é muito importante ter o tempo de ciclo total do caminhão sem considerar as interferências, como, por exemplo, o tempo ocioso gasto nas filas. A seguir é apresentado um quadro com os tempos de ciclo, carga, descarga e deslocamento de cada rota:

Trajeto	Tempo de ciclo (Minutos)	Tempo de Carga (Segundos)	Tempo de Bâscula (Segundos)	Tempo de deslocamento (Segundos)
Rota 1 ( $X_{11}$ )	9,5	132	53	385
Rota 2 ( $X_{12}$ )	12	131	51	538
Rota 3 ( $X_{21}$ )	15	145	47	708
Rota 4 ( $X_{22}$ )	11	153	50	457
Rota 5 ( $X_{31}$ )	16	142	49	829
Rota 6 ( $X_{32}$ )	14,5	139	46	691
Rota 7 ( $X_{42}$ )	23	179	52	1171

Quadro 7 - Tempo de ciclo, carregamento e descarregamento dos equipamentos de transporte.

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a obtenção dos tempos de cada trajeto será possível o desenvolvimento da restrição seguindo o modelo simplex. Para essa restrição teremos sete equações, com sete variáveis de folga ( $X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_a, X_b$ ), cada uma relacionada à rota correspondente, limitando o número de total de caminhões, expressadas pelo limite

de viagens para as frentes. A seguir, apresentam-se as restrições na forma simplex para as sete rotas:

$$37X_{11} + X_5 = \frac{3600 \times 37 \times 385}{132 \times 570}$$

$$37X_{12} + X_6 = \frac{3600 \times 37 \times 538}{131 \times 720}$$

$$35X_{21} + X_7 = \frac{3600 \times 35 \times 708}{145 \times 900}$$

$$37X_{22} + X_8 = \frac{3600 \times 37 \times 457}{153 \times 660}$$

$$37X_{31} + X_9 = \frac{3600 \times 37 \times 829}{142 \times 960}$$

$$35X_{32} + X_a = \frac{3600 \times 35 \times 691}{139 \times 870}$$

$$37X_{42} + X_b = \frac{3600 \times 37 \times 1171}{179 \times 1380}$$

Nessas restrições a produção é usada como ferramenta para limitar o número de caminhões por frente. Cada equação depende principalmente dos tempos gastos no transporte e carga não levando em conta tempos ociosos que ocorrem por conta de quebra, condições da pista ou do operário.

### 5.2.5 Restrição do limite de produção por frente de lavra

Toda frente de lavra existente em uma mina possui um ritmo máximo de produção. Isso pode acontecer devido a alguma dificuldade operacional ou algum problema na

extração desse material. Um dos principais motivos dessa restrição é o limite do ritmo de lavra que o equipamento de carga consegue gerar. Por isso a mina possui um ritmo máximo fixado no seu planejamento. Matematicamente essa restrição é expressa da seguinte forma:

$$P_f - Ym_f \leq 0 \quad \forall f \in F$$

Onde:

$Ym_f$  é o ritmo de lavra máximo para a f-ésima frente

Cada frente possuirá um limite de produção, que será considerado como um limite para o próprio modelo desenvolvido. Essas limitações variam a partir das características de cada frente e do material que é retirado delas, além de depender do ritmo de lavra do equipamento de carga já que será alocado apenas um equipamento em cada frente. Na frente de minério 1 esse limite é de 1050 toneladas/hora, na frente 2 é de 950 toneladas/hora, na frente 3 é de 1020 toneladas/hora e na frente 4 é de 650 toneladas/hora.

Com os valores máximos de produção é possível se formular as restrições na forma padrão do modelo Simplex, inserindo quatro variáveis de folga ( $X_c$ ,  $X_d$ ,  $X_e$ ,  $X_o$ ) e utilizando os dados apresentados no parágrafo anterior formando-se as seguintes equações:

$$37X_{11} + 37X_{12} + X_c = 1050$$

$$35X_{21} + 37X_{22} + X_d = 950$$

$$37X_{31} + 35X_{32} + X_e = 1020$$

$$37X_{42} + X_o = 650$$

Essas equações representam as restrições das quatro frentes de lavra. Nestas restrições os limites de lavra são respeitados de acordo com a capacidade de produção de cada frente.

### 5.2.6 Restrição de alocação de equipamentos de transporte

Essa restrição já foi utilizada e comentada na demonstração da função objetivo, porém ela deve estar representada no modelo. A alocação do tipo de caminhão a cada rota existente será feita estaticamente, porém como a maioria dos caminhões é do mesmo modelo (Actros) e a maioria das rotas permite sua alocação, a flexibilidade de troca de rotas entre caminhões de mesmo modelo é muito grande. Cada tipo de caminhão operará em uma única frente em que o equipamento de carga seja compatível com sua capacidade. Logo os dois tipos de caminhões com cargas diferentes possuem as rotas já determinadas. Abaixo segue a expressão matemática para essa restrição:

$$\sum_{f \in F} H_{il} \leq 1 \quad \forall f \in F$$

Onde:

$H_{il}$  é a representação do caminhão  $i$  alocado a rota  $l$

Essa restrição limita a mobilidade dos caminhões entre as frentes, alocando cada modelo a frente em que é compatível. A variável  $H_{il}$  assume valor 1 se o caminhão estiver alocado corretamente à sua rota. Caso o equipamento de transporte não seja compatível à rota alocada essa variável assumirá valor 0. Assim cada tipo de caminhão estará alocado a uma determinada rota compatível com suas características.

### 5.2.7 Restrição de alocação dos equipamentos de carga

Os equipamentos de carga serão alocados em cada ponto de carregamento compatível com suas características de produção e carregamento. Neste tipo de alocação serão utilizados dois tipos de restrição, um para limitar o número de equipamentos de carga a frente de lavra correspondente, e a segunda limitando o equipamento de carga a operar em apenas uma determinada frente compatível com suas características. A seguir seguem as restrições:

$$\sum_{q \in Q} J_{qf} \leq 1 \quad \forall q \in Q$$

$$\sum_{f \in F} J_{qf} \leq 1 \quad \forall f \in F$$

Onde:

Q é o conjunto dos equipamentos de carga

$J_{qf}$  é o equipamento de carga q operando na frente f

Na primeira restrição é definido o número máximo de equipamentos de carga por frente, então, de acordo com o expressado na restrição anterior, será alocado apenas um equipamento de carga a cada frente de lavra. A segunda restrição mostra que o equipamento de carga deve ser alocado à apenas uma frente compatível com suas características. A variável  $J_{qf}$  assume valor 1 quando o equipamento de carga q é alocado corretamente a sua frente e 0 quando ele é alocado a uma frente não compatível.

Os equipamentos de carga foram alocados de modo que as carregadeiras, que possuem maior capacidade de alimentação, ficassem alocadas nas frentes um e três, e as escavadeiras ficassem alocadas nas frentes dois e quatro.

Esses tipos de restrições são verificadas no esquema inicial da mina, ou seja, devem ser levadas em conta na construção do cenário. Logo eles não são considerados no modelo padrão simplex, pois são pré-requisitos da mina.

### 5.2.8 Restrições de não negatividade

A restrição de não negatividade é muito comum em modelos baseados na Programação Linear, pois garantem que as variáveis utilizadas não assumirão valores negativos. Essa restrição é obrigatória, pois no modelo não se pode ter valores negativos para produção em uma frente, tão menos o número de viagens pode ser negativo. A seguir está a representação da restrição de não negatividade:

$$X_{fi} \geq 0$$

Onde:

$X_{fi}$  é o trajeto entre a frente  $f$  e o ponto de descarregamento  $i$ .

As restrições também são representadas no modelo de otimização na forma padrão do método simplex, com sete variáveis de excesso ( $X_g, X_h, X_k, X_l, X_m, X_n, X_p$ ) de maneira muito semelhante a anterior. Abaixo segue as equações de não negatividade:

$$X_{11} - X_g = 0$$

$$X_{12} - X_h = 0$$

$$X_{21} - X_k = 0$$

$$X_{22} - X_l = 0$$

$$X_{31} - X_m = 0$$

$$X_{32} - X_n = 0$$

$$X_{42} - X_p = 0$$

Desse modo nenhuma das variáveis assume valores negativos garantindo a aplicabilidade e realidade da otimização.

### 5.3 Modelo Final

O modelo matemático final representa a junção da função objetivo com todas as restrições acima explicitadas. As diversas restrições conjuntas formam a estrutura geral do modelo. Foram considerados vários tipos de restrições que poderiam aparecer no processo de produção diário da mina. A seguir, apresenta-se a estrutura do modelo.

Função Objetivo:

$$\max \sum_{f \in F} P_f \quad \forall f \in F$$

Restrições:

$$\sum_{f \in F} V_c P_f - VM_c \sum_{f \in F} P_f \geq 0$$

$$VZ_c \sum_{f \in F} P_f - \sum_{f \in F} P_f V_f \geq 0$$

$$P_t - \sum_{f \in F} P_f \geq 0$$

$$\frac{3600 * CP * T_{des}}{T_{carg} * T_c} - P_f \geq 0$$

$$P_f - Ym_f \leq 0$$

$$\sum_{f \in F} H_{il} \leq 1$$

$$\sum_{q \in Q} J_{qf} \leq 1$$

$$\sum_{f \in F} J_{qf} \leq 1$$

$$X_{fi} \geq 0$$

O modelo matemático final expressa a função completa para se obterem os resultados otimizados na alocação dos caminhões no processo de extração do material. A partir de dados obtidos para o modelo, os resultados serão simulados e apresentados no próximo capítulo.

.

## 6 RESULTADOS E SIMULAÇÃO

O *software* usado para resolver o algoritmo será o LINGO 12.0, utilizado por muitos matemáticos e engenheiros para resolução de problemas de Programação Linear. Como entrada de dados para o LINGO foi utilizado o problema Simplex na forma padrão. Esse *software* permite também a resolução de problemas de programação inteira mista. No problema de alocação, a maximização da produção depende do número de viagens feita em cada rota, porém o número de viagens deve ser um número inteiro caracterizando um problema de programação inteira mista, visto que não é interessante que as viagens sejam particionadas. As variáveis de decisão devem ser todas inteiras e as de folga/excesso podem assumir valores não inteiros.

As linhas abaixo fazem parte da programação necessária para solucionar o problema no LINGO, pode-se observar que as variáveis de decisão foram numeradas de um a sete ( $X_1, X_2, \dots, X_7$ ) e as variáveis de folga/excesso foram numeradas de oito a vinte nove ( $X_8, X_9, \dots, X_{29}$ ).

```
TITLE Alocação de caminhões em minas a céu aberto;
```

```
! Função Objetivo
```

```
Min -37X1 - 37X2 -35X3 -37X4 - 37X5 - 35X6 - 37X7
```

```
SUBJECT TO
```

```
! Restrições de qualidade
```

```
-4.44 X1 - 4.44X2 + 5.6X3 + 5.9X4 + 16.65X5 + 15.75X6 + 2.22X7  
- X8 = 0
```

```
19.24X1 + 19.24X2 + 8.4X3 + 8.8X4 - 1.85X5 - 1.75X6 + 12.58X7  
- X9 = 0
```

```
!Restrições de limite de alimentação
```

```
37X1 + 35X3 + 37X5 + X10 = 1700
```

```
37X2 + 37X4 + 35X6 + 37X7 + X11 = 2100
```

```
!Restrições da produção por quantidade de caminhões
```

```
X1 + X12 = 18.42
```

```
X2 + X13 = 20.53
X3 + X14 = 19.53
X4 + X15 = 16.29
X5 + X16 = 21.88
X6 + X17 = 20.57
X7 + X18 = 17
```

```
! Restrição do limite de produção por frente de lavra
```

```
37X1 + 37X2 + X19 = 1050
```

```
35X3 + 37X4 + X20 = 950
```

```
37X5 + 35X6 + X21 = 1020
```

```
37X7 + X22 = 650
```

```
! Restrição de não-negatividade
```

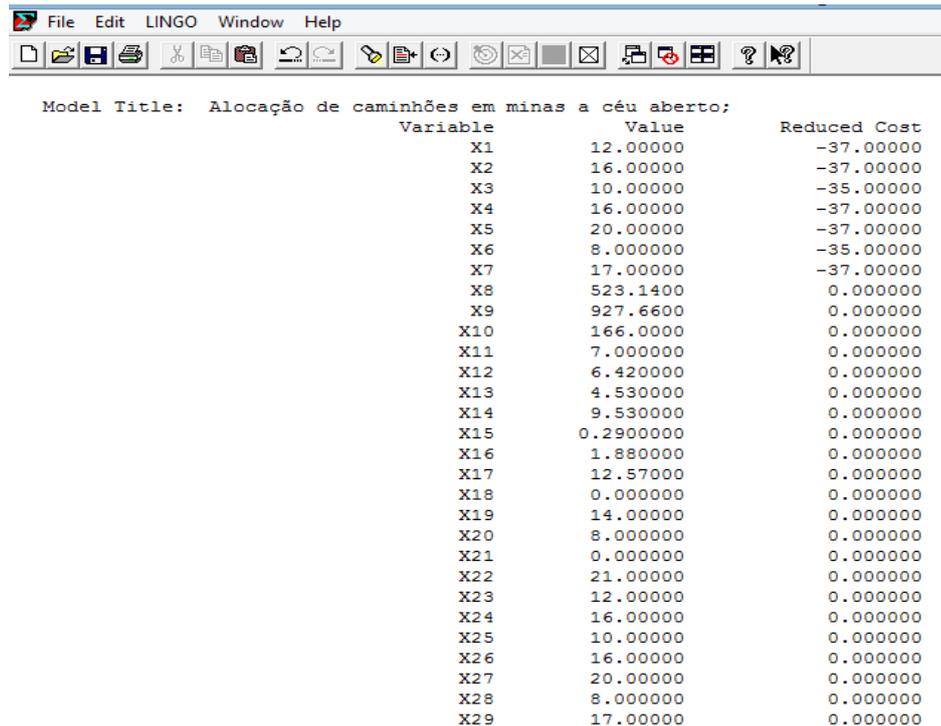
```
X1 - X23 = 0
X2 - X24 = 0
X3 - X25 = 0
X4 - X26 = 0
X5 - X27 = 0
X6 - X28 = 0
X7 - X29 = 0
```

```
End
```

```
! Variáveis de decisão inteiras
```

```
gin 7
```

O *software* realizou 42 iterações para chegar a solução ótima, ou seja, ele passou por 42 vértices da região factível para encontrar o vértice ótimo. Como já foi dito anteriormente, as variáveis de decisão assumiram apenas valores inteiros. Na FIGURA 12 é mostrada a interface de resultados gerada pelo *Software* LINGO:



Model Title: Alocação de caminhões em minas a céu aberto;

Variable	Value	Reduced Cost
X1	12.00000	-37.00000
X2	16.00000	-37.00000
X3	10.00000	-35.00000
X4	16.00000	-37.00000
X5	20.00000	-37.00000
X6	8.000000	-35.00000
X7	17.00000	-37.00000
X8	523.1400	0.000000
X9	927.6600	0.000000
X10	166.0000	0.000000
X11	7.000000	0.000000
X12	6.420000	0.000000
X13	4.530000	0.000000
X14	9.530000	0.000000
X15	0.2900000	0.000000
X16	1.880000	0.000000
X17	12.57000	0.000000
X18	0.000000	0.000000
X19	14.00000	0.000000
X20	8.000000	0.000000
X21	0.000000	0.000000
X22	21.00000	0.000000
X23	12.00000	0.000000
X24	16.00000	0.000000
X25	10.00000	0.000000
X26	16.00000	0.000000
X27	20.00000	0.000000
X28	8.000000	0.000000
X29	17.00000	0.000000

Figura 12 – Interface de resultados do *software* LINGO

O valor máximo de produção obtido foi de 3627 toneladas. Na solução duas variáveis de folga/excesso assumiram valores nulos, não entrando na solução básica, e as outras 20 assumiram valores positivos evidenciando que elas fizeram parte da solução básica factível. Como a produção foi feita com base no período de uma hora, o ritmo de lavra correspondente é de 3627 toneladas/hora. Para melhor visualizar os resultados, eles serão apresentados no quadro abaixo:

Trajeto (Variável $X_{ij}$ )	Número de viagens	Produção (t/h)
$X_{11}$	12	444
$X_{12}$	16	592
$X_{21}$	10	350
$X_{22}$	16	592
$X_{31}$	20	740
$X_{32}$	8	280
$X_{42}$	17	629
<b>Valor Otimizado</b>		<b>3627</b>

Quadro 8 – Resultados obtidos com a otimização

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir dos resultados obtidos da produção em cada rota, pode-se observar que as rotas que possuem caminhões com capacidade de 37 toneladas são mais utilizadas que rotas que utilizam os caminhões de 35 toneladas, o principal motivo é o tempo de ciclo das rotas na mina K ser relativamente elevado, compensando fazer mais viagens em rotas com caminhões com capacidade de carga mais alta.

Os resultados mostraram uma produção próxima da capacidade total do processamento de minério limitado pelos pontos de descarregamento. O ritmo de alimentação médio da mina, para esse problema, subiu cerca de 9 %, melhorando a produção do minério respeitando as metas de qualidade necessárias para o minério ser beneficiado.

## 7 CONCLUSÃO

O presente trabalho mostrou como a aplicação da otimização pode ser estendida a todos os setores da indústria, desde o processo mais simples ao mais complexo. O problema de alocação de veículos em minas a céu aberto ganhou espaço dentro da pauta das empresas mineradoras, através da busca de redução de gastos e otimização de recursos. Por esse motivo, esse tipo de estudo é altamente aplicável e traz inúmeras vantagens na empresa implementadora.

A Programação Linear foi a técnica utilizada neste trabalho, por se tratar de uma ferramenta já amplamente difundida em vários ramos de otimização, possuindo uma grande aceitação principalmente no meio acadêmico. A partir do levantamento de dados e das características da mina K foi possível aproximar o modelo de uma situação real, fazendo com que os resultados possam ser verificados na prática com a implantação de um método de despacho automático.

Também foram apresentadas as duas metodologias de resolução de Programação Linear, porém o método gráfico não foi utilizado neste presente trabalho, pois o método simplex é mais simples quando o problema envolve mais de duas variáveis de decisão. Assim, o método simplex foi escolhido e utilizado na obtenção dos resultados. Com o *software* LINGO foi possível encontrar a solução ótima quase instantaneamente devido ao baixo dispêndio de processamento exigido pelo programa.

A partir do modelo final desenvolvido será possível aplicá-lo em um sistema automatizado de alocação de caminhões que futuramente a empresa desenvolver. O desenvolvimento de um sistema de tecnologia embarcada possibilitará total controle sobre o processo, e auxiliará nas trocas de dados entre os equipamentos e entre operadores e controladores.

## REFERÊNCIAS

ALARIE, S.; GAMACHE, Michel. Overview of solution strategies used in truck dispatching systems for open pit mine. **International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment**, 2002, vol. 16, pp. 59-76.

ALEXANDRE, Rafael Frederico. **Modelagem, Simulação da Operação e Otimização Multiobjetivo Aplicada ao Problema de Despacho de Veículos em Minas a Céu Aberto**. 91 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Minas gerais, Minas Gerais. 2010.

ARAÚJO, Francisco C. Rodrigues. **Planejamento operacional de lavra com alocação dinâmica de caminhões: abordagens exata e heurística**. 2008. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral), Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais. 2008.

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BATISTA, Sangella C. Melo. **PESQUISA OPERACIONAL: uma abordagem utilizando método gráfico e método Simplex**. Dissertação de Graduação em Engenharia de Automação, CEFET-MG, Araxá. 2012.

CHANDA, E. K. C.; DAGDELEN, K. Optimal blending of mine production using goal programming and interactive graphics systems. **International Journal of Surface Mining, Reclamation and Enviroment**, vol. 9, 1995, p. 203-208.

*EHRLICH, Pierre Jacques*. **Pesquisa Operacional: curso introdutório**. 7. ed. São Paulo: Atlas. 1991.

IZMAILOV, F. Alexey; SOLODOV, Mikhail. Optimality Conditions for Irregular Inequality-Constrained Problems, **SIAM Journal on Control and Optimization**, 2002, pp 1280-1295 .

KITTEL, C. The nature and development of operations research. **Science**, 1947, pp. 105-150.

MELO, Willian B. et al. Otimização de despacho de veículos utilizando programação linear. In: **BRAZIL AUTOMATION ISA 2013**, São Paulo, 2013.

MERSCHMANN, L. H. C. **Desenvolvimento de um Sistema de Otimização e Simulação para Cenários de Produção em Minas a Céu Aberto**, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. 2002.

MORAES, E. F. et al. **Um modelo de programação matemática para otimizar a composição de lotes de minério de ferro na mina Cauê da CVRD**, Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. 2005.

PINTO, Luiz R.; COSTA, Luiz P.; SOUZA, M. Jamilson. Um modelo de programação matemática para alocação estática de caminhões visando ao atendimento de metas de produção e qualidade. **Revista Escola de Minas**. (Janeiro- Março, 1995), p. 77-81.

WHITE, J. W. e OLSON, J. P. (1986). Computer-based dispatching in mines with concurrent operating objectives. **Mining Engineering**, vol. 38, n. 11, pp. 1045–1054.