CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
CEFET-MG
Engenharia de Automação Industrial

USO DA ÁLGEBRA LINEAR E DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO DA TEORIA DE CONTROLE

Bárbara Lemos Pontes

Araxá-MG
2014

Bárbara Lemos Pontes

USO DA ÁLGEBRA LINEAR E DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO DA TEORIA DE CONTROLE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Curso de Engenharia de Automação Industrial, do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Automação Industrial.

Orientadora: Profa. Dra. Aline Fernanda Bianco
Co-orientadora: Profa. Dra. Leni Nobre de Oliveira

Araxá-MG

2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me fazer forte e perseverante o bastante para vencer mais essa etapa em minha vida.

Ao meu pai Nivaldo pela educação, pelo exemplo e pelo amor a mim depositado. À minha mãe Sabina pelo exemplo de persistência e determinação que me fez alcançar meus objetivos e pelo amor incondicional.

Às minhas irmãs Mariana e Amanda que sempre estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos.

Aos meus avós pelas orações, o amor e a dedicação que sempre estiveram presentes durante toda a minha vida.

À Aline, minha orientadora, agradeço pelo apoio, paciência e persistência. Sua contribuição foi imprescindível para o fechamento de mais essa etapa.

À todos os meus amigos e colegas de curso, que contribuíram muito para a conclusão de mais essa etapa. A todos os mestres e demais funcionários do CEFET-MG, pelo apoio e amizade durante todo o curso.

Quando você quer alguma coisa, todo o universo conspira para que você realize o seu desejo. (Paulo Coelho)

RESUMO

PONTES, B. L. **USO DA ÁLGEBRA LINEAR E DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO DA TEORIA DE CONTROLE.** Monografia. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG. Araxá. 2014.

Este projeto trata do uso das disciplinas básicas pertencentes ao eixo de Matemática no ensino da Teoria de Controle, evidenciando a importância e aplicabilidade dos conteúdos ensinados no ciclo básico do curso de engenharia. Ao entrar no curso de Engenharia e se deparar com tais disciplinas, é comum os alunos questionarem a importância e relevância do aprendizado dos tópicos abordados. Porém, no decorrer do curso, a importância desse aprendizado se evidencia, principalmente no ensino da Teoria de Controle, ênfase do curso de Engenharia de Automação Industrial do CEFET-MG, Unidade Araxá. Para a realização deste trabalho foi feita uma pesquisa teórica, onde foram detalhados os conteúdos matemáticos abordados no projeto e logo depois foram mostradas suas aplicações nas disciplinas de Controle. Com isso foi possível demonstrar a relação interdisciplinar entre as matérias do eixo básico de matemática às do ensino específico do curso.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Controle. Modelagem de Sistemas. Álgebra Linear. Cálculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

PONTES, B. L. ***USE OF LINEAR ALGEBRA AND DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS ON TEACHING CONTROL THEORY****. Monograph. Federal Center of Technological Education of Minas Gerais – CEFET-MG. Araxá. 2014*

This project approach the use of the fundamental disciplines belonging to axis in Mathematics on teaching Control Theory, highlighting the importance and applicability of the content taught in basic cycle engineering course. Applying to any engineering course and come across such disciplines, it´s common some students to question the importance and relevance on learning the topics covered. Nevertheless, in the course of the course, the importance of learning is evident, especially in the teaching of Control Theory, emphasis in Industrial Automation Engineering course of CEFET MG, Araxá branch. For the achievement of this work it was made a theoretical research, detailing the math content covered in this project and thereupon it was displayed its applications on Control engineering disciplines. Hence, it was possible to demonstrate an interdisciplinary relationship in subjects of the basic axis of Mathematics into specific teaching of this course.

KEYWORDS: *Control Theory. Systems Modeling. Linear Algebra. Differential and Integral Calculus.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO – Equação Diferencial Ordinária

EDP – Equação Diferencial Parcial

FCC – Forma Canônica Controlável

FCD – Forma Canônica Diagonal

FCO – Forma Canônica Observável

FT – Função de Transferência

LH – Linear Homogênea

LNH – Linear Não Homogênea

MIMO – M*ultiple Input, Multiple Output*

SISO – S*ingle Input, Single Output*

TIL – Transformada Inversa de Laplace

TL – Transformada de Laplace

LISTA DE SÍMBOLOS

$\sum$	Somatório
$\mathcal{L}$	Símbolo que representa a transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	Símbolo que representa a transformada inversa de Laplace
$\mathcal{C}$	Matriz de Controlabilidade
ϑ	Matriz de Observabilidade

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao entrar no curso de Engenharia e se deparar com algumas disciplinas do eixo básico de Matemática, quais sejam, Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear, é comum os alunos questionarem a importância e relevância do aprendizado dos tópicos abordados. Porém, no decorrer do curso, a importância desse aprendizado se evidencia, principalmente no ensino de Controle, ênfase do curso de Engenharia de Automação Industrial do CEFET-MG, Unidade Araxá. Assim sendo, pretende-se com esse trabalho estudar os conteúdos pertencentes às disciplinas básicas e, posteriormente, mostrar a aplicação destes nas disciplinas específicas, lecionadas a partir do quarto período.

O controle automático é essencial em qualquer campo da engenharia e da ciência sendo um componente importante e intrínseco em sistemas de veículos espaciais, sistemas robóticos, modernos sistemas de manufatura e quaisquer operações industriais que envolvam o controle de temperatura, pressão, umidade, viscosidade, vazão etc. (OGATA, 2003)

A descrição matemática do controle de processos utilizando a relação de um sinal de entrada e de saída, denominada modelo Função de Transferência (FT), tem como principal vantagem representar sistemas lineares no domínio da frequência. Para isso, utiliza-se a Transformada de Laplace (TL), ferramenta matemática pertencente à disciplina do Cálculo Diferencial e Integral, que faz com que Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no tempo sejam convertidas em uma equação simplificada que estabelece diretamente a relação entrada/saída do sistema, dada por um quociente de polinômios.

Entretanto, não é possível observar e controlar todos os fenômenos internos que envolvem o controle de processos utilizando-se apenas o modelo Função de Transferência (FT). Para isso, faz-se o uso da Teoria de Controle Moderno, baseada no modelo Espaço de Estados, que providencia uma representação no domínio do tempo através de duas equações: dinâmica e de saída, sendo a primeira destas uma

Equação Diferencial Matricial. Tal modelamento facilita a análise de Sistemas Multivariáveis (MIMO) de ordem arbitrária e passíveis de estarem sujeitos a incertezas nos parâmetros, fazendo-se necessário um Controle Robusto para garantia de um desempenho satisfatório.

A Álgebra Linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares (algébricas ou diferenciais). A mesma utiliza alguns conceitos e estruturas fundamentais da matemática como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes.

Esse ramo da matemática possui aplicações nas mais diversas áreas, como administração, economia, física, ciência da computação, ecologia, genética, engenharia, dentre outros. No ensino da Teoria de Controle Moderno a álgebra linear é utilizada no modelamento em espaço de estados; na verificação de propriedades dos sistemas como controlabilidade e observabilidade; na análise de estabilidade; no projeto de sistemas utilizando-se realimentação de estados; na solução de uma equação de Lyapunov; e em muitas outras situações, sendo de suma importância para o aprendizado de técnicas e projeto de controladores.

Já o Cálculo Diferencial e Integral é um ramo importante da Matemática, que foi desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes a partir da Álgebra e da Geometria. No ensino da Teoria de Controle, o Cálculo é utilizado na representação de um sistema dinâmico dado por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) e na obtenção do modelo Função de Transferência (FT) de um sistema através da Transformada de Laplace (TL).

A Interdisciplinaridade não possui uma única definição, embora os conceitos caminhem em uma mesma linha e são completares. Para Piaget (1972), a interdisciplinaridade aparece como "intercâmbio mútuo e integração recíproca entre várias disciplinas tendo como resultado um enriquecimento recíproco". Assim, o trabalho se propõe a corroborar a importância das disciplinas básicas no curso de Engenharia de Automação Industrial, principalmente no aprendizado da Teoria de Controle que se pauta em modelamento matemático e análises quantitativas e qualitativas posteriores aos equacionamentos obtidos dos controladores. Dessa forma, pretende-se incentivar e facilitar a interdisciplinaridade, uma vez que serão apresentadas aplicações práticas das disciplinas básicas, de forma a contribuir efetivamente para o aumento de interesse dos alunos no aprendizado dos conteúdos estudados nos dois primeiros anos do curso de Engenharia, especialmente os que compõem o eixo da Matemática que integra o chamado ciclo básico.

Como o objetivo desse trabalho é ressaltar a importância da interdisciplinaridade, os conteúdos matemáticos serão apresentados de forma simples, sem demonstrações dos resultados, como por exemplo os teoremas. Isso porque o foco teórico seria maior caso as provas fossem feitas e, definitivamente, este não é o enfoque do trabalho.

No estudo da Álgebra Linear consultou-se referências como LADEIRA (2010) e LIPSCHUTZ & LIPSON (2004). Os materiais consultados para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral mais relevantes foram FLEMMING & GONÇALVES (2007), CASSAGO JUNIOR & LADEIRA (2009) e CULLEN (2001). Ao se falar acerca da Teoria de Controle consultou-se referências clássicas como OGATA (2003), NISE (2011) e BISHOP & DORF (2001).

1.1 Estrutura do texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 serão apresentados alguns conteúdos referentes a Álgebra Linear, que posteriormente serão aplicados na Modelagem matemática de sistemas de controle e análises das propriedades dos sistemas equacionados.

No Capítulo 3 serão apresentados alguns conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral, que no decorrer do trabalho também serão aplicados na Modelagem de Sistemas de Controle.

O Capítulo 4 apresenta como se obter os Sistemas de Controle, fazendo um importante comparativo entre a Teoria de Controle Clássica e a Teoria de Controle Moderno, através da obtenção dos modelos Função de Transferência e Espaço de Estados. Este capítulo também mostra onde se utiliza os conteúdos das disciplinas de Matemática.

Finalmente, o Capítulo 5 destaca as principais contribuições desse trabalho e as considerações finais, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 ÁLGEBRA LINEAR

A Álgebra Linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais. Esta área se utiliza de alguns conceitos e estruturas fundamentais como vetores, matrizes, espaços vetoriais, transformações lineares e sistemas de equações lineares.

No ensino da Teoria de Controle Moderno, a álgebra linear é utilizada, por exemplo, no modelamento em espaço de estados, na verificação de propriedades dos sistemas, como controlabilidade e observabilidade, imprescindíveis para garantia de existência de controladores e/ou observadores, como será observado no Capítulo 4.

Além disso, fundamentos de Álgebra Linear são contemplados nos projetos de sistemas utilizando-se realimentação de estados, na solução de uma equação de Lyapunov, técnica amplamente utilizada na análise de estabilidade e em várias situações.

2.1 Matrizes

Uma matriz *A*, de ordem *m* x *n* é um arranjo de *m n* números dispostos em *m* linhas e *n* colunas, do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denota-se essa matriz por $A = (a_{ij})$. Cada número a_{ij} chama-se elemento ou entrada da matriz: *i* indica a linha e *j* a coluna onde se localiza a_{ij}. Uma matriz de *m* linhas e *n* colunas é chamada matriz *m* por *n*. O par de números *(m, n)* é chamado de tamanho, tipo ou ordem da matriz. Duas matrizes de mesma ordem são ditas iguais quando seus elementos correspondentes são iguais.

Uma matriz com m linhas e 1 coluna é chamada matriz coluna e uma matriz com 1 linha e n colunas é chamada matriz linha. Uma matriz cujos elementos são todos zero é chamada de matriz nula e é normalmente denotada por 0. Quando uma matriz possui o mesmo número de linhas e colunas, isto é, $m = n$, diz-se que a matriz é quadrada de ordem n.

Em uma matriz quadrada, os elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} constituem a diagonal principal da matriz. Uma matriz quadrada é dita matriz diagonal quando $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, todo elemento fora da diagonal principal é nulo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 é chamada de matriz identidade.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada é dita triangular superior, quando $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De modo análogo, uma matriz é dita triangular inferior, quando $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1 Adição de matrizes e multiplicação por escalar

Sejam *A* e *B* duas matrizes de mesmo tamanho, *m* x *n*. A soma de *A* e *B*, denotada por *A* + *B*, é a matriz obtida somando-se todos os elementos correspondentes de *A* e *B*. Isto é:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

O produto da matriz *A* pelo escalar *k*, denotada por *kA*, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento da matriz *A* por *k*. Isto é:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

As matrizes *A* + *B* e *kA* possuem o mesmo tamanho das matrizes *A* e *B*, ou seja, são *m* x *n*. É importante definir também:

$$-A = (-1)\,A \qquad \text{e} \qquad A - B = A + (-B)$$

A matriz –*A* é chamada de oposto da matriz *A* e a matriz *A* – *B* é chamada de diferença de *A* e *B*.

Só é possível somar matrizes de mesma dimensão. A soma de matrizes de dimensões diferentes não está definida.

2.1.1.1 Teorema

Considerando quaisquer matrizes A, B e C, de mesmo tamanho, e quaisquer escalares k e k'. Tem-se:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ → Associativa
(ii) $A + 0 = 0 + A = A$ → Elemento neutro da adição
(iii) $A + (-A) = (-A) + A = 0$
(iv) $A + B = B + A$ → Comutativa
(v) $k(A + B) = kA + kB$ → Distributiva
(vi) $(k + k')A = kA + k'A$
(vii) $(kk')A = k(k'A)$
(viii) $1 \cdot A = A$ → Elemento neutro na multiplicação por escalar

2.1.2 Multiplicação e potência de matizes

Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz m x p e $B = (b_{ij})$ uma matriz p x n, isto é, com o número de colunas de A igual ao número de linhas de B. Pode-se definir o produto de A por B, denotado por AB, como sendo a matriz $C = (c_{ij})$, tal que,

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n$$

Ou seja, o produto AB é a matriz C, de tamanho m x n, cuja entrada ij é obtida multiplicando-se a linha i de A pela coluna j de B. Isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & . & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ . & \boxed{c_{ij}} & . \\ . & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

A multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, $A \times B \neq B \times A$ e não possui inversos multiplicativos. O produto $A \times B$ não é definido quando o número de colunas de A é diferente do número de linhas de B, ou seja, quando A é uma matriz $m \times p$ e B é uma matriz $q \times n$, com $p \neq q$.

2.1.2.1 Teorema

Sejam A, B e C matrizes. Então, sempre que os produtos e somas forem definidos:

(i) $(AB)C = A(BC)$ → Associativa

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ → Distributividade à esquerda

(iii) $(B + C)A = BA + CA$ →Distributividade à direita

(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, onde k é um escalar

Seja A uma matriz quadrada, as potências de A são definidas por:

$A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$, ..., $A^{n+1} = A^nA$, ..., e $A^0 = I$

2.1.3 Matriz transposta

A transposta de uma matriz A, denotada por A^T, é a matriz obtida escrevendo-se as colunas de A, como linhas. Por exemplo, se A_{2x3}, a transposta de A, ou A^T, é uma matriz A_{3x2}.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Em outras palavras, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz m x n, então $A^T = (b_{ij})$ é a matriz n x m onde $b_{ij} = a_{ji}$.

A transposta de um vetor linha é um vetor coluna. Do mesmo modo, a transposta de um vetor coluna é um vetor linha.

2.1.3.1 Teorema

Sejam A e B matrizes e k um escalar. Então, sempre que os produtos e somas forem definidos:

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(ii) $(A^T)^T = A$
(iii) $(kA)^T = kA^T$
(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

2.1.4 Função traço

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada. Define-se o traço de A, denotado por tr(A), como sendo a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.1.4.1 Teorema

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes quadradas de ordem n e k um escalar. Então:

(i) tr($A + B$) = tr(A) + tr(B)
(ii) tr(kA) = k tr(A)
(iii) tr(A^T) = tr(A)
(iv) tr(AB) = tr(BA)

2.1.5 Matrizes invertíveis (ou não singulares)

Uma matriz quadrada A é chamada invertível ou não singular se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$, onde I é a matriz identidade. Tal matriz B é única. A matriz B é a matriz inversa de A e é denotada por A^{-1}. A relação entre uma matriz e sua inversa é simétrica, isto é, se B é a inversa de A então A é a inversa de B.

2.1.5.1 Inversa de uma matriz 2 x 2

Seja A uma matriz quadrada 2 x 2, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Segue abaixo a dedução da fórmula para encontrar a inversa de A, A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando as entradas correspondentes tem-se quatro equações que podem ser divididas em dois sistemas 2 x 2 dados a seguir:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = 1 \\ cx_1 + dy_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax_2 + by_2 = 0 \\ cx_2 + dy_2 = 1 \end{cases}$$

Seja $|A| = ad - bc$ (que é o determinante de A). Assumindo $|A| \neq 0$, resolve-se o sistema dado e encontra-se como solução única

$$x_1 = \frac{d}{|A|} \qquad y_1 = \frac{-c}{|A|} \qquad x_2 = \frac{-b}{|A|} \qquad y_2 = \frac{a}{|A|}$$

Em outras palavras, se $|A| \neq 0$, a inversa da matriz 2 x 2 pode ser obtida de A da seguinte forma:

(1) Trocar os dois elementos da diagonal principal
(2) Mudar o sinal dos outros dois elementos
(3) Multiplicar a matriz resultante por $\frac{1}{|A|}$ ou, de modo equivalente, divida cada elemento por $|A|$.

Caso o determinante da matriz A seja igual a zero, $|A| = 0$, a matriz A não é invertível. Tal conclusão pode ser estendida para matrizes quadradas de qualquer ordem.

2.1.5.2 Inversa de uma matriz *n* x *n*

Suponha que A é uma matriz quadrada qualquer n x n. Determinar sua inversa se reduz a determinar a solução de uma coleção de sistemas lineares n x n. Se A é uma matriz invertível, então utilizando das operações elementares sobre as suas linhas, pode-se chegar à matriz identidade I_n. Agora, se for efetuado esta mesma sequência de operações começando em I_n chegar-se à matriz inversa A^{-1}.

Em essência, o método consiste na formação de uma matriz de ordem nx2n de tal modo que as primeiras *n* colunas são as da matriz *A* e as últimas colunas correspondem a matriz identidade de ordem *n*. Aplicando operações elementares nas linhas desta matriz, com o objetivo de transformar as *n* primeiras colunas da matriz em uma matriz identidade de ordem *n*, consequentemente, as *n* últimas colunas da matriz originará a matriz inversa de *A*, A^{-1}. Esse método consiste em colocar junto da matriz que se deseja inverter, a matriz identidade, conforme esquematizado abaixo.

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{operações elementares}} [I \mid A^{-1}]$$

Caso não seja possível chegar à matriz identidade, a matriz não será invertível.

2.2 Determinantes

A cada matriz quadrada $A= [a_{ij}]$ de ordem *n* associa-se um escalar especial chamado de determinante de *A*, já utilizado na seção 2.1.5.1, no cálculo da inversa de uma matriz de ordem 2. O determinante pode ser denotado por det(*A*) ou |*A*|, ou ainda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Uma tabela *n x n* escalares limitada por segmentos de reta é chamada de determinante de ordem *n*; não é uma matriz, mas sim um número que representa o determinante da matriz ali limitada.

2.2.1 Determinantes de ordem 1 e 2

O determinante de uma matriz de ordem 1 $A = [a_{11}]$ é o próprio escalar a_{11}, isto é, $\det(A) = |A| = a_{11}$.

O determinante de ordem 2 é o produto dos elementos de sua diagonal principal subtraído do produto dos elementos de sua diagonal secundária, como mostrado abaixo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2.2.2 Determinantes de ordem 3

Considere uma matriz 3x3 qualquer $A = [a_{ij}]$. O determinante de A é definido por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

2.2.3 Determinantes de ordem *n* ≥ 3

Para matrizes quadradas de ordem $n \geq 3$, define-se o determinante de modo recursivo, isto é, o determinante de uma matriz de ordem n é dado em termos do determinante de uma matriz de ordem $n - 1$. Para a definição geral, é necessária a noção de cofator de um elemento. Dada uma matriz A de ordem n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para cada i, j, $1 \leq i, j \leq n$ seja A_{ij} a matriz de ordem $n - 1$ obtida retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O determinante de A_{ij} chama-se menor associado ao elemento a_{ij}. O número $(-1)^{i+j}$ det A_{ij} chama-se cofator do elemento a_{ij}.

É possível determinar o determinante da matriz A, fazendo a expansão usando qualquer linha ou coluna, isto é, para cada i fixado,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}$$

Ou, para cada j fixado,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}$$

2.2.4 Propriedades dos determinantes

1. Se A é triangular, então det A é o produto dos elementos diagonais. Assim, em particular, det $I_n = 1$;
2. Se A tem duas linhas ou duas colunas iguais, então det $A = 0$;
3. Se A possui uma linha ou uma coluna de zeros, então det $A = 0$;
4. det A^T = det A
5. det (AB) = det $A \cdot$ det B

2.3 Espaço Vetorial

Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo K se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:

(A) A cada par u, v de vetores de V corresponde um vetor $u + v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que:

(A1) $u + v = v + u$, $\forall\ u, v \in V \rightarrow$ Propriedade comutativa

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall\ u, v, w \in V \rightarrow$ Propriedade associativa

(A3) Exista um vetor em V, denominado vetor nulo e denotado por 0, tal que $0 + v = v$, $\forall\ v \in V$

(A4) A cada vetor $v \in V$ exista um vetor em V, denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$

(M) A cada par $\alpha \in K$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in V$, denominado produto por escalar de α por v de modo que:

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$ e $\forall\ v \in V \rightarrow$ Propriedade associativa

(M2) $1 \cdot v = v$, $\forall\ v \in V \rightarrow 1$ é o elemento identidade de K

Além disso, impõe-se que as operações dadas em (A) e (M) se distribuam, isto é, que valham as seguintes propriedades:

(D1) $\alpha\ (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, $\forall\ \alpha \in K$ e $\forall\ u, v \in V \rightarrow$ Propriedade distributiva à esquerda

(D2) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$ e $\forall\ v \in V \rightarrow$ Propriedade distributiva à direita

2.3.1 Observações

- Qualquer soma de vetores não necessita de parênteses e não depende da ordem das parcelas;
- O vetor 0 é único, como também o simétrico $-v$ de v é único;
- Se $u + w = v + w$ então $u = v$.

2.3.2 Teorema

(i) Para qualquer escalar $k \in K$ e para $0 \in V$, $k0 = 0$
(ii) Para $0 \in K$ e qualquer vetor $v \in V$, $0v = 0$
(iii) Se $kv = 0$ onde $k \in K$ e $v \in V$ então $k = 0$ ou $v = 0$
(iv) Para qualquer $k \in K$ e qualquer $v \in V$, $(-k)v = k(-v) = -kv$

2.4 Dependência e independência linear

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Define-se a noção de dependência e independência linear de vetores sobre K.

Os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ de V são linearmente dependentes se existem escalares $a_1, a_2, ..., a_m$ em K, não todos nulos, tais que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_mv_m = 0$$

Caso contrário, diz-se que os vetores são linearmente independentes.

A definição acima poderia ter sido feita como segue. Considere a equação vetorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_mv_m = 0$$

Onde os x_s são incógnitas e escalares. Esta equação sempre possui a solução nula $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_m = 0$. Suponha que esta é a única solução, isto é, suponha que pode-se mostrar que

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_mv_m = 0 \qquad \text{implica} \qquad x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_m = 0$$

Então os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ são linearmente independentes. Por outro lado, se a equação acima possuir solução não nula, então os vetores são linearmente dependentes.
Um conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ de vetores de V é linearmente independente ou linearmente dependente se os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ são, respectivamente, linearmente independentes ou linearmente dependentes.

Um conjunto infinito S de vetores é linearmente dependente se existirem vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ em S que são linearmente dependentes. Caso contrário, o conjunto S é linearmente independente.

2.4.1 Observações

1. Suponha que 0 é um dos vetores $v_1, v_2, ..., v_m$, por exemplo, $v_1 = 0$. Então os vetores são obrigatoriamente linearmente dependentes, uma vez que a combinação linear abaixo possui o coeficiente de $v_1 \neq 0$

$$1v_1 + 0v_2 + ... + 0v_m = 1 \cdot 0 + 0 + ... + 0 = 0$$

2. Suponha que v é um vetor não nulo. Então v, sozinho, é linearmente independente, pois

$$Kv = 0, \qquad v \neq 0 \qquad \text{implica} \qquad k = 0$$

3. Suponha que dois dos vetores em $v_1, v_2, ..., v_m$ são iguais ou um é múltiplo do outro, por exemplo, $v_1 = kv_2$. Então os vetores são obrigatoriamente linearmente dependentes, uma vez que a combinação linear abaixo possui o coeficiente de $v_1 \neq 0$.

$$v_1 - kv_2 + 0v_3 + ... + 0v_m = 0$$

4. Dois vetores v_1 e v_2 são linearmente dependentes se e só se um deles é múltiplo do outro.

5. Se o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é linearmente independente, então qualquer reordenação de seus elementos é ainda linearmente independente.
6. Se um conjunto S de vetores é linearmente independente, então qualquer subconjunto de S é linearmente independente. Da mesma forma, se um subconjunto de S é linearmente dependente, então S é linearmente dependente.

2.5 Base

Abaixo segue duas definições equivalentes de base de um espaço vetorial V.

i. O conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ forma uma base de V se ele possui as duas propriedades seguintes:

- S é linearmente independente;
- S gera V.

ii. O conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ forma uma base de V se todo $v \in V$ pode ser escrito, de forma única, como uma combinação linear dos vetores da base.

2.5.1 Teorema

Seja V um espaço vetorial tal que uma base possui m elementos e outra base possui n elementos. Então $m = n$.

Diz-se que um espaço vetorial V possui dimensão finita n ou é n-dimensional, denotado por dim $V = n$, se V possui uma base com n elementos. O teorema acima diz que todas as bases de V possuem a mesma quantidade de elementos, logo o conceito de dimensão é bem definido.

Define-se que o espaço vetorial {0} possui dimensão 0.

Suponha que um espaço vetorial V não possui uma base finita. Então V é uma dimensão infinita ou infinito-dimensional.

O teorema acima é uma consequência do lema de substituição descrito a seguir.

2.5.2 Lema de substituição

Suponha que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ geram V e suponha que $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é linearmente independente. Então $m \leq n$ e V é gerado por um conjunto da forma

$$\{w_1, w_2, \cdots, w_m, v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{n-m}}\}$$

Assim, em particular, $n + 1$ ou mais vetores de V são linearmente dependentes.

2.6 Posto de uma matriz

Seja A uma matriz qualquer do tipo m x n sobre um corpo K. As linhas de A podem ser consideradas vetores em K^n e que o espaço das linhas de A é o subespaço de K^n gerados pelas linhas de A. Tem-se a seguinte definição.

O posto da matriz A é igual à quantidade máxima de linhas linearmente independentes de A ou, de mesma forma, é a dimensão do espaço das linhas de A.

Por outro lado, as colunas de uma matriz A do tipo m x n podem ser consideradas como vetores de K^m e o espaço das colunas de A é o subespaço de K^m gerados pelas colunas de A. Embora m não deva ser igual a n, isto é, as linhas e as colunas de A podem pertencer a espaços vetoriais diferentes, segue o importante resultado:

2.6.1 Teorema

A quantidade máxima de linhas linearmente independentes de qualquer matriz A é igual à quantidade máxima de colunas linearmente independentes de A. Assim, a dimensão do espaço das linhas de A é igual a dimensão do espaço das colunas de A.

Dessa forma, pode-se mudar a definição de posto de A dada acima utilizando as colunas ao invés das linhas.

2.7 Diagonalização – Autovalores e autovetores

Para desenvolver a ideia de diagonalização será analisado dois pontos de vista.

2.7.1 Ponto de vista matricial

Suponha uma dada matriz quadrada A de ordem n. A matriz A é chamada diagonalizável se existe uma matriz não singular P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

É diagonal.

2.7.2 Ponto de vista de operadores lineares

Suponha um dado operador linear T: $V \rightarrow V$. O operador linear T é chamado de diagonalizável se existe uma base S de V tal que a representação matricial de T na base S é uma matriz diagonal D.

2.7.3 Equivalência dos dois pontos de vista

Os dois conceitos acima são, em essência, o mesmo conceito. Especificamente, uma matriz quadrada A pode ser vista como o operador linear F definido por:

$$F(X) = AX$$

Onde X é um vetor coluna e $B = P^{-1}AP$ representa F em um novo sistema de coordenadas (base) S cujos elementos são as colunas de P. Por outro lado, qualquer operador linear T pode ser representado por uma matriz A em relação a alguma base e, se uma outra base é escolhida, T é representado pela matriz

$$B = P^{-1}AP$$

Onde P é a matriz de mudança de base.

2.7.4 Polinômios de matrizes

Considere um polinômio $f(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$ sobre um corpo K. Como A é uma matriz quadrada qualquer define-se

$$f(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 I$$

Onde I é a matriz identidade. Em particular, diz-se que A é uma raiz de $f(t)$ se $f(A)=0$, a matriz nula.

2.7.4.1 Teorema

Sejam f e g polinômios quaisquer. Para qualquer matriz quadrada A e qualquer escalar k tem-se:

(i) $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$
(ii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$
(iii) $(kf)(A) = kf(A)$
(iv) $f(A)g(A) = g(A)f(A)$

2.7.5 Polinômio característico

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. A matriz $M = A - tI_n$, onde I_n é a identidade de ordem n e t é uma incógnita, pode ser obtida subtraindo t de cada elemento da diagonal de A. O oposto de M é a matriz $tI_n - A$ e seu determinante

$$\Delta(t) = \det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n)$$

Que é um polinômio de grau n em t, chamado de polinômio característico de A.

2.7.5.1 Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz A é raiz de seu polinômio característico.

2.7.5.2 Teorema

Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

2.7.6 Autovalores e autovetores

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então A pode ser representada por (ou é semelhante a) uma matriz diagonal D = diag ($k_1, k_2, ..., k_n$) se e só se existe uma base S de vetores (coluna) $u_1, u_2, ..., u_n$ tal que:

$$
\begin{aligned}
Au_1 &= k_1u_1 \\
Au_2 &= k_2u_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
Au_n &= k_nu_n
\end{aligned}
$$

Neste caso, fala-se que A é diagonalizável. Além disso, $D = P^{-1}AP$, onde P é uma matriz não singular cujas colunas são, respectivamente, os vetores da base $u_1,u_2,...,u_n$.

Seja A uma matriz quadrada. Um escalar λ é chamado de autovalor de A se existe um vetor (coluna) $v \neq 0$ (não nulo) tal que

$$Av = \lambda v$$

Qualquer vetor satisfazendo esta relação é chamado de autovetor de A pertencente ao autovalor λ.

Qualquer múltiplo escalar kv de um autovetor v pertencente a λ é também um autovetor, pois

$$A(kv) = k(Av) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$$

Os termos valor característico e vetor característico (ou valor próprio e vetor próprio) são também usados no lugar de autovalor e autovetor.

2.7.6.1 Teorema

Uma matriz quadrada de ordem n é semelhante a uma matriz diagonal D se e só se A possui n autovetores linearmente independentes. Nesse caso, os elementos diagonais de D são os autovalores correspondentes e $D = P^{-1}AP$ onde P é uma matriz cujas colunas são autovetores.

3 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo importante da Matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes. Ele é usado em todos os ramos das ciências e compõe em média quatro disciplinas dos cursos de engenharia. Especialmente no curso de Engenharia de Automação Industrial do CEFET-MG/Araxá são vistos quatro cálculos nos dois primeiros anos de curso.

Assim sendo, nesse capítulo serão apresentados os seguintes conteúdos: Limite; Derivada; Integral; Equações Diferenciais Ordinárias (EDO(s)); Transformada de Laplace (TL); Transformada Inversa de Laplace (TIL); e Expansão em frações parciais; ferramentas essas muito importantes para o Ensino da Teoria de Controle. Isso porque, no ensino desta específica teoria, o Cálculo é utilizado, por exemplo, na representação de um sistema dinâmico dado por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) e na obtenção do modelo Função de Transferência (FT) de um sistema através da Transformada de Laplace (TL).

3.1 Limite

Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto no próprio a. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L, e é escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - a| < \delta$.

Ou seja, diz-se que uma função $f(x)$ tem limite L quando x tende para a, se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tome-se valores de x, $x \neq a$ suficientemente próximos de a.

3.1.1 Unicidade do limite

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

3.1.2 Propriedades

Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

(i) $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$;

(ii) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$;

(iv) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$;

(v) $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, para qualquer inteiro positivo n;

(vi) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou se $\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ e n um inteiro positivo ímpar;

(vii) $\lim_{x \to a} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \to a} f(x)]$ se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$;

(viii) $\lim_{x \to a} \cos[f(x)] = \cos[\lim_{x \to a} f(x)]$;

(ix) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}[f(x)] = \operatorname{sen}[\lim_{x \to a} f(x)]$;

(x) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$.

3.2 Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ é uma função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{se esse limite existir.}$$

Diz-se que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

3.2.1 Regras de derivação

(i) **Derivada de uma constante:** Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

(ii) **Regra da potência:** Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x)=n \cdot x^{n-1}$.

(iii) **Derivada do produto de uma constante por uma função:** Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.

(iv) **Derivada de uma soma:** Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(v) **Derivada de um produto:** Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

(vi) **Derivada de um quociente:** Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) / g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

(vii) **Regra da cadeia:** Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas $y'(u)$ e $u'(x)$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por $y'(x)=g'(u)\cdot f'(x)$.

3.3 Integral

3.3.1 Integral indefinida

Uma função $F(x)$ é chamada primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I, se, para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

3.3.1.1 Proposições

(i) Seja $F(x)$ uma primitiva de uma função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

(ii) Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I.

(iii) Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I, então existe uma constante c tal que $G(x) – F(x) = c$, para todo $x \in I$.

3.3.1.2 Definição

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

3.3.2 Integral definida

Seja *f* uma função definida no intervalo [*a, b*] e seja *P* uma partição qualquer de [*a,b*]. A integral definida de *f* de *a* até *b*, denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

É dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

Desde que o limite do segundo membro exista.

3.3.2.1 Teorema

Se *f* é contínua sobre [*a, b*], então *f* é integrável em [*a, b*].

3.3.3 Teorema fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

3.3.4 Integral imprópria

Na definição de integral definida, considerou-se a função integranda contínua num intervalo fechado e limitado. Agora, estende-se esta definição para os seguintes casos:

(i) Se *f* é contínua para todo $x \geq a$, definimos:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Se este limite existir.

(ii) Se *f* é contínua para todo $x \leq b$, definimos:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Se este limite existir.

(iii) Se *f* é contínua para todo *x*, definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx$$

Se ambos os limites existirem.

Para os itens (i) e (ii), tem-se que, se o limite existir, a integral imprópria é dita convergente. Em caso contrário, ela é dita divergente. No caso do item (iii), se ambos os limites existirem, a integral imprópria é dita convergente. Se pelo menos um dos limites não existir, ela é dita divergente. No item 3.5 será vista uma importante aplicação das integrais impróprias, que é a definição da Transformada de Laplace (TL), fundamental na representação de sistemas de controle no domínio da frequência, denominada Modelo Função de Transferência (FT).

3.4 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO(s))

Uma equação diferencial é uma equação que contém as derivadas e diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.

As equações diferenciais podem ser classificas segundo o tipo, a ordem e a linearidade. Uma equação diferencial na qual a função incógnita depende apenas de uma variável é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO), caso a função incógnita dependa de mais de uma variável, a equação é denominada Equação Diferencial Parcial (EDP). A ordem de uma equação diferencial é definida como a ordem da mais alta derivada na equação. Chama-se uma equação diferencial de linear quando ela pode ser escrita da seguinte forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0xy = g(x).$$

Analisando a equação acima observa-se que a variável dependente *y* e suas derivadas são de primeiro grau e que cada coeficiente depende apenas da variável independente *x*. Uma equação que não se enquadre na descrita acima é chama de não-linear.

A solução de uma equação diferencial é qualquer função *f* definida em algum intervalo *I*, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade.

Quando uma EDO de *n*-ésina ordem é resolvida encontra-se uma família de soluções a *n*-parâmetros. Uma solução particular é qualquer solução, não dependente de parâmetros, que satisfaça a equação diferencial. Uma solução singular é qualquer solução que não pode ser obtida da família de soluções a *n*-parâmetros através de escolha de parâmetros. Quando uma família de soluções a *n*-parâmetros fornece todas as soluções para uma equação diferencial em algum intervalo, ela é chamada de solução geral ou completa.

3.4.1 Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação da forma

$$\dot{y} + a(t)y = b(t),$$

Em que *a*(*t*) e *b*(*t*) são funções contínuas num intervalo *I*.

Nesta seção será utilizada uma condensação na notação, utilizando-se y para a função y(t).

O PVI

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Possui solução única, pois as funções $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ e $\frac{df}{dy}(t, y) = -a(t)$ são contínuas em *t* e em *y*.

Como uma solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem não é imediata, pode-se simplifica-la ainda mais, colocando b(t) = 0, obtendo

$$\dot{y} + a(t)y = 0$$

Que é chamada equação diferencial linear homogênea (LH) associada a

$$\dot{y} + a(t)y = b(t).$$

Esta última é chamada de equação diferencial linear não homogênea (LNH).

A equação diferencial LH pode ser resolvida dividindo ambos os membros da equação por *y*, obtendo

$$\frac{\dot{y}}{y} = -a(t).$$

Como $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{d}{dt}(\ln|y(t)|)$, tem-se

$$\frac{d}{dt}(\ln|y(t)|) = -a(t).$$

Integrando ambos os lados, obtém-se

$$\ln|y(t)| = -\int a(t)\,dt + c_1,$$

Em que c_1 é uma constante de integração. Tomando exponenciais de ambos os membros, encontra-se

$$|y(t)| = \exp\left(-\int a(t)\,dt + c_1\right).$$

Logo,

$$y(t) = ce^{-\int a(t)\,dt}.$$

Observa-se que $y(t)$ encontrado na equação acima é uma solução da LH, e qualquer solução da LH será desta forma para algum $c \in R$. Neste caso, a equação acima é a solução geral da equação diferencial LH.

Considere agora a equação não homogênea

$$\dot{y} + a(t)y = b(t),$$

Para resolver a equação acima é necessário encontrar uma função $\mu(t)$, contínua e diferenciável tal que multiplicando-se ambos os membros da expressão acima por $\mu(t)$ obtém-se a equação equivalente

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t)$$

De modo que o primeiro membro $\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y$ seja a derivada de alguma expressão simples.

Observa-se que

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)\dot{y} + \dot{\mu}(t)y.$$

Portanto,

$$\mu(t)\dot{y} + a(t)\mu(t)y = \frac{d}{dt}(\mu(t)y) \leftrightarrow \dot{\mu}(t) = a(t)\mu(t) \leftrightarrow \dot{\mu}(t) - a(t)\mu(t) = 0 \leftrightarrow \mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

Logo, para esta $\mu(t)$ a equação não homogênea pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)b(t)$$

Por integração, obtém-se

$$\mu(t)y = \int \mu(t)b(t)\, dt + c$$

Ou

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)b(t)\, dt + c\right] = e^{-\int a(t)\, dt}\left[c + \int e^{\int a(t)\, dt}\, b(t)\, dt\right].$$

Portanto,

$$y(t) = c\, e^{-\int a(t)\, dt} + e^{-\int a(t)\, dt} \int e^{\int a(t)\, dt}\, b(t)\, dt$$

É a solução geral da equação não homogênea.

É importante ressaltar que a primeira parcela da fórmula obtida acima é a solução geral da homogênea associada e que

$$y_p(t) = e^{-\int a(t)\, dt} \int e^{\int a(t)\, dt}\, b(t)\, dt$$

É uma solução particular da equação não homogênea (obtida quando *c* = 0). Logo, a solução geral da LNH é a soma geral da LH, denominada y_h, associada a uma particular da LNH, chamada de y_p.

A função $\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}$ é chamada fator integrante para a equação não homogênea.

Outro método empregado para resolver uma equação LNH é o chamado método da variação dos parâmetros, que consiste em supor que a solução *y(t)* é dada por uma multiplicação de funções *u* = *u(t) e v* = *v(t)*, ou seja,

$$y = uv$$

Que implica

$$\dot{y} = u\dot{v} + \dot{u}v.$$

Logo, a equação LNH, $\dot{y} + a(t)y = b(t),$ se torna

$$u\dot{v} + \dot{u}v + a(t)uv = b(t),$$

Ou seja,

$$u\,(\dot{v} + a(t)v) + \left(\dot{u}v - b(t)\right) = 0.$$

Se cada termo for nulo, então esta equação será satisfeita. Portanto, fazendo

$$\dot{v} + a(t)v = 0 \quad \text{e} \quad \dot{u}v - b(t) = 0$$

E resolvendo a primeira delas, obterá *v* em função de *t* (não se acrescenta a constante de integração porque se deseja um simples valor de *v*). Em seguida, substituindo este valor na segunda equação e integrando, o valor de *u* será obtido (agora acrescenta-se a constante de integração pois deseja-se que *y*=*uv* seja a solução geral do problema).

3.5 Transformada de Laplace (TL)

A TL foi desenvolvida pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). Ela apresenta uma representação de sinais no domínio da frequência em função de uma variável *s* que é um complexo, $s = \sigma + j\omega$.

Seja *f(t)* definida para todo $t \geq 0$, sua TL é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Define-se:

f(t) = uma função de tempo em que *f(t)* = 0 para todo $t < 0$
s = uma variável complexa
$\mathcal{L}$ = um símbolo operacional que indica que a grandeza que ele antecede vai ser transformada por meio da integral de Laplace
F(s) = TL de *f(t)*

O domínio de *F(s)* é constituído por todos os valores de *s*, tais que a integral convirja.

3.5.1 Propriedades da TL

1. Sejam $\mathcal{L}$ [*f(t)*] = *F(s)* e $\mathcal{L}$ [*g(t)*] = *G(s)*, e considere *a* e *b* constantes:

$$\mathcal{L}\,[a\, f(t) + b\, g(t)] = a\, F(s) + b\, G(s)$$

2. $\mathcal{L}\,[e^{at} f(t)] = F(s - a)$, com $\mathcal{L}$ [*f(t)*] = *F(s)* e *a* constante.

3. Se $\mathcal{L}$ [*f(t)*] = *F(s)*, então:

$$(-1)\, F^{(x)}(s) = \mathcal{L}\,[t^n f(t)]$$

4. Transformada da derivada: sendo $\mathcal{L}\,[y(t)] = Y(s)$, temos:

$$\mathcal{L}\,[y^n(t)] = s^n\,Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)$$

3.6 Transformada Inversa de Laplace (TIL)

O processo inverso de determinação da função de tempo *f(t)* a partir da TL *F(s)* é chamada de TIL e a notação utilizada para designá-la é $\mathcal{L}^{-1}$. Ela pode ser obtida a partir de *F(s)*, com o auxílio da seguinte integral de inversão:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds,$$

Para $t > 0$, onde *c*, a abscissa de convergência, é uma constante real e escolhida com valor superior à parte real de todos os pontos singulares de *F(s)*. Assim, o caminho de integração é paralelo ao eixo $j\omega$ e é deslocado do eixo de um valor de *c*. Esse caminho de integração fica à direita de todos os pontos singulares.

Entretanto, a integral de inversão é complexa e, devido a isso, sua utilização é raramente utilizada. Um método adequado para a obtenção das TIL é a utilização da tabela de TL. Nesse caso, a TL deve estar de maneira imediatamente reconhecível na tabela. Porém, com determinada frequência, a função desejada não aparece disponível nas tabelas de TL. Se a transformada de uma *F(s)* específica não puder ser encontrada em uma tabela, pode-se expandi-la em frações parciais e escrever *F(s)* em termos de funções simples de *s* para as quais as TIL já são conhecidas.

Esses métodos mais simples para a obtenção da TIL têm como base o fato de que a relação de correspondência biunívoca entre uma função de tempo e sua TIL é mantida para qualquer função de tempo contínua.

3.7 Método de expansão em frações parciais

O método de expansão em frações parciais consiste em, dado o quociente $\frac{B(s)}{A(s)}$, sendo *B* e *A* polinômios e o grau de *B* menor que o grau de *A*, transformar o quociente em uma soma de frações. Caso o grau de *B* não seja menor que o grau de *A*, o numerador *B(s)* deve ser dividido pelo denominador *A(s)* para resultar um polinômio em *s* mais um resto (uma relação de polinômios em *s* cujo numerador é menor que o denominador).

Se *F(s)* for subdividido em partes,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

E se as TIL de $F_1(s)$, $F_2(s)$,..., $F_n(s)$ estiverem disponíveis de imediato, então

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + ... + L^{-1}[F_n(s)]$$

$$= f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)$$

Onde $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ são as TIL de $F_1(s)$,$F_2(s)$,...,$F_n(s)$, respectivamente. A TIL *f(s)* assim obtida é única, exceto, possivelmente, nos pontos em que a função de tempo for descontínua. Sempre que a função de tempo for contínua, a função de tempo *f(t)* e sua TL *F(s)* terão correspondência biunívoca.

Na aplicação da técnica de expansão em frações parciais para a obtenção da TIL, as raízes do polinômio do denominador devem ser obtidas previamente. Portanto, este método não se aplica enquanto o polinômio do denominador não estiver devidamente fatorado.

3.7.1 Expansão em frações parciais quando *F(s)* envolve somente polos[1] distintos

Considere *F(s)* escrito na forma fatorada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+\ z_1)(s+\ z_2)\cdots(s+\ z_m)}{(s+\ p_1)(s+\ p_2)\cdots(s+\ p_n)},$$

Para $m < n$, onde p_1, p_2, ..., p_n e z_1, z_2,..., z_m podem ser quantidades reais ou complexas, e para cada complexo p_i ou z_i existe o correspondente complexo conjugado.

Se *F(s)* possuir somente polos distintos ela poderá ser expandida em uma soma de frações parciais simples, conforme segue:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+\ p_1} + \frac{a_2}{s+\ p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+\ p_n},$$

Onde a_k (k = 1, 2, ..., n) são constantes. O coeficiente a_k é chamado de resíduo do polo em $s = -p_k$. O valor de a_k pode ser encontrado ao multiplicar ambos os lados da equação acima por ($s + p_k$) e ao fazer $s = -p_k$, que resulta em:

$$\left[(s+\ p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=\,-p_k}$$
$$= \left[\frac{a_1}{s+\ p_1}(s+\ p_k) + \frac{a_2}{s+\ p_2}(s+\ p_k) + \cdots + \frac{a_k}{s+\ p_k}(s+\ p_k) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{a_n}{s+\ p_n}(s+\ p_k)\right]_{s\,=\,-p_k} = a_k$$

Todos os termos expandidos são eliminados, com exceção de a_k. Assim, o resíduo a_k é determinado por:

[1] No item 4.1 do Capítulo 4 será apresentada a definição de polos e zeros de uma função de transferência.

$$a_k = \left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

Como

$$L^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

f(t) é obtida como:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t},$$

Para $t \geq 0$.

3.7.1.1 Exemplo

Dada a função abaixo, com polos distintos:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)}$$

Para obter a TIL, primeiramente aplica-se o método da expansão em frações parciais.

A função acima pode ser reescrita como

$$\frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{a_1}{(s+3)} + \frac{a_2}{(s+2)}$$

O resíduo a_1 pode ser encontrado da seguinte forma:

$$a_1 = \left[(s + 3)\frac{1}{(s+3)(s+2)}\right]_{s=-3} = \frac{1}{-3+2} = \frac{1}{-1} = -1$$

De maneira análoga, encontra-se o valor de a_2:

$$a_2 = \left[(s+ 2)\frac{1}{(s+3)(s+2)}\right]_{s=-2} = \frac{1}{-2+3} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, *Y(s)* pode ser reescrito como:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{-1}{(s+3)} + \frac{1}{(s+2)}$$

Agora, aplicando-se a TIL na função acima, obtém-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(s+3)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = y(t) = -e^{-3t} + e^{-2t}$$

3.7.2 Expansão em frações parciais quando *F(s)* inclui polos múltiplos

Diferente do que acontece no caso de polos distintos, em que cada polo tem apenas um termo elementar, um polo com multiplicidade *r* tem *r* termos elementares.

Considere *A(s)* escrito na forma fatorada

$$A(s) = (s - p_1)^{r_1}(s - p_2)^{r_2}(s - p_3),$$

A decomposição em frações parciais é dada por:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{1,r_1}}{(s+p_1)^{r_1}} + \frac{b_{1,r_1-1}}{(s+p_1)^{r_1-1}} + \cdots + \frac{b_{1,1}}{(s+p_1)} + \frac{b_{2,r_2}}{(s+p_2)^{r_2}}$$
$$+ \frac{b_{2,r_2-1}}{(s+p_2)^{r_2-1}} + \cdots + \frac{b_{2,1}}{(s+p_2)} + \frac{b_3}{(s+p_3)}$$

O valor de b_{i,r_k-l} é obtido da seguinte forma:

$$b_{i,r_k-l} = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{ds^l}\left[(s+\ p_k)^{r_k}\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=\ -p_i}$$

3.7.2.1 Exemplo

Dada a função abaixo, com polos de multiplicidade 3:

$$Y(s) = \frac{(s+1)}{s(s-2)^3}$$

Para obter a TIL, primeiramente aplica-se o método da expansão em frações parciais. A função acima pode ser reescrita como:

$$\frac{(s+1)}{s(s-2)^3} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{(s-2)} + \frac{a_3}{(s-2)^2} + \frac{a_4}{(s-2)^3}$$

Os resíduos a_1 e a_4 podem ser calculados diretamente:

$$a_1 = \left[s\frac{(s+1)}{s(s-2)^3}\right]_{s=\ 0} = \frac{(0+1)}{(0-2)^3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$$

$$a_4 = \left[(s-2)^3\frac{(s+1)}{s(s-2)^3}\right]_{s=\ 2} = \frac{(2+1)}{2} = \frac{3}{2}$$

Os resíduos a_2 e a_3 são obtidos do seguinte modo:

$$a_3 = \frac{d}{ds}\left[(s-2)^3\frac{(s+1)}{s(s-2)^3}\right]_{s=\ 2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{(s+1)}{s}\right]_{s=\ 2} = \left[\frac{-1}{s^2}\right]_{s=\ 2} = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$$

$$2a_2 = \frac{d^2}{ds^2}\left[(s-2)^3\frac{(s+1)}{s(s-2)^3}\right]_{s=\ 2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{-1}{s^2}\right]_{s=\ 2} = \left[\frac{2}{s^3}\right]_{s=\ 2} = \frac{2}{2^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Como $2a_2 = \frac{1}{4}$, então $a_2 = \frac{1}{8}$.

Logo, *Y(s)* pode ser reescrito como:

$$Y(s) = \frac{(s+1)}{s(s-2)^3} = \frac{\frac{-1}{8}}{s} + \frac{\frac{1}{8}}{(s-2)} - \frac{\frac{1}{4}}{(s-2)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(s-2)^3}$$

Agora, aplicando-se a TIL na função acima, obtém-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{-1}{8}}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{8}}{(s-2)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{(s-2)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}}{(s-2)^3}\right)$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = y(t) = -\frac{1}{8}e^{t} + \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{3}{4}t^2e^{2t}$$

4 MODELAGEM DE SISTEMAS DE CONTROLE

Como foi explicado na introdução desse trabalho, a interdisciplinaridade segundo Piaget (1972) aparece como sendo intercâmbio mútuo e integração recíproca entre várias disciplinas tendo como resultado um enriquecimento considerável para ambas as partes. Dessa forma, esse capítulo visa apresentar os conceitos relacionados a Teoria de Controle demonstrando a relação e a integração das disciplinas do eixo básico da Matemática (Álgebra e Cálculo) com o ensino da mesma.

Ao tratar de Teoria de Controle, inicialmente é necessário discorrer suscintamente sobre sistemas dinâmicos que são aqueles cujo o valor da saída em um determinado instante de tempo depende de valores passados e presentes da entrada. O modelo matemático de um sistema dinâmico é um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema. Esse modelo pode ser representado de diferentes formas, dependendo da perspectiva a ser considerada.

A dinâmica de muitos sistemas é descrita em termos de equações diferenciais ordinárias (EDO(s))[2], que são obtidas através das leis físicas que regem um determinado sistema. As EDO(s) podem ser reescritas através dos modelos Função de Transferência (FT) e Espaço de Estados, este último pertencente à chamada Teoria de Controle Moderno. Dependendo do sistema considerado e de circunstâncias particulares, um modelo matemático pode ser mais adequado do que o outro. Por exemplo, para os casos em que os sistemas possuem incertezas nos modelos ou são multivariáveis, faz-se necessária a representação em Espaço de Estados. Já, quando análises gráficas são eficazes ou quando o sistema possui apenas uma entrada e uma saída, a representação entrada/saída dada pela Função de Transferência (FT) é mais adequada, além de ser mais simples.

Para obter um modelo matemático simplificado segundo Ogata (2003, p.45)

[2] O item 3.4 do capítulo 3 refere-se às equações diferenciais ordinárias.

> Na obtenção de um modelo matemático devemos estabelecer uma conciliação entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados da análise. Na obtenção de um modelo matemático relativamente simplificado, com frequência, torna-se necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao sistema. Em particular, se for desejável um modelo matemático linear de parâmetros concentrados (isto é, se quisermos empregar equações diferenciais ordinárias), é sempre necessário ignorar certas não-linearidades e os parâmetros distribuídos que podem estar presentes no sistema físico. Se os efeitos que essas propriedades ignoradas têm na resposta forem pequenos, pode-se obter boa aproximação entre os resultados da análise de um modelo matemático e os resultados do estudo experimental do sistema físico.

Sistemas lineares são aqueles em que se pode aplicar o princípio da superposição e que atendem a propriedade da homogeneidade. Segundo Ogata (2003, p. 46), “O princípio da superposição afirma que a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas funções diversas é a soma das duas respostas individuais”. Isto quer dizer que em um sistema linear, para calcular a resposta de diversas entradas, pode-se tratar cada entrada individualmente e somar os resultados. A propriedade da homogeneidade diz que em um sistema, se uma entrada *x* gera uma saída *y,* caso essa entrada seja multiplicada por uma constante, a saída do sistema deverá ser a saída *y* multiplicada pela mesma constante. Caso não seja possível aplicar o princípio da superposição ou a propriedade da homogeneidade não seja atendida, o sistema é dito não linear.

Ainda como Ogata (2003, p.46)

> Uma equação diferencial é linear se os coeficientes forem constantes ou somente funções da variável independente. Os sistemas dinâmicos compostos por componentes lineares de parâmetros concentrados invariantes no tempo podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo (de coeficientes constantes).

Assim, se os coeficientes da EDO forem constantes, o sistema é chamado de Sistema Linear Invariante no Tempo, no entanto, caso os coeficientes da equação diferencial sejam funções do tempo, o sistema é chamado de sistema linear variante no tempo, considerando-se a classe dos sistemas lineares. Para os autores Bishop e Dorf (2001, p.94) “Um sistema de controle variante no tempo é um sistema para o qual um ou mais parâmetros do sistema podem variar em função do tempo.”

4.1 Função de transferência (FT)

Modelos matemáticos associados com sistemas físicos em geral, são dados através de EDO(s). Quando estas equações diferenciais são invariantes no tempo, pode-se representar tais sistemas através de FT.

Segundo Bishop e Dorf (2001, p.37)

> A **função de transferência** de um sistema linear é definida como a relação entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, com todas as condições iniciais supostas iguais a zero. A função de transferência de um sistema (ou elemento) representa a relação que descreve a dinâmica do sistema sob consideração.

Dessa forma, considere o sistema linear invariante no tempo definido pela seguinte equação diferencial:

$$a_0 y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t)$$
$$= b_0 u^m(t) + b_1 u^{m-1}(t) + \cdots + b_{m-1}\dot{u}(t) + b_m u(t)$$

Onde *y(t)* representa a saída do sistema e *u(t)* a entrada. A FT, *G(s)*, desse sistema é a relação entre a TL[3] da saída, $\mathcal{L}$[*y(t)*], e a TL da entrada, $\mathcal{L}$[*u(t)*], quando todas as condições iniciais são nulas.

$$G(s) = \left.\frac{L[saída]}{L[entrada]}\right|_{condições\ iniciais\ nulas}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

As raízes do polinômio do numerador da FT são chamadas de zeros da função e as raízes do polinômio do denominador são os polos da FT. Encontra-se o polinômio característico do sistema igualando-se o denominador da FT à zero. Os polos da FT

[3] O item 3.5 do capítulo 3 refere-se à Transformada de Laplace.

estão intimamente ligados à estabilidade do sistema, como será visto no item 4.9 desse capítulo.

A FT pode ser representada por meio de Diagrama de Blocos conforme demonstrado na figura abaixo:

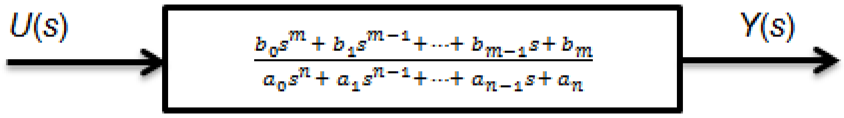

Figura 1 – Diagrama de blocos de uma FT

Fonte: Própria

Com a entrada à esquerda e a saída à direita, e a FT do sistema no interior do bloco.

O denominador da FT é idêntico ao polinômio característico da equação diferencial. Pode-se também obter a saída, Y(s), utilizando-se

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Que é comumente utilizada para representação de sistemas multivariáveis.

Consoante, segundo Bishop e Dorf (2001, p.48) “Os diagramas de blocos constituem de blocos operacionais, unidirecionais, que representam a função de transferência entre as variáveis de interesse.”

4.1.1 Observações sobre as FT

Ogata (2003, p.47) ao instaurar comentários sobre a FT chama a atenção para a ligação entre a FT e os sistemas de equações diferenciais lineares invariantes no tempo, ou seja, segundo o autor “A aplicabilidade do conceito de função de transferência é limitada a sistemas de equações diferenciais lineares invariantes no tempo.” porém “é amplamente utilizado na análise e no projeto desses sistemas”. Assim a FT:

1. É um modelo matemático que expressa a EDO que relaciona a variável de saída à variável de entrada;
2. É uma propriedade inerente ao sistema, independe da magnitude e da natureza da função de entrada;
3. Não inclui qualquer informação sobre a estrutura física do sistema;
4. Se a FT de um sistema for conhecida, a saída poderá ser estudada para várias maneiras de entrada, visando ao entendimento da natureza da planta;
5. Se a FT de um sistema não for conhecida, ela pode ser determinada experimentalmente, a partir de medições dos sinais de entrada e saída. Uma vez determinada, ela fornece uma descrição completa das características dinâmicas do sistema, independentemente de sua descrição física.

4.2 Modelamento no espaço de estados

Quanto a definição de Teoria de Controle Moderno (no domínio do tempo) e Teoria de Controle Clássica ou Convencional (no domínio da frequência), há concordância entre Ogata (2003), Bishop e Dorf (2001) e Nise (2011), visto que esses autores compartilham da mesma definição no que se refere a abrangência da primeira teoria e a pertinência do uso de ambas em situações distintas.

Sendo assim, a Teoria de Controle Moderno pode ser utilizada em situações de sistemas multivariáveis (MIMO), sistemas não lineares e variantes no tempo, abrangência essa não alcançada pela Teoria de Controle Clássica ou Convencional. Em nível de esclarecimento, se o sistema tem uma entrada e uma saída ele é chamado de monovariável (SISO – *single input, single output*). Já se o sistema tem múltiplas entradas e/ou múltiplas saídas ele é dito multivariável (MIMO – *multiple input, multiple output*). Conforme Ogata (2003, p.59)

> A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle convencional porque a primeira é aplicada a sistemas de entradas e saídas múltiplas, que podem ser lineares ou não-lineares, enquanto a última é aplicável somente a sistemas lineares, invariantes no tempo, de entrada e saída únicas. A teoria de controle moderno é, também, essencialmente uma

> abordagem no domínio do tempo, enquanto a teoria de controle convencional é uma abordagem no domínio da frequência complexa.

No entanto, há de se considerar a validade da teoria de controle clássica ou convencional em situações específicas conforme alega Nise (2011, p.94):

> A principal vantagem das técnicas que utilizam o domínio da frequência está no fato de fornecerem rapidamente informações sobre a estabilidade e a resposta transiente. Assim, pode-se perceber imediatamente os efeitos da variação de parâmetros até que as condições de um projeto aceitável sejam encontradas.

Nesse modelamento há alguns conceitos prévios que necessitam serem definidos. Autores como Ogata (2003), Bishop e Dorf (2001) e Nise (2011) compartilham de definições que se complementam. Dessa forma, tem-se as definições abaixo:

- Estado: o estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, calculadas no tempo, em que o conhecimento de x em t_0 ($x(t_0)$), juntamente com a entrada $u(t)$, para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema para $t \geq t_0$.
- Variáveis de estado: é a menor quantidade de funções $x(t)$ capaz de determinar o estado do sistema.
- Vetor de estado: é aquele composto pelas variáveis de estado e determina a dimensão do sistema.
- Espaço de estados: é o espaço n-dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos $x_1, x_2, ..., x_n$ onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são as variáveis de estado.

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis: variáveis de entrada ($u(t)$), variáveis de saída ($y(t)$) e variáveis de estado ($x(t)$). A representação de um dado sistema no espaço de estados não é única, diferentemente da representação no domínio da frequência, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema, no espaço de estados, denominada ordem do sistema.

Conforme Nise (2011, p.98) a equação de estado “É um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem com n variáveis, onde as n variáveis a serem determinadas são as variáveis de estado”. Já a equação de saída “É a equação algébrica que expressa as variáveis de saída de um sistema como combinações lineares das variáveis de estado e das entradas".

Dessa forma, a equação de estados é dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

E a equação de saída é dada por:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Onde:

A: matriz de estados
B: matriz de entrada
C: matriz de saída
D: matriz de transição direta
x: vetor de estado
$\dot{x}$ = derivada do vetor de estado em relação ao tempo
u = vetor de entrada ou vetor de controle
y = vetor de saída

As dimensões das matrizes[4] acima, para um sistema monovariável será:

$A \in R^{nxn}$
$B \in R^{nx1}$
$C \in R^{1xn}$
$D \in R^{1x1}$
$x \in R^{nx1}$
$u \in R$
$y \in R^{1x1}$

[4] O item 2.1 do capítulo 2 refere-se às Matrizes.

Para um sistema multivariável, as dimensões são as seguintes:

$$A \in R^{nxn}$$
$$B \in R^{nxnu}$$
$$C \in R^{nyxn}$$
$$D \in R^{nyxnu}$$
$$x \in R^{nx1}$$
$$u \in R^{nux1}$$
$$y \in R^{nyx1}$$

Neste caso multivariável o sistema possui *nu* entradas e *ny* saídas.

Se as matrizes *A, B, C* e *D* são funções do tempo (*A*(*t*), *B*(*t*), *C*(*t*) e *D*(*t*)), o sistema é dito variante no tempo. Caso contrário, ele é denominado invariante no tempo. É importante lembrar que o modelo FT só se aplica a sistemas invariantes no tempo.

A equação de saída é utilizada para se calcular quaisquer outras variáveis do sistema. Conforme Nise (2011, p.98) “Esta representação de um sistema fornece o conhecimento completo de todas as variáveis do sistema a qualquer tempo $t \geq t_0$”.

É importante ressaltar que a escolha das variáveis de estado, para um sistema especifico, não é única, assim sendo, o requisito para a definição das variáveis de estado é que as mesmas sejam independentes e que seja selecionado um número mínimo dessas variáveis.

4.3 Relação entre o modelo dado por EDO e o modelo Espaço de Estado

É possível representar um sistema no modelo espaço de estados a partir de uma EDO. Para isso, considere o modelo dinâmico:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = u(t)$$

Para realizar a transição para o modelo espaço de estados parte-se da seguinte premissa:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

Utilizando as premissas acima, chega-se a:

$$\dot{x_1} = \dot{y} = x_2(t)$$
$$\dot{x_2} = \ddot{y} = x_3(t)$$
$$\dot{x_3} = \dddot{y} = x_4(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n(t)$$

$$\dot{x_n} = y^n = u - a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \cdots - a_n y = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1$$

Para o caso de um sistema de ordem 3, isto é, *n* = 3, tem-se:

$$\dddot{y} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = u$$

Isolando $\dddot{y}$, obtém-se:

$$\dddot{y} = u - a_1 \ddot{y} - a_2 \dot{y} - a_3 y$$

Segundo as premissas citadas no início desse tópico, sabe-se que:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$$
$$\dot{x}_3 = \dddot{y}$$

Logo, um sistema de ordem 3 pode ser representado no modelo espaço de estados por:

$$\dddot{y} = u - a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1$$

Representado de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Mais adiante, na seção 4.8, essa representação estará relacionada a uma determinada forma canônica, o que facilitará a verificação das propriedades do sistema.

4.4 Relação direta entre FT e modelo espaço de estados

É possível obter a FT de um sistema de entrada e saída únicas a partir de equações no espaço de estados.

Considerando o sistema cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Esse sistema pode ser representado no espaço de estados por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Aplicando-se a TL nas duas equações que compõe o modelo, considerando condições iniciais nulas, tem-se os:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\} \\ \mathcal{L}\{y(t) = Cx(t) + Du(t)\} \end{cases}$$

A TL da primeira equação, considerando condições iniciais nulas, é:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

Passando todos os termos que contém *X(s)* para o lado esquerdo da equação e colocando *X(s)* em evidência obtém-se:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$$

Pré multiplicando ambos os lados da equação acima por $(sI - A)^{-1}$, chega-se a:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

A TL da segunda equação do sistema, equação de saída, considerando-se as condições iniciais nulas, é:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Substituindo o valor de *X*(s) na equação acima, obtém-se:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Ao colocar *U(s)* em evidência, tem-se:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Dividindo ambos os lados da equação por *U(s)*, chega-se a:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Logo, a função de transferência do sistema, em relação as matrizes *A, B, C* e *D,* é dada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

4.5 Sistemas equivalentes

A apresentação no modelo espaço de estados de uma mesma FT não é única. Esse fato é importante para os casos em que se deseja, por exemplo, projetar um controlador sem verificar as propriedades que garantam a existência do mesmo, como será visto mais adiante nas seções 4.6 e 4.7.

Tomando a transformação de similaridade $\bar{x} = Px$, P não singular, consegue-se determinar um sistema equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Da seguinte forma:

$$\bar{x} = Px$$
$$\dot{\bar{x}} = P\dot{x}$$
$$\dot{\bar{x}} = P(Ax + Bu)$$
$$\dot{\bar{x}} = PAx + PBu$$

Mas como

$$\bar{x} = Px$$
$$P^{-1}\bar{x} = P^{-1}Px$$
$$P^{-1}\bar{x} = Ix$$
$$P^{-1}\bar{x} = x$$

Substituindo *x* no primeiro resultado, obtém-se:

$$\dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x} + PBu$$

E a equação de saída

$$y = Cx + Du$$

Torna-se

$$y = CP^{-1}\bar{x} + Du$$

E o modelo espaço de estados equivalente torna-se:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x} + PBu \\ y = CP^{-1}\bar{x} + Du \end{cases}$$

4.6 Propriedades de sistemas em espaço de estados

As definições de controlabilidade e observabilidade tem papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados. Segundo Ogata (2003, p.638)

> As condições de controlabilidade e observalibilidade podem ditar a existência de uma solução completa para o problema de projeto do sistema de controle. A solução desse problema pode não existir, se o sistema considerado é não controlável. Embora a maioria dos sistemas físicos seja controlável e observável, os correspondentes modelos matemáticos podem não exibir a propriedade de controlabilidade e observabilidade. Então, é necessário conhecer as condições nas quais um sistema é controlável e observável.

Em um sistema na forma do espaço de estados podem existir dinâmicas que não são vistas pelas saídas do sistema ou não são influenciadas pelas entradas do sistema. Ao se analisar a FT de um sistema, percebe-se com facilidade que um cancelamento de um polo com um zero implica que alguma dinâmica no sistema deixa de ser vista pela saída e nem pode ser alterada pela entrada. Dinâmicas não vistas pelo sistema geram perda de controlabilidade e/ou observabilidade.

Na forma do espaço de estados não é simples verificar se ocorre um cancelamento de polo e zero. Entretanto, para poder controlar um sistema ele deverá ser controlável e para projetar um observador de estados, que nada mais é que um estimador de estados quando esse não pode ser medido diretamente, o sistema deverá ser observável. A seguir serão apresentados os conceitos de controlabilidade e observabilidade e serão apresentados testes para verificar se um sistema é controlável e observável.

4.6.1 Controlabilidade

O conceito de controlabilidade é fundamental para o projeto de estabilizadores usando realimentação de estado. Um sistema instável, porém controlável, pode ser estabilizado em malha fechada e, em consequência, esta se torna uma condição necessária que permite projetar com segurança controladores para sistemas.

Embora a maioria dos sistemas físicos sejam controláveis, seus correspondentes modelos matemáticos podem não ter a propriedade de controlabilidade. Logo é necessário saber as condições em que o sistema é controlável.

Segundo Ogata (2003, p. 638)

> Um sistema será dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito.

Assim, o par (*A*, *B*) referente ao sistema abaixo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

É controlável se, para todo estado inicial $x(t_0) = x_0$, todo estado final $x_1 = x(t_1)$, exista uma entrada que leva x_0 a x_1 em $t \in [t_0, t_1]$.

A equação de saída não influencia a controlabilidade. A definição requer apenas que se possa mover qualquer estado inicial no espaço de estados para qualquer estado final em tempo finito. Não há restrições quanto à trajetória a ser seguida nem quanto à magnitude da entrada.

A controlabilidade completa de estados de um sistema dinâmico qualquer pode ser determinada através da solução da equação de estado. Para isso, é possível supor que o estado final do sistema seja a origem do espaço de estados (ponto de estabilidade do sistema) e que o instante inicial seja $t_0 = 0$.

A solução das equações de estado é dada pela equação:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Através da definição de controlabilidade completa de estados tem-se:

$$x(t) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{At_1}x(0) = -e^{At_1}\int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{A(\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$e^{-A\tau}$ pode ser escrito da forma

$$e^{-A\tau} = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k$$

Substituindo este resultado na equação anterior, tem-se:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^kB\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau$$

Admitindo que $\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau) = \beta_k$, então, a equação acima passa a ficar como:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^kB\beta_k$$

Podendo ser representada na forma matricial

$$x(0) = -[\,B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B\,]\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \cdots \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim, um dado sistema pode ser dito de estado completamente controlável para qualquer que seja o estado inicial $x(0)$, se e somente se, a equação seja satisfeita. Para que a equação seja verdadeira, a matriz

$$\mathcal{C}_{n\,x\,n} = [\,B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B\,]$$

Chamada de matriz de controlabilidade, deve possuir posto linha pleno[5]. Ou seja, que os vetores $B,\ AB,\ A^2B, \ldots,\ A^{n-1}B$ sejam linearmente independentes[6] (OGATA, 2003, p.638).

Para o caso de um sistema monovariável, a matriz de controlabilidade será uma matriz quadrada de ordem *n*. Desta forma, para que a matriz possua posto linha pleno basta que ela seja uma matriz não singular[7], isto é, que o seu determinante seja não nulo.

Entretanto, no caso de um sistema multivariável, a matriz de controlabilidade não será uma matriz quadrada, ela será uma matriz *n* x *nu*, logo não é possível calcular seu determinante. Desta forma, é necessário verificar se os vetores-linha são linearmente independentes. Uma forma de verificar a independência linear é através do escalonamento da matriz. Se ao longo deste processo, nenhuma linha for zerada, isso implica que o posto da matriz é completo. Caso zere, isto indica que ela perdeu posto e, consequentemente, a matriz não tem posto pleno e o sistema não é controlável.

[5] O item 2.6 do capítulo 2 refere-se ao posto de uma matriz.
[6] O item 2.4 do capítulo 2 refere-se à dependência e independência linear.
[7] O item 2.1.5 do capítulo 2 refere-se às matrizes não singulares.

4.6.2 Observabilidade

Para se realizar esquemas de seguimento robusto, é necessário a utilização de controle por realimentação de estado. Quando o estado não é mensurável, é impossível a implementação desse tipo de controle. Porém, é possível obter uma estimativa do vetor x, usando apenas os sinais de entrada, u, e de saída, y, que são sempre mensuráveis. O esquema que estima o estado a partir da entrada e da saída é denominado de observador de estado. O conceito de observabilidade é importante para a construção de observadores de estado. Esquemas de controle por realimentação de estado podem ser implementados usando o estado estimado ao invés do estado real.

Segundo Nise (2011, p. 534)

> Se for possível obter um vetor de estado inicial, $x(t_0)$, a partir da medida de $u(t)$ e de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito a partir de t_0, o sistema é dito *observável*, caso contrário o sistema é dito *não-observável*.

Ou seja, o sistema é observável se existe um instante $t_1 > t_0$ tal que para qualquer condição inicial $x(t_0)$, o conhecimento da entrada $u[t_0, t_1]$ e $y[t_0, t_1]$ é suficiente para determinar $x(t_0)$. Dessa forma, pode-se reconstruir toda a trajetória $x(t)$.

Se um sistema é descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Então

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

E $y(t)$ é

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du$$

Como as matrizes *A, B, C* e *D* são dadas e *u(t)* é conhecido, os dois últimos termos do lado direito da equação acima são quantidades conhecidas. Logo, eles podem ser subtraídos do valor observado *y(t)*. Em consequência deste fato, para investigar uma condição necessária e suficiente para a observabilidade completa é suficiente considerar um sistema sem excitação, descrito por:

$$\dot{x} = Ax$$
$$y = Cx$$

Considerando o sistema descrito pelas equações acima, o vetor de saída *y(t)* é

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Como visto anteriormente, $e^{-A\tau}$ pode ser escrito da forma

$$e^{-A\tau} = -\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(\tau)A^k$$

Logo, obtém-se

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)CA^k x(0)$$

Ou

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0)$$

Assim, um dado sistema pode ser dito completamente observável se dada uma saída *y(t)* durante um intervalo de tempo $0 \le t \le t_0$, $x(0)$ é unicamente determinado pela equação acima. Este fato requer que a matriz

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Chamada de matriz de observabilidade, possua posto coluna pleno. Ou seja, que os vetores $C,\ CA,\ CA^2, \dots,\ CA^{n-1}$ sejam linearmente independentes (OGATA, 2003, p.643).

Para o caso de um sistema monovariável, a matriz de observabilidade será uma matriz quadrada de ordem *n*. Desta forma, para que a matriz possua posto coluna pleno é necessário que ela seja uma matriz não singular, isto é, que o seu determinante seja não nulo.

Entretanto, no caso de um sistema multivariável, a matriz de observabilidade não será uma matriz quadrada, ela será uma matriz *ny* x *n*, logo não é possível calcular seu determinante. Desta forma, é necessário verificar se os vetores-coluna são linearmente independentes. A forma da verificação é análoga à utilizada no caso da controlabilidade, utilizando-se novamente o recurso do escalonamento. Neste caso, precisa-se verificar se uma coluna zerou no processo e, caso não tenha zerado, o sistema é observável.

4.7 Extensões das propriedades para sistemas equivalentes

A controlabilidade e a observabilidade são propriedades invariantes do sistema sob quaisquer transformações de similaridade. Isto é, tais propriedades são observadas quando há equivalência entre sistemas no modelo espaço de estados.

Como foi definido na seção 4.5:

$$\bar{A} = PAP^{-1}$$
$$\bar{B} = PB$$

$$\bar{C} = CP^{-1}$$

$$\bar{x} = Px \rightarrow x = P^{-1}\bar{x}$$

$$\dot{\bar{x}} = P\dot{x} = P[Ax + Bu]$$

4.7.1 Controlabilidade para um sistema equivalente

Como foi visto na seção 4.6.1, a matriz de controlabilidade é definida por:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

Para um sistema equivalente, a matriz de controlabilidade $\bar{\mathcal{C}}$ é dada por:

$$\bar{\mathcal{C}} = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \cdots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$$

Substituindo os valores de $\bar{A}$ e $\bar{B}$ definidos nesta seção, temos:

$$\bar{\mathcal{C}} = [PB \quad PAP^{-1}PB \quad PAP^{-1} \cdot PAP^{-1}PB \quad \cdots]$$

$$\bar{\mathcal{C}} = [PB \quad PAB \quad PA^2B \quad \cdots \quad PA^{n-1}B]$$

$$\bar{\mathcal{C}} = P[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

$$\bar{\mathcal{C}} = P\mathcal{C}$$

Logo, se $\mathcal{C}$ tem posto linha pleno e *P* é invertível, o sistema equivalente é controlável.

4.7.2 Observabilidade para um sistema equivalente

Como foi visto na seção 4.6.2, a matriz de observabilidade é definida por:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Para um sistema equivalente, a matriz de observabilidade $\bar{\vartheta}$ é dada por:

$$\bar{\vartheta} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores de $\bar{B}$ e $\bar{C}$ definidos nesta seção, temos:

$$\bar{\vartheta} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}PAP^{-1} \\ CP^{-1}PAP^{-1} \cdot PAP^{-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\bar{\vartheta} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CAP^{-1} \\ CA^2P^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}P^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\vartheta} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\bar{\vartheta} = \vartheta P^{-1}$$

Logo, se ϑ tem posto coluna pleno e P é não singular, o sistema equivalente é observável.

4.8 Formas canônicas

A representação de sistemas nas formas canônicas facilita a análise de controlabilidade, observabilidade e estabilidade, pois se o sistema estiver na Forma Canônica Controlável (FCC) certamente ele será controlável, de maneira análoga, se estiver na Forma Canônica Observável (FCO) ele será observável e se tiver os elementos da diagonal da Forma Canônica Diagonal (FCD) todos negativos, será estável.

4.8.1 Forma Canônica Controlável (FCC)

Dado um sistema na forma de EDO, representado abaixo:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + a_3 y^{(n-3)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_m u(t)$$

A FCC no modelo espaço de estados é dada por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

A forma canônica controlável é importante na descrição do projeto de sistemas de controle pela abordagem por alocação de polos. Reveja a equivalência entre o modelo dado por uma EDO e o Espaço de Estados dada na Seção 4.3. Quando b_m for igual a 1, segue que os sistemas são idênticos, ou seja, a transformação de um modelo ao outro já fornece o sistema na FCC.

4.8.2 Forma Canônica Observável (FCO)

Transpondo a FCC, obtém-se a FCO, dada por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{bmatrix} x$$

4.8.3 Forma Canônica Diagonal (FCD)

A FCD é obtida quando a função de transferência *G*(*s*) tem polos distintos.
Para o caso de raízes distintas, a função de transferência

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Pode ser reescrita como

$$G(s) = \frac{r_1}{s + p_1} + \frac{r_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{r_n}{s + p_n}$$

A FCD da representação no espaço de estados desse sistema é dada por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_{n-1} & r_n \end{bmatrix} x$$

4.9 Estabilidade

A análise e o projeto de sistemas de controle focam três objetivos principais: produzir a resposta transiente desejada; reduzir os erros de regime estacionário; e alcançar a estabilidade. A estabilidade é a especificação mais importante do sistema. Se um sistema é instável, a resposta transiente e os erros do estado estacionário deixam de ter significado, pois um sistema deve ser estável para produzir a resposta transiente e a de regime estacionário adequadas. A resposta transiente é importante porque afeta a velocidade do sistema e influencia a tolerância e o conforto humanos, sem mencionar a tensão mecânica. A resposta do regime estacionário determina a acurácia do sistema de controle, ela estabelece o quanto a saída se aproxima da resposta desejada.

Dessa forma, torna-se necessário discorrer acerca da estabilidade de um sistema. Para isso, partiu-se do fato de que a resposta total de um sistema é obtida pela soma da resposta natural com a resposta forçada. Ao apresentar as equações diferenciais lineares, referiu-se a resposta natural como sendo a solução homogênea e a resposta forçada como sendo a solução particular. A resposta natural descreve o modo como o sistema dissipa ou obtém energia. A forma ou natureza dessa resposta depende apenas do sistema, e não da entrada. Por outro lado, a forma ou natureza da resposta forçada depende da entrada. Logo, para um sistema de controle ser útil, a resposta natural deve eventualmente tender a zero, permanecendo assim, apenas a resposta forçada, ou a resposta natural deve oscilar. Segundo Bishop e Dorf (2001, p. 230) "Um sistema estável é um sistema dinâmico com uma resposta limitada a uma entrada limitada." Isto significa que se um sistema estável for submetido a uma excitação ou perturbação limitadas a resposta do mesmo também será limitada. Para um sistema ser estável, toda entrada limitada deve gerar uma saída limitada.

Entretanto, em alguns sistemas a resposta natural aumenta ilimitadamente, em vez de diminuir até chegar a zero ou oscilar. Consequentemente, a resposta natural é tão maior que a resposta forçada, que o sistema não pode mais ser controlado, essa condição é denominada instabilidade. Segundo Nise (2011, p. 237) "Um sistema é instável se alguma entrada limitada gerar uma saída ilimitada." Isso quer dizer que se um sistema for instável, a resposta natural aumenta sem limites na medida em que o tempo tende a infinito. Um sistema de controle também pode ser classificado como marginalmente estável, isso ocorre quando a resposta natural não apresenta aumento nem atenuação, mas permanece constante ou oscila quando o tempo tende a infinito.

Para determinar se um sistema é estável é importante observar que as definições de estabilidade são obtidas com base na resposta natural. Quando os polos dos sistemas se posicionam no semiplano esquerdo produzem, como resposta natural, exponenciais decrescentes ou senóides amortecidas. Essas respostas naturais tendem a zero quando o tempo tende a infinito. Dessa forma, se os polos de sistemas em malha fechada estiverem no semiplano *s* da esquerda e, portanto, tendo parte real negativa, o sistema será estável. Bishop e Dorf (2001, p. 231) afirmam que “uma condição necessária e suficiente para um sistema com retroação ser estável é que todos os polos da função de transferência do sistema tenham parte real negativa.”, ou seja, possuam polos somente no semiplano da esquerda.

Já os polos no semiplano da direita conduzem a respostas naturais crescentes de forma exponencial ou a respostas naturais senoidais de amplitude exponencial crescente. Quando o tempo tende a infinito tais respostas tendem a infinito. Portanto, se os polos do sistema em malha fechada estiverem no semiplano *s* da direita, apresentando assim parte real positiva, o sistema será instável. Para o sistema ser considerado instável, é suficiente que ele possua um polo no semiplano da direita ou polos de multiplicidade maior que um no eixo imaginário.

Finalmente, um sistema que possua polos de multiplicidade um no eixo imaginário produz como resposta natural oscilações senoidais puras. Tais respostas não aumentam nem diminuem de amplitude. Dessa forma, segundo Nise (2011, p. 237) "os sistemas marginalmente estáveis apresentam função de transferência em malha fechada somente com polos de multiplicidade 1 no eixo imaginário e polos no semiplano *s* da esquerda."

Portanto, para assegurar a estabilidade de um sistema de controle com retroação, deve-se determinar as raízes do polinômio característico do sistema, que são justamente os polos no modelo FT. Se todas as raízes possuírem parte real negativa o sistema é estável; caso o polinômio característico do sistema possua alguma raiz com parte real positiva ou mais de uma raiz com parte real nula o sistema é dito instável; e finalmente se o mesmo possui uma única raiz com parte real nula e as demais raízes com parte real negativa o sistema será marginalmente estável.

Na Forma Canônica Diagonal, os polos são justamente os elementos $-p_1, -p_2, ..., -p_n$. Assim, para se verificar a estabilidade no modelo Espaço de Estados há duas alternativas: determinar os autovalores da matriz A e os sinais das partes reais que os compõem ou, então, escrever o sistema na FCD e olhar somente para os elementos da diagonal da matriz de estados. Quando estes tiverem parte real negativa, o sistema é estável.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentado cumpriu seu objetivo no que diz respeito a sua proposta inicial, que seria demonstrar a relação interdisciplinar entre os conteúdos pertencentes ao eixo básico de Matemática e as disciplinas referentes aos conteúdos específicos do eixo de controle, pertencentes ao curso de Engenharia de Automação Industrial do CEFET-MG/Araxá. Essa afirmação pode ser feita mesmo não se trabalhando todas as disciplinas do eixo matemático, pois para esse tipo de abordagem cientifica os resultados obtidos a partir de um nicho de disciplinas já demonstra a efetividade da prática interdisciplinar.

Outro ponto a se ressaltar é que a Teoria de Controle se apresenta como sendo extremamente densa e de grande abrangência teórica, dessa forma optou-se por focar na Modelagem de Sistemas Dinâmicos, conforme Ogata (2003, p.45) "Devemos ter em mente que construir modelos matemáticos adequados é a parte mais importante da análise de sistemas de controle como um todo."

Esse trabalho pode propiciar duas possíveis linhas de prática interdisciplinar. A primeira seria a aplicação dos conteúdos específicos no cotidiano do engenheiro de automação industrial por meio da noção clara do que realmente este profissional utiliza na sua prática diária. A segunda seria à utilização e o auxílio de *softwares* no ensino das disciplinas, tanto as básicas quanto as especificas, pois estes compõem ferramentas didáticas que visam o entendimento dos conteúdos, trazendo estímulo ao estudante de Engenharia de Automação Industrial.

Como trabalho futuro, pretende-se, também, confeccionar uma cartilha trazendo os paralelos entre os conteúdos básicos e os específicos do curso de Engenharia de Automação Industrial. Essa atitude visa contribuir tanto para os docentes quanto para os discentes do curso no processo de ensino e aprendizagem, através do esclarecimento da aplicabilidade dos conceitos teóricos.

REFERÊNCIAS

BISHOP, Robert H.; DORF, Richard C. **Sistemas de Controle Modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

CASSAGO JUNIOR, Hermínio; LADEIRA, Luiz A. C. **Equações Diferencias Ordinárias**. São Carlos: ICMC, 2009.

CULL, Michael R.; ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** Funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

LADEIRA, Luiz A. C. **Introdução à Álgebra Linear e Equações Diferenciais**. São Carlos: ICMC, 2010.

LEON, Steve J. **Álgebra Linear com Aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Teoria e Problemas de Álgebra Linear**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

PIAGET, Jean. 1. **A Vida e o Pensamento do Ponto de Vista da Psicologia Experimental e da Epistemologia Genética.** Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1972.