



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
DE MINAS GERAIS
CAMPUS IV – ARAXÁ

ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

**ANÁLISE DO CONTROLE DO PÊNDBULO INVERTIDO
EMPREGANDO TÉCNICAS CLÁSSICAS E MODERNAS DE
CONTROLE**

Hygor Viegas Fernandes

Araxá
2015

Hygor Viegas Fernandes

**ANÁLISE DO CONTROLE DO PÊNULO INVERTIDO
EMPREGANDO TÉCNICAS CLÁSSICAS E MODERNAS DE
CONTROLE**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais / Campus IV – Araxá, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Automação Industrial

Orientadora: Dra. Aline Fernanda Bianco, CEFET-MG

Araxá
2015

A memória de meus pais, Carlos Augusto e
Dulce Aparecida.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por proporcionar a oportunidade de poder vivenciar este momento.

Agradeço a toda a minha família pelo amor incondicional e pelas palavras de conforto durante os períodos tempestuosos.

Agradeço a minha namorada Raíssa, pelo amor e paciência durante o processo de desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a minha orientadora Aline, pelo apoio e compreensão nos momentos de dificuldade encontrados.

Agradeço a todos os professores e funcionários do CEFET-MG – Campus IV, por não forma apenas profissionais, mas também cidadãos.

A todos os colegas de classe e amigos por participarem desta caminhada tornando-a mais agradável.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”. (Martin Luther King Jr.)

Resumo

A cada dia que passa os sistemas de controle tornam-se um elemento imprescindível na sociedade moderna, sendo uma ferramenta essencial em todas as áreas do conhecimento. A engenharia de controle baseia-se no seu estudo e tem o propósito de compreender seu comportamento físico para que permita controlá-lo de modo que produzam (ou se tornem) produtos economicamente viáveis e que traga benefícios a humanidade. Seus princípios são embasados na análise de sistemas dinâmicos e na teoria da realimentação. As teorias de controle normalmente empregada atualmente são as teorias de controle clássico e as teorias de controle moderno. Este trabalho tem o intuito de realizar um estudo teórico sobre a análise e o controle do sistema do pêndulo invertido. O pêndulo invertido é um sistema dinâmico de comportamento instável, mas que pode ser estabilizado quando submetido a uma força adequada de controle. O projeto de controle no âmbito das teorias clássicas é realizado através da implementação do controlador PID (proporcional – integral - derivativo), onde utiliza-se o critério de estabilidade de Routh para determinar o ganho crítico estabelecido pela regra de sintonia de Ziegler-Nichols. No contexto da teoria de controle moderno, é elaborado o projeto do controlador com realimentação de estados, empregando o regulador linear quadrático para determinar o ganho de realimentação de estados.

Palavras chaves: controle clássico, controle moderno, pêndulo invertido, realimentação de estados

Abstract

Every day the control systems become an indispensable element in modern society, an essential tool in all areas of knowledge. Control engineering is based on his study and it is intended to understand your to allow control it so that produce (or become) products economically viable products and which bring benefits to humanity. Its principles are based on the analysis of dynamic systems and the feedback theory. The control theories typically employed today are classic control theories and modern control theories. This work is intended to carry out a theoretical study on the analysis and control of the inverted pendulum system. The inverted pendulum is a dynamic system of unstable behavior, but that can be stabilized when subjected to a force of control. The control project in the framework of the classical theory is accomplished through the implementation of the PID controller (proportional-integral-derivate), where the stability criterion of Routh to determine critical gain established by Ziegler-Nichols tuning. In the context of modern control theory, is elaborated the project of state feedback controller, using the linear quadratic regulator to determine the at state feedback gain.

Keywords: classic control, modern control, inverted pendulum, PID, state feedback

Lista de Figuras

Figura 2.1: Representação em diagrama de blocos de um sistema de controle industrial constituído de um controlador automático, um atuador, uma planta ou processo e um sensor.	9
Figura 2.2 Representação em diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.	9
Figura 2.3 Representação em diagrama de blocos de um sistema de controle em malha aberta.	10
Figura 2.4: Representação em diagrama de blocos de um sistema com função de transferência $G(s)$ em malha aberta (a) e em malha fechada (b).....	18
Figura 2.5: Diagrama de polos e zeros da função de transferência $G_a(s)$ no plano complexo s.	12
Figura 2.6: Resposta de um sistema ao impulso unitário para várias posições de polos no plano s.	13
Figura 2.7: Representação gráfica dos sinais de entrada de teste: função degrau (a), função rampa (b), função parábola de aceleração (c).	18
Figura 2.8 Representação de um polo complexo conjugado em termo de ωn , ζ e ωd	19
Figura 2.9: Curvas de resposta de um sistema de segundo ordem submetido a uma função de entrada em degrau com variações do coeficiente de amortecimento ζ	21
Figura 2.10: Parâmetros de desempenho da resposta transitória de um sistema de segunda ordem.	22
Figura 2.11: Par de curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem subamortecido.	25
Figura 2.12: Erro em regime permanente de um sistema de segunda ordem subamortecido.	25
Figura 2.13: Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada com controlador PID de forma padrão.	27
Figura 2.14: Representação gráfica da relação entre o sinal de controle e o erro	28
Figura 2.15: a) Gráfico da resposta de um sistema de malha fechada submetido a um degrau unitário para diferentes valores de K_p . b) Gráfico do sinal de controle do mesmo sistema sujeito a diferentes valores de K_p	28
Figura 2.16: a) Gráfico resposta de um sistema de malha fechada submetido a um degrau unitário e um ganho $K = 1$ para diferentes valores de T_i . b) Gráfico do sinal de controle do mesmo sistema sujeito a diferentes valores de T_i	29
Figura 2.17: a) Gráfico da resposta de um sistema de malha fechada submetido a um degrau unitário com $K_p = 3$, $T_i = 2$ e diferentes valores de T_d . b) Gráfico do sinal de controle do mesmo sistema sujeito a diferentes valores de T_d	30

Figura 2.18: Curva com aspecto de S da resposta de um sistema submetido ao degrau unitário.	31
Figura 2.19: Resposta oscilatória com período P_{cr} de um sistema feito marginalmente estável.	32
Figura 3.1: Representação em diagrama de blocos do modelo em espaço de estado de um sistema.	36
Figura 3.2: O máximo e o mínimo de uma função f	42
Figura 3.3: Os máximos e o mínimos globais e locais de uma função f	43
Figura 3.4: Representação dos parâmetros θ dentro e fora do intervalo entre os pontos x_1 e x_2 de uma reta.	43
Figura 3.5: Representação geométrica de um conjunto convexo e um não-convexo.	44
Figura 3.6: Representação geométrica de um função convexa.	44
Figura 3.7: Representação em diagrama de blocos da realimentação de estados de um sistema.	46
Figura 4.1: Modelo de um Segway para transporte e lazer. 2 – Robonaut, projetada da NASA em parceria com a DARPA. 3 – Representação esquemática da dinâmica do movimento de caminhar e correr.	50
Figura 4.2: Diagrama de corpo livre do sistema do sistema do pêndulo invertido	50
Figura 5.1: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo s ($j\omega$) b) Resposta temporal da função de transferência G_{MA} , equação (5.1).	60
Figura 5.2: a) Mapa de polos e zeros de no G_{MA} , equação (5.2), plano complexo s ($j\omega$) b) Resposta temporal de G_{MA} , equação (5.2).	60
Figura 5.3: Diagrama de blocos do problema de controle proposto do sistema do pêndulo invertido em malha fechada.	61
Figura 5.4: Diagrama de blocos reduzido do problema de controle proposto do sistema do pêndulo invertido em malha fechada.	61
Figura 5.5: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo s ($j\omega$) de G_{MF} equação (5.5) b) Resposta temporal de G_{MF} , equação (5.5).	64
Figura 5.6: a) Resposta temporal de G_{MF} , equação (5.3), para diferentes valores de K_p	65
Figura 5.7: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo s ($j\omega$) de G_{MF2a} da equação (5.9) b) Resposta temporal de G_{MF2a} , equação (5.9).	66
Figura 5.8: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo s ($j\omega$) de G_{MF2b} da equação (5.10) b) Resposta temporal de G_{MF2b} da equação (5.10).	67
Figura 5.9: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo s ($j\omega$) de G_{MF2c} equação (5.11) b) Resposta temporal de G_{MF2c} da equação (5.11).	67

Figura 5.10: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF2d} equação (5.12) b) Resposta temporal de G_{MF2d} da equação (5.12).	68
Figura 5.11: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF2e} equação (5.13) b) Resposta temporal de G_{MF2e} da equação (5.13).	69
Figura 5.12: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF2f} equação (5.14) b) Resposta temporal de G_{MF2f} da equação (5.14).	69
Figura 5.13: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3a} equação (5.18) b) Resposta temporal de G_{MF3a} da equação (5.18).	71
Figura 5.14: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3b} , equação (5.19) b) Resposta temporal de G_{MF3b} , equação (5.19).	71
Figura 5.15: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3c} equação (5.20) b) Resposta temporal de G_{MF3c} , equação (5.20).	72
Figura 5.16: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3d} , equação (5.21) b) Resposta temporal de G_{MF3d} , equação (5.21).	72
Figura 5.17: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3e} , equação (5.5) b) Resposta temporal de G_{MF3e} da equação (5.5).	73
Figura 5.18: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MAF3f} , equação (5.23) b) Resposta temporal de G_{MAF3f} , equação (5.23).	73
Figura 5.19: a) Resposta temporal de G_{MAF3} , equação (5.17), para um ganho crítico $K_{cr} = 45$ e diferentes valores de T_d	74
Figura 5.20: a) Diagrama de blocos dos sistema de controle da haste do pêndulo, incluindo a função de transferência da plataforma móvel.	75
Figura 5.21: Diagrama de blocos rearranjado do sistema de controle da haste do pêndulo, incluindo a função de transferência da plataforma móvel.	76
Figura 5.22: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_t , equação (5.25) b) Resposta temporal de G_t , equação (5.25).	77
Figura 5.23: Diagrama de blocos de um sistema representado pelo seu modelo em espaço de estados com realimentação de estados.	79
Figura 5.24: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_1	80
Figura 5.25: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_2	81
Figura 5.26: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_3	82

Figura 5.27: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_4 .	83
Figura 5.28: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_5 .	84
Figura 5.29: a) Diagrama de blocos do modelo espaço de estado de um sistema submetido a realimentação de estados com ganho K e ao pré-compensador N .	85
Figura 5.30: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_4 e ao pré-compensador N_1 .	86
Figura 5.31: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_5 e ao pré-compensador N_2 .	86

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Valores de K_p , T_i e T_d para o primeiro método de Ziegler-Nichols, baseado na resposta ao degrau.	32
Tabela 2.2: Valores de K_p , T_i e T_d para o segundo método de Ziegler-Nichols, baseado na estabilidade crítica do sistema.	33

Sumário

1 -	Introdução	1
1.1	Apresentação	1
1.2	Um breve histórico do desenvolvimento dos sistemas de controle.....	2
1.3	Estrutura do trabalho.....	4
2 -	Um Resumo sobre a Teoria de Controle Clássico.....	6
2.1	– Conceitos Prévios.....	6
2.1.1	– Sistemas dinâmicos	6
2.2	– Análise de estabilidade.....	12
2.2.1	– Critérios de estabilidade de Routh.....	13
2.3	– Projeto de um Controlador Clássico.....	17
2.3.1	– Análise da Resposta Temporal de um Sistemas de Segunda Ordem	17
2.3.2	– Análise da Resposta em Regime Permanente	25
2.3.3	– Controlador PID	26
3 -	Um resumo sobre a Teoria de Controle Moderno.....	34
3.1	- Modelo em Espaço de Estados	34
3.2	- Análise de sistemas dinâmicos em espaço de estados	36
3.2.2	- Solução da equação de estado invariante no tempo não homogênea.....	37
3.2.3	- Matriz de transição de estados	38
3.2.4	- Controlabilidade.....	39
3.2.5	- Observabilidade	40
3.3	- Projeto de um Controlador em Espaço de Estados	42
3.3.1	- Conceitos prévios.....	42
3.3.2	- Regulador Linear Quadrático.....	45
4 -	O Pêndulo Invertido	49
4.1	- Modelamento da dinâmica do sistema	50
4.2	– Representação em espaço de estados do modelo do sistema	52
4.3	– Representação em função de transferência do modelo do sistema.....	53
4.4	– Análise de estabilidade do sistema.....	56
4.5	- Controlabilidade do sistema.....	57
5 -	Projeto do Sistema de Controle do Pêndulo Invertido	58
5.1	- Análise do sistema em malha aberta.....	59
5.2	- Controlador PID.....	61
5.3	– Regulador Linear Quadrático	78
6 -	Conclusões	88
7 -	Referências Bibliográficas	90
	Apêndice A.....	93

Apêndice B.....	94
Apêndice C.....	97

1 - Introdução

A proposta do presente trabalho é realizar a modelagem e a análise do sistema dinâmico proposto do pêndulo invertido projetando-se um controlador PID através do critério Routh para determinar o ganho crítico estabelecido no segundo método de sintonia de Ziegler-Nichols e um controlador com realimentação de estados utilizando a técnica do regulador linear quadrático através da determinação do o ganho de realimentação. A partir destes projetos, objetiva-se avaliar os processos e os resultados obtidos por cada um.

1.1 Apresentação

A engenharia de controle é baseada no estudo dos sistemas de controle e tem como objetivo buscar o entendimento de sistemas físicos dinâmicos para que possam ser modelados com o intuito de os controlar de forma autônoma, e assim gerar resultados que beneficie a humanidade. Fundamentada nos princípios da teoria da realimentação e na análise de sistemas lineares, ela integra os conceitos de outros ramos da engenharia como: mecânica, eletrônica, computação, química e entre outras (DORF e BISHOP, p.2, 2009). O controle automático é hoje uma parte essencial na sociedade moderna, um componente importante em todos os processos modernos de produção, tornando-se uma imprescindível ferramenta em qualquer campo da engenharia e da ciência (OGATA, p.1, 2010).

Um sistema de controle pode ser definido como o conjunto de componentes capazes de conceber uma configuração responsável por produzir, através da imposição de critérios de desempenho, uma resposta desejada do sistema para uma entrada específica fornecida (NISE, p.2, 2009). Atualmente, as teorias de sistemas de controle normalmente utilizadas são as teorias de controle clássico e teoria de controle moderno. A teoria de controle clássico baseia-se na análise de sistemas dinâmicos monovariáveis lineares, servindo-se de seu modelo matemático descrito em função de transferência, sendo, portanto, uma abordagem no domínio da frequência complexa. A teoria de controle moderno é fundamentada na análise de sistema dinâmico multivariáveis lineares ou não-lineares, onde seu modelo matemático é constituído no domínio do tempo por um sistema de equações diferenciais (OGATA, p.2, 2010). Neste trabalho, no âmbito das técnicas de controle clássico é utilizado o controlador PID, e no das técnicas de controle moderno, o controlador por realimentação de estados, empregando o regulador linear quadrático como técnica de controle responsável por determinar os ganhos de realimentação de estados.

O controlador PID é um algoritmo de controle que utiliza as ações de controle proporcional, integral e derivativo. A maioria dos processos automáticos na indústria operam empregando este tipo de controlador, isto se deve ao bom desempenho observado em uma ampla faixa de condições de atuação e a sua simplicidade funcional, a qual permite ser manuseada de modo simples e direto por técnicos e engenheiros (NISE, p.320, 2009). O regulador linear quadrático é considerado uma técnica de controle moderno que tem o propósito de determinar um vetor ótimo de controle que tenha a capacidade de levar um estado do sistema a outro desejado, de modo que o desempenho do sistema seja otimizado através da minimização ou maximização de um índice de desempenho quadrático, ocasionando um comportamento estável do sistema (DORF e BISHOP, p.559 e 560, 2009).

O sistema de controle do pêndulo invertido é um problema clássico da teoria de controle de sistemas dinâmicos. Ele é um sistema complexo de característica não-linear, que requer uma série de restrições na implementação de seu controle. O estudo do pêndulo invertido se estende a diversas áreas do conhecimento como: na medicina, através do estudo do ato do caminhar, trotar e correr dos humanos e animais; no lançamento de foguetes no setor aeroespacial e entre outras. O sistema do pêndulo invertido consiste em uma haste rígida de formato cilíndrico com liberdade de movimento em torno de um ponto fixo (pivô) em sua base, que o permite realizar com liberdade uma trajetória circular completa. Esse pivô é montado sobre uma plataforma móvel que possui autonomia para deslocar-se sobre um trilho ao longo do eixo horizontal. O propósito do controle do pêndulo invertido é, por intermédio dos movimentos da plataforma móvel, manter a haste na posição vertical com orientação para cima.

1.2 - Um breve histórico do desenvolvimento dos sistemas de controle

Os primeiros sistemas de controle realimentado surgiram muito antes do surgimento da humanidade através dos vários sistemas de controle biológicos desenvolvidos pelos primeiros seres vivos durante sua evolução, tais como o controle de temperatura corporal desenvolvido pelos primeiros mamíferos que surgiram.

Os primeiros trabalhos sobre sistemas realimentados foram desenvolvidos pelos gregos por volta do século III antes de Cristo. Ktesibios aprimorou o relógio de água fazendo com que esse operasse por meio do gotejamento a uma taxa constante para um reservatório graduado utilizado para indicar o tempo transcorrido. O seu aparelho é constituído por três recipientes em níveis diferentes. O primeiro, localizado no nível mais alto, é responsável por alimentar o segundo, que possui a finalidade de gotejar de forma constante a água para o reservatório de medição. Para que o gotejamento fosse mantido a uma taxa constante (pois a vazão de saída varia de acordo com o nível do fluido contido no recipiente), era utilizada uma boia semelhante às utilizadas nas caixas d'água para manter o nível. Por volta de 1681, foi criado o primeiro regulador de pressão a vapor para caldeiras, com a invenção da válvula de segurança de Denis Papin. O dispositivo possuía um contrapeso que a mantinha fechada enquanto a pressão no interior da caldeira fosse baixa a ponto de não haver força suficiente para superar o peso posicionado em cima da válvula. Quando a pressão ascendente da caldeira gera uma força superior ao peso, a válvula se abre e o vapor é liberado para que a pressão no interior da caldeira diminua. Dessa forma, o peso na parte superior da válvula é responsável por determinar a pressão máxima no interior da caldeira (NISE, p.4, 2009).

Mas o primeiro controlador com realimentação utilizado em um processo industrial foi o regulador centrífugo de motores a vapor construído por James Watt no século XVII. Seu princípio de funcionamento consiste na regulação da quantidade de vapor consumido de acordo com a velocidade desejada do motor. O sistema de regulação é composto por um conjunto de engrenagens cônicas que transmitem a velocidade do eixo do motor para outro eixo onde é acoplado um par de pêndulos opostos com um peso em suas extremidades. Esses pêndulos são conectados a uma válvula de controle localizada no tubo de alimentação do vapor. Conforme a velocidade aumenta, as esferas giram se afastando e fazem com que a válvula de controle vá se fechando devido a um sistema de transmissão, limitando a velocidade do motor através da diminuição do consumo de vapor. Quando a velocidade do motor começa a diminuir, os pesos se aproximam e a válvula de controle começa a se abrir e, conseqüentemente, ocorre o aumento do consumo de vapor, fazendo com que o motor não reduza sua velocidade. Essa invenção de Watt foi um dos fatores que impulsionaram a Revolução Industrial (OGATA, p.1 - 4 e 5, 2010)

As teorias de sistemas de controle atualmente conhecidas começaram a ser desenvolvidas em meados do século XIX com os estudos sobre estabilidade de sistemas dinâmicos. James Clerk Maxwell, em 1868, publicou o primeiro artigo com uma análise matemática consistente em sistemas realimentados, intitulado "*On Governors*". Em seu trabalho é mostrado que, através da análise das raízes do polinômio característico do sistema, é possível determinar sua estabilidade. Maxwell também desenvolve um critério de análise de estabilidade para sistemas de até terceira ordem, baseados nos coeficientes da equação diferencial. Em 1874, Edward John Routh estende o critério de estabilidade para os sistemas de quinta ordem. E em 1877, submete seu trabalho intitulado *Um Tratado sobre a Estabilidade de um Dado Estado de Movimento (A Treatise on the Stability of a Given State Motion)* ao prêmio Adams, sendo o vencedor. Neste trabalho, é apresentado o que é atualmente conhecido (e muito utilizado pelos engenheiros) como critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. Na Rússia, em 1892, com sua tese de doutorado intitulada *O Problema Geral da Estabilidade do Movimento (The General Problem of Stability of Motion)*, Alexandr Michailovich Lyapunov amplia o trabalho de Routh para sistemas não-lineares. Seus trabalhos foram fundamentais para o que atualmente é chamado de abordagem no espaço de estados. Mas essa abordagem só foi incorporada à literatura de sistemas de controle a partir de 1958 (NISE, p.4 e 5, 2009).

Uma grande parte das teorias de controle referentes ao aumento de desempenho de sistemas de controle automático é atribuído aos trabalhos desenvolvidos pelo russo Nicolas Minorski. A publicação de algumas análises teóricas aplicadas à manobrabilidade automática de

navios, em 1922, levou ao surgimento do controle proporcional-integral-derivativo (PID). Esse algoritmo desenvolveu-se após um extenso trabalho experimental utilizando aproximações linearizadas simples para a dinâmica do sistema. Em 1948, na *Taylor Instruments Company*, os engenheiros Nathaniel B. Nichols e John G. Ziegler criaram regras heurísticas para ajuste de controladores PID's baseados nas características dinâmicas do sistema. Na *Bell Telephone Laboratories*, entre as décadas de 1920 e 1930, os engenheiros Hendrik Wade Bode e Harry Nyquist desenvolvem métodos de análise e projetos aplicados a amplificadores realimentados, utilizando a abordagem de resposta em frequência, a qual é baseada nas teorias das funções de variáveis complexas, sendo essa metodologia bastante utilizada atualmente em projetos de sistemas de controle realimentados. Um método gráfico foi desenvolvido por Nyquist para determinar a estabilidade de sistemas de malha fechada baseado na resposta às excitações senoidais estacionárias de sistemas de malha aberta. Bode, em seus estudos, introduz os conceitos de margem de ganho e margem de fase utilizando diagramas logarítmicos, conhecido hoje como diagrama Bode (NISE, p.5, 2009; OGATA, p.1 e 2, 2010).

Através de uma abordagem alternativa, Walter Richard Evans direcionou seus estudos para as equações diferenciais e as raízes da equação característica, que haviam sido tratadas por Maxwell e Routh. Essa mudança de direcionamento ocorreu devido à dificuldade de aplicação dos métodos de resposta em frequência em seus trabalhos de orientação e controle de aeronaves, pois muitos de seus problemas envolviam dinâmicas instáveis ou de estabilidade neutra. Assim, Evans desenvolveu técnicas gráficas para acompanhar o caminho percorrido pelas raízes conforme as alterações de parâmetros. Seu trabalho trouxe outra forma de análise de estabilidade e projeto de sistemas de controle, sendo um método ainda bastante utilizado, conhecido como método do lugar das raízes. As técnicas de Evans em conjunto com os trabalhos de Bode e Nyquist tornaram-se as bases teóricas dos fundamentos de análise e projeto de sistemas de controle lineares, conhecidas atualmente como as teorias de controle clássico (NISE, p.5, 2009).

Os estudos sobre controle no período pós-segunda guerra mundial receberam grande influência dos trabalhos desenvolvidos no setor militar e aeroespacial realizados durante a guerra. À medida que os sistemas foram se tornando mais complexos, com múltiplas entradas e saídas (aumentando, assim, o número de equações para representá-lo) e juntamente com a disponibilidade da computação digital, a aplicação das teorias de controle clássico se tornou limitada, pois se resume a sistemas de apenas uma entrada e uma saída. Através da importância dada pelos governos para os estudos de controle de balística foi possível determinar detalhadamente seus modelos físicos utilizando equações diferenciais lineares e não lineares e desenvolver e utilizar instrumentos de medições, bem como outros componentes, com grande exatidão e precisão. Os engenheiros de empresas aeroespaciais, seguindo a linha de Poincaré, direcionaram seus estudos para a formulação de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, nascendo a abordagem em espaço de estados (BENNETT, p.20, 1996, tradução própria).

Em 1952, John Ralph Regazzini e Lofti Asker Zadeh foram os pioneiros no desenvolvimento da abordagem pela transformada Z para análise de sistema de dados amostrados, tornando-se extensivamente utilizado como um método padrão na análise e projeto de sistemas de controle e filtragem discreta. No departamento de matemática da *RAND Corporation*, entre 1948 e 1952, Richard Belman concebeu o princípio da otimização e da programação dinâmica. Essas teorias foram formuladas a partir de estudos utilizando o cálculo variacional na determinação do posicionamento ótimo do lançador de mísseis, submetido a restrições de redução de tempo e consumo de energia no conjunto de manobras realizadas durante seu posicionamento. No final da década de 1950, Belman começava a trabalhar com teorias de controle ótimo afim de que a programação dinâmica fosse utilizada na resolução de problemas de otimização determinística. Seus trabalhos utilizavam as equações diferenciais na análise e projeto de sistemas de controle (BENNETT, p.22, 1996, tradução própria).

Através dos estudos realizados por volta de 1960, a abordagem no domínio do tempo ganhou bastante destaque e tornou-se o tema mais estudado de sistemas de controle durante duas décadas. Isso ocorreu por meio dos trabalhos desenvolvidos a partir dos problemas ideais de controle multivariável com índice de desempenho quadrático (regulador linear quadrático) de Rudolf Emmil Kalman, que introduziu os importantes conceitos de controlabilidade e observabilidade de estados, pelos trabalhos sobre polos de mudança desenvolvidos pelo controle

modal de Howard Harry Rosenbrock e pela constatação obtida por Walter Murray Wonham, da qual enuncia que a condição necessária para que todas as frequências e os polos de malha fechada de um sistema controlável sejam alocados arbitrariamente e que todos os estados desse sistema possam ser acessíveis para medição. No entanto, o grande êxito dessa abordagem veio com o filtro de Kalman-Bucy, provando a importância da realimentação de estados nas teorias de filtragem e a característica similar de um controlador multivariável e um filtro multivariável realimentado. Mas, entretanto, ocorreu um rápido entendimento de que não era possível a aplicação dos métodos em espaço de estado e controle ótimo aos problemas industriais, pois muitas vezes, os modelos precisos das plantas industriais não eram disponíveis ou conhecidos e com isso tornava-se difícil determinar um índice de desempenho adequado, além da grande complexidade dinâmica dos controladores. Desta forma, a abordagem pela resposta em frequência renasce com um artigo publicado em 1966 por Rosenbrock descrevendo métodos de resposta em frequência aplicados a sistemas multivariáveis (BENNETT, p.22 e 23, 1996, tradução própria).

Durante as décadas de 1960 e 1980, as pesquisas direcionaram suas atenções ao controle de sistemas determinísticos e estocásticos e ao controle adaptativo e de aprendizagem. Entre as décadas de 1980 e 1990, os projetos de controle moderno passaram considerar os erros de modelamento dos sistemas reais, criando o controle robusto. Isso se deve ao fato de que todo modelo matemático (ou equação dinâmica) de um sistema físico real se trata de uma aproximação da realidade. Esta aproximação se deve ao fato de que, muitas vezes, não é possível modelar as incertezas decorrentes de dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, distúrbios externos, linearização, dentre outras. Tais incertezas são os principais responsáveis pela dificuldade de se obter um controle mais preciso e que garanta um bom desempenho quando aplicado a sistemas mais complexos (OGATA, p.2, 2010).

Os sistemas de controle possuem, atualmente, um extenso campo de aplicações, sendo sempre associado à utilização de computadores. Além de serem empregados nos processos industriais, no setor aeroespacial e na área militar, eles podem ser encontrados nos sistemas mais simples usados no dia-a-dia, como: na variação de intensidade do brilho conforme a luminosidade do ambiente ou mesmo no giro da tela dos celulares, na injeção eletrônica ou na suspensão ativa dos automóveis, em um leitor e gravador de disco de um DVD e entre outros diversos exemplos. O cotidiano já está repleto de sistemas de controle facilitando a rotina de várias pessoas, e a tendência é de que sua dependência se torne cada vez maior (NISE, p.5 e 6, 2009).

1.3 - Estrutura do trabalho

Os assuntos neste trabalho estão organizados em quatro capítulos, quais sejam:

Capítulo 2 - Um Resumo sobre a Teoria de Controle Clássico – Este capítulo expõem um resumo sobre a teoria de controle clássico. Introduce conceitos prévios como: os sistemas dinâmicos e suas características, sistemas de controle configurados em malha aberta e malha fechada e modelo função de transferência. Um método de análise de estabilidade de sistemas dinâmicos denominado critério de estabilidade de Routh é discutido. Por fim, aborda-se os conceitos de desempenho da resposta em regime transitória e permanente, controlador PID e as regras de sintonia de Ziegler-Nichols.

Capítulo 3 - Um resumo sobre a Teoria de Controle Moderno – Neste capítulo é apresentado um resumo sobre a teoria de controle moderno, introduzindo a representação matemática de um sistema dinâmico no modelo em espaço de estados. Discorre-se sobre a análise de sistemas em modelo de espaço de estados como: a relação entre a função de transferência e a equação de estados do sistema, a solução da equação de estado invariante no tempo não homogênea, matriz de transição de estados, controlabilidade e observabilidade, o projeto do controlador moderno utilizando o regulador linear quadrático e alguns conceitos necessários em seu projeto.

Capítulo 4 - O Pêndulo Invertido – Este capítulo trata do sistema dinâmico do pêndulo invertido, seu modelo em função de transferência e em equação de estados e a análise de sua estabilidade.

Capítulo 5 - Projeto do Sistema de Controle do Pêndulo Invertido – Neste capítulo discorre-se sobre o processo de projeto do controle do pêndulo invertido utilizando as técnicas clássica e as técnicas modernas de controle. Demonstra-se, também, o comportamento do sistema em malha aberta e o processo de projeto do controlador PID (utilizando o critério de Routh e as regras de sintonia de Ziegler-Nichols) e do controlador por realimentação de estado (utilizando o regulador linear quadrático), discutindo os resultados obtidos.

Capítulo 6 - Conclusão – Por fim, este capítulo argumenta as conclusões obtidas a partir dos projetos de controle do pêndulo invertido realizados no Capítulo 5 e indica propostas de desenvolvimento de trabalhos futuros, baseando-se no que foi realizado neste presente trabalho de conclusão de curso.

2 - Um Resumo sobre a Teoria de Controle Clássico

A teoria de controle clássico é fundamentalmente caracterizada pela utilização da função de transferência (que representa, no plano complexo s , a relação entre a entrada e a saída) de um sistema, sendo portanto, uma abordagem no domínio da frequência complexa. A teoria clássica em como virtude fornecer informações de forma rápida e de fácil análise sobre a estabilidade e a resposta de um sistema compelindo o emprego de poucos cálculos. Devido a isso, perceber-se de forma imediata os efeitos provocados pela variação de alguns parâmetros, até que sejam determinados critérios de desempenho satisfatórios (NISE, p.28 e 94,2009). Sua desvantagem está na limitada abrangência de sistemas alcançados pela sua construção teórica. Suas técnicas de análise e projetos de controle, segundo Ogata (p.25 e 595, 2010), tratam somente de sistemas lineares, invariantes no tempo e monovariáveis.

Não há um consenso na literatura sobre o domínio de métodos que é coberto pela teoria de controle clássico. Conforme Stuart Bennett (p.20 e 21, 1996, tradução própria), as bases teóricas de análise e projeto de sistemas de controle no âmbito da teoria clássica são representadas pelos métodos do lugar das raízes de Evans, pelos métodos de resposta em frequência¹ de Bode e de Nyquist, além das regras de Ziegler-Nichols para sintonia do controlador PID (proporcional-integral-derivativo) e uma abordagem que emprega a análise de parâmetros da resposta temporal do sistema como: tempo de subida, máximo sobressinal, tempo de acomodação e erro em regime permanente. Para Bennett, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz e o controlador PID não se enquadram no período clássico, mas sim, em um período anterior a esse, denominado pré-clássico (BENNETT, p.18, 1996, tradução própria). Os autores atuais de renome no campo da teoria de sistemas de controle (como Ogata, Nise e Dorf e Bishop) não deixam explícito se esse método de análise e essa técnica de controle fazem parte da teoria clássica. Mas há um consenso entre todos os autores, a teoria de controle clássico ocupa-se da abordagem no domínio da frequência, seja ela no plano complexo s ou na utilização de sinais senoidais. Em vista disso, no contexto em que é aplicada a teoria de controle clássico nesse trabalho, será empregado a análise da resposta temporal do sistema no projeto de um controlador PID e o critério de Routh-Hurwitz como apoio para as regras de sintonia de Ziegler-Nichols.

2.1 – Conceitos Prévios

2.1.1 – Sistemas dinâmicos

O conceito de sistema é definido, de acordo com Monteiro (p.41, 2006), como sendo um conjunto de elementos unidos por meio de alguma interação ou interdependência, de modo que haja uma relação de causa e efeito nos fenômenos relacionados entre eles. Sendo que, um sistema é chamado de dinâmico quando seus elementos possuem grandezas que variam com a evolução do tempo.

2.1.1.1 – Características de um sistema dinâmico

Um sistema dinâmico pode ser descrito por um modelo matemático (sendo na maioria das vezes uma equação diferencial), que é apenas uma representação aproximada de algumas características de seu comportamento dinâmico. Consequentemente, para um dado sistema, pode existir uma família de modelos com características e desempenhos variados. Quando se realiza o modelamento de um sistema, é normalmente necessário determinar algumas condições

¹ A resposta de um sistema linear quando submetida a uma função senoidal na entrada é denominado resposta em frequência (FRANKLIN, et al, p.366, 2002, tradução própria). Sendo que, sua saída também produzira uma senoide que pode ter fase, amplitude e frequência distinta da produzida na entrada.

simplificadores como: a linearidade, a invariância e a quantidade de entradas e saídas (AGUIRRE, p.52 e 53, 2000).

a. Linearidade

Um sistema é dito linear se forem atendidos os princípios da superposição e homogeneidade.

Nise (p.71, 2009, grifo do autor) diz que: “A propriedade da *superposição* significa que a resposta na saída de um sistema à soma de entradas é igual à soma das respostas às entradas individuais.” Assim sendo, considerando um sistema com uma entrada $r_1(t)$ que produz uma saída $y_1(t)$, e uma outra entrada $r_2(t)$ produz uma saída $y_2(t)$, dessa forma, para que o princípio da superposição seja satisfeito é necessário que uma entrada igual à soma $r_1(t) + r_2(t)$ produza uma saída igual à soma $y_1(t) + y_2(t)$.

O princípio da homogeneidade ocorre quando para uma entrada $r_1(t)$ que produz uma saída $r_2(t)$, uma entrada $ar_1(t)$ produzirá uma saída $ay_1(t)$, sendo a uma constante escalar. Portanto, para que o sistema satisfaça o princípio da homogeneidade é necessário que a multiplicação de sua entrada por uma constante escalar forneça uma saída também multiplicada pela mesma constante escalar (NISE, p.71, 2009).

b. Variância e Invariância

Um sistema dinâmico linear constituído por elementos lineares de parâmetros concentrados² é denominado invariante no tempo quando não ocorre variação ao longo do tempo desses parâmetros, podendo assim ser descrito por uma equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes (OGATA, p.12, 2010). Nesse tipo de sistema, sua dinâmica não se altera substancialmente durante um período temporal em que se é considerado o comportamento do sistema (AGUIRRE, p.54, 2007). Dessa forma, um sistema linear invariante pode ser descrito pela equação diferencial

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_n x^n + b_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + b_1 x' + b_0 x$$

onde a_n e b_n são constantes que representam os parâmetros concentrados.

Sistemas dinâmicos lineares nos quais os parâmetros sofrem alterações com o decorrer do tempo são conhecidos como sistemas lineares variantes no tempo, onde os coeficientes de sua equação diferencial são funções de tempo (OGATA p.12, 2010). Portanto, considerando um sistema linear variante no tempo, sua equação diferencial é expressa na forma

$$\begin{aligned} a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y \\ = b_n(t)x^n + b_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + b_1(t)x' + b_0(t)x \end{aligned}$$

onde $a_n(t)$ e $b_n(t)$ são funções de tempo que representam os parâmetros concentrados do sistema.

A maioria dos sistemas reais variam seus parâmetros com o passar do tempo, seja devido ao envelhecimento ou mesmo por condições diferentes de operações. Em vista disso, a variância e a invariância são conceitos aplicados dentro de um intervalo de tempo finito (AGUIRRE, p.54 e 55, 2007), sendo que na realidade todos os sistemas reais são variantes quando o tempo tende ao infinito.

² Um sistema possui parâmetros concentrados quando seu conjunto de variáveis dependentes variam apenas em função de uma variável dependente (no caso de sistemas dinâmicos, variam apenas em função do tempo). Esse tipo de sistema pode ser descrito por uma equação diferencial ordinária (MONTEIRO, p.49, 2006).

c. Quantidade de entradas e saídas

Um sistema dinâmico pode ser caracterizado como monovariável ou multivariável conforme o número de entradas e saídas. Sistemas que possuem uma entrada e uma saída são denominados monovariáveis ou SISO (*single input - single output*, do inglês “entrada simples e saída simples”). Os sistemas que possuem diversas entradas e saídas são conhecidos como multivariáveis ou MIMO (*multiple input - multiple output*, do inglês “múltiplas entradas e múltiplas saídas”). Deve-se ter em mente que a escolha de um modelo monovariável não requer que o seu sistema real tenha apenas entradas e saídas únicas, na prática, elas podem ser desconhecidas ou até mesmo desprezadas (AGUIRRE, p.59, 2007).

2.1.1.2 – Sistemas de Controle

Um sistema de controle é constituído por subsistemas e processos que tem por finalidade à obtenção de uma saída com valor e desempenho desejado, para uma entrada específica fornecida (NISE, p.2, 2009). A relação de entrada-saída originada pela interação entre os componentes do sistema representa uma relação de causa e efeito que retrata o processamento do sinal de entrada para fornecer um sinal de saída variável, normalmente com uma amplificação de potência (DORF e BISHOP, p.2, 2009).

Um sistema de controle industrial é formado por uma planta ou processo, um controlador, um sensor e um atuador. A planta é um objeto físico ou mesmo um conjunto que funciona de maneira integrada realizando uma determinada operação da qual se deseja controlar, como por exemplo uma caldeira, um reator nuclear ou uma espaçonave. A essa operação realizada pela planta é dado o nome de processo, que é definido como sendo uma ação contínua e sistemática, podendo ser artificial ou natural, objetivando atingir determinado fim ou resultado. Um processo é uma operação qualquer que deseja-se controlar, seja ele químico, econômico ou biológico (OGATA, p.2 e3, 2010). O controlador é o componente do sistema de controle responsável por determinar o desvio entre os valores da saída e da entrada de referência (valor desejado) do sistema por meio da comparação entre eles e produz um sinal de controle capaz de reduzir esse erro a zero ou a um pequeno valor (OGATA, p.18, 2010). O sensor é um dispositivo de medição que converte a variável de saída do sistema em outra variável (como deslocamento, pressão, tensão, corrente e entre outras) compatível com a grandeza medida na entrada do controlador para que seja feita a comparação com o valor de referência. Esse componente está inserido no ramo de realimentação da saída em um sistema em malha fechada. Por fim, o atuador é um dispositivo de potência responsável por produzir um sinal na entrada da planta, conforme o sinal de controle, com a finalidade de alterar o valor da saída de modo que se aproxime do sinal de referência (OGATA, p18, 2010). Esse elemento também pode ser considerado um conversor de variáveis, pois ele deve converter o sinal da saída do controlador em um sinal capaz de alterar a variável de saída do sistema.

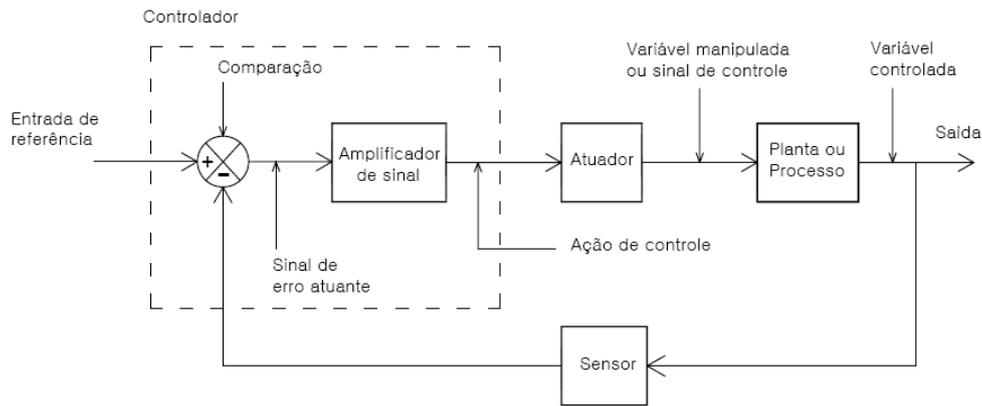


Figura 2.1: Representação em diagrama de blocos de um sistema de controle industrial constituído de um controlador automático, um atuador, uma planta ou processo e um sensor.
Fonte: Própria, baseado em Ogata (p.18, 2010).

Cada variável de um sistema de controle recebe uma denominação específica. A grandeza do sistema que é medida e controlada é chamada de variável controlada, ela representa a saída do sistema. A grandeza ou condição necessária para modificar o valor da variável de controle é conhecida como variável manipulada ou sinal de controle. Seu valor é alterado pelo atuador através da ação de controle gerada pelo controlador, quando o último detecta um sinal de erro atuante entre a variável controlada e a entrada de referência. O sinal de referência ou entrada de referência é o valor desejado para a variável manipulada. Ele está inserido no controlador e representa o parâmetro de referência na comparação do desvio da variável controlada (OGATA, p2 e 18, 2010).

2.1.1.3 – Sistemas de Controle de Malha Fechada e Malha Aberta

Conforme Ogata (p.06, 2010), um sistema que possui a capacidade de estabelecer uma relação de comparação entre a entrada de referência e a saída (utilizando a diferença entre eles como meio de controle) é chamado de sistema de controle com realimentação, ou comumente conhecido como sistema de malha fechada. Nesse tipo de configuração de um sistema de controle, o sinal de erro originado pela diferença entre o sinal de entrada e o sinal realimentado da saída (podendo ser o próprio sinal de saída, ou uma função de seu sinal e suas derivadas ou integrais) é enviado ao controlador, de modo que ele minimize o erro atuante e gera uma compensação no sinal de saída do sistema conforme o valor desejado (ou set-point). Esses sistemas podem ser encontrados em várias áreas e não somente na engenharia, como por exemplo o corpo humano, considerado um sistema com realimentação bastante desenvolvido. A temperatura corporal e a pressão sanguínea permanecem constantes, sendo relativamente insensíveis a mudanças do ambiente externo através de uma realimentação de ordem fisiológica, permitindo o perfeito funcionamento do corpo.

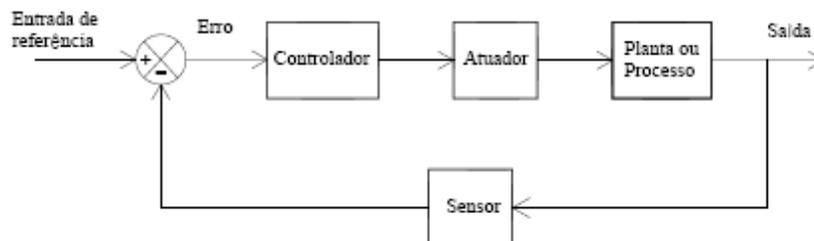


Figura 2.2 Representação em diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.
Fonte: Própria, baseado em Dorf e Bishop (p.2, 2009).

Já nos sistemas de controle de malha aberta, de acordo com Ogata (p.07, 2010), o sinal da saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema, ou seja, o sinal de saída não é medido

nem realimentado para que haja a comparação com a entrada de referência. Dessa maneira, cada sinal de entrada corresponde a uma condição fixa de saída, sendo que a precisão do sistema depende de uma calibração. Portanto, na presença de distúrbios internos ou externo, esse tipo de sistema de controle não possui a capacidade de corrigir a saída acarretando à não execução satisfatória da tarefa desejada. É interessante notar que qualquer sistema de controle que efetue operações em uma sequência baseada no tempo é um sistema de malha aberta, como por exemplo o controle de tráfego realizado pelos semáforos.

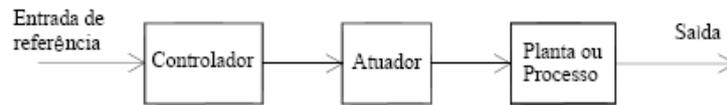


Figura 2.3 Representação em diagrama de blocos de um sistema de controle em malha aberta.
 Fonte: Própria, baseado em Dorf e Bishop (p.2, 2009).

Os sistemas de controle de malha fechada levam vantagem sobre os de malha aberto devido ao uso da realimentação da saída, que faz com que a resposta do sistema se torne menos sensível a ruídos, distúrbios externos e a variações internas de seus parâmetros (NISE, p.08, 2009). Observando pela ótica da estabilidade, os sistemas de controle em malha fechada pode apresentar uma tendência de correção do erro além do necessário, provocando oscilações de amplitude constante ou variável. Já para os sistemas de controle de malha aberta esse problema se torna menos significativo em virtude da simplicidade e facilidade de construção, pois o número de componentes utilizados em um sistema de malha fechada é maior (OGATA, p.07, 2010).

2.1.1.3 – Função de Transferência

A função de transferência, segundo Nise (p.15, 2009) é um modo de representação matemática que fornece, de forma mais intuitiva que as equações diferenciais, informações a respeito de um sistema dinâmico. Ela permite realizar, de forma mais fácil, alterações nos parâmetros do sistema e visualizar rapidamente os efeitos provocados na sua saída.

“A *função de transferência* de um sistema representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída (função resposta – *response function*) e a transformada de Laplace da entrada (função de excitação – *driving function*), admitindo-se todas as condições iniciais nulas.” (OGATA, p.12, 2010, grifo do autor).

Desse modo, considerando um sistema linear invariante no tempo expressado pela equação diferencial

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_n u^n + b_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad 2.1$$

onde $n \geq m$, sendo que y representa a saída e u a entrada. Assim, de acordo com a definição da função de transferência, aplicando-se a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (2.1) e considerando as condições iniciais nulas, tem-se que:

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{(n-1)} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ = b_n s^n U(s) + b_{n-1} s^{(n-1)} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned}$$

Deixando $Y(s)$ e $U(s)$ em evidência, a equação pode ser expressa como:

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s)(b_n s^n + b_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + b_1 s + b_0)$$

Por fim, reescrevendo a equação anterior, tem-se que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s) \quad 2.2$$

A equação (2.2) corresponde a uma função de transferência de um sistema de malha aberta (Figura (2.4-a)), um modelo no domínio da frequência (plano complexo s) que permite descrever completamente a dinâmica do sistema representado. A variável s de potência n no denominador da função de transferência indica a ordem do sistema, podendo classificá-lo como sistema de ordem n .

Na função de transferência de um sistema de malha fechada, conforme a Figura (2.4-b), a saída pode ser expressa como:

$$C(s) = G(s)E(s) \quad 2.3$$

onde $E(s)$ refere-se ao erro atuante, que pode ser escrito como:

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad 2.4$$

Substituindo na equação (2.3) o termo $E(s)$ pela equação (2.4), tem-se que

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

Reescrevendo-a fica:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad 2.5$$

Portanto, a equação (2.5) representa a função de transferência de um sistema de malha fechada que permite observar a dinâmica de um sistema realimentado (OGATA, p17, 2010).

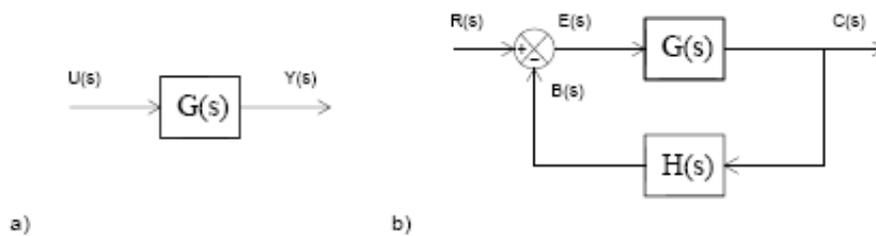


Figura 2.4: Representação em diagrama de blocos de um sistema com função de transferência $G(s)$ em malha aberta (a) e em malha fechada (b).

Fonte: Própria, baseado em Dorf e Bishop (p.78 e 80, 2009).

É importante salientar que a função de transferência é uma propriedade inerente ao sistema, e não depende da magnitude e nem a natureza da função de entrada ou excitação. Seu conceito possui uma aplicabilidade restrita apenas a sistemas que sejam lineares e invariantes no tempo. Caso não seja conhecida, é possível determiná-la experimentalmente através do auxílio de entradas conhecidas e do estudo das respectivas respostas observadas no sistema. Ela não fornece nenhuma informação referente a estrutura física, por isso, diversos sistemas físicos diferentes podem possuir funções de transferências idênticas (OGATA, p.13, 2010).

Considerando a função de transferência

$$G_a(s) = \frac{s + 1}{(s + 1 - j\omega)(s + 2)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

onde $p(s)$ representa o polinômio em s do numerador e $q(s)$ representa o polinômio do denominador. Quando igualado a zero, o polinômio $q(s)$, é denominado equação característica (ou polinômio característico) do sistema e suas raízes (que nesse caso são $s_1 = -1 + j\omega$ e $s_2 = -2$) são conhecidas como polos do sistema. As raízes do polinômio $p(s)$, quando também

igualado a zero, é chamado de zeros do sistema (sendo nesse caso apenas $s = -1$) (DORF e BISHOP, p.38, 2009).

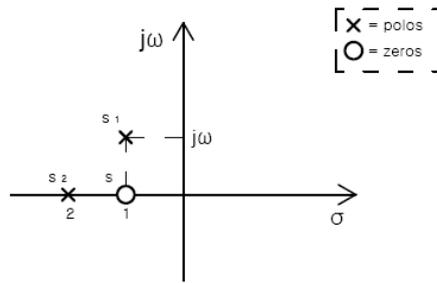


Figura 2.5: Diagrama de polos e zeros da função de transferência $G_a(s)$ no plano complexo s .
Fonte: Própria, baseado em Dorf e Bishop (p.39, 2009).

2.2 – Análise de estabilidade

Em um projeto de sistema de controle é fundamental conhecer previamente o comportamento dinâmico do sistema através do conhecimento de seus componentes. Em vista disso, todo sistema projeto para ser controlado possui uma característica importante de comportamento que é denominada estabilidade absoluta, isto é, se ele é ou não estável. Assim, através dessa característica é possível classificar um sistema dinâmico como sendo estável, criticamente estável ou instável. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é dito estável se quando submetido a uma condição inicial, sua saída sempre regressar a um estado de equilíbrio. Se sua saída apresentar oscilações que permaneçam de maneira contínua indefinidamente, o sistema pode ser chamado de criticamente estável. Caso a saída divergir sem limites da sua referência de equilíbrio, o sistema é classificado como instável (OGATA, p.146, 2010).

“Um sistema é estável se *toda* entrada limitada gerar uma saída também limitada.”
(NISE, p.236, 2009, grifo do autor)

Um critério para se determinar a estabilidade de um sistema é definido em termos da posição dos polos de sua função de transferência no plano complexo s . Um sistema estável possui todos os polos de sua função de transferência localizados no semiplano esquerdo do plano s . Em sistemas instáveis, nem todos os polos estão no semiplano esquerdo, ou seja, ao menos um dos polos está localizado no semiplano direito. Caso haja algum polo sobre o eixo imaginário (eixo $j\omega$) e o restante no semiplano esquerdo, o sistema é chamado de criticamente estável ou marginalmente estável (DORF, p.259, 2009).

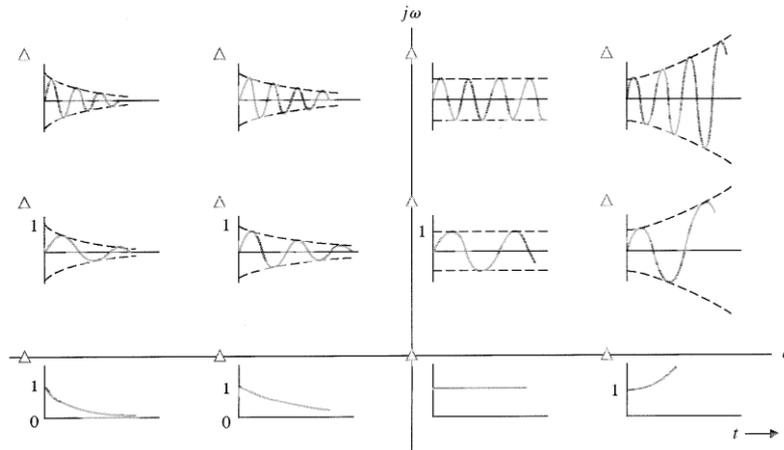


Figura 2.6: Resposta de um sistema ao impulso unitário para várias posições de polos no plano s.
Fonte: (DORF, p.213, 2009).

Diversos sistemas físicos são inerentemente instáveis em malha aberta, contudo, por intermédio de uma realimentação adequada, alguns desses sistemas em malha fechada podem ser estabilizados. Sabendo que o sistema é estável em malha fechada, então é possível determinar seu grau de estabilidade, ou seja, em quais condições esse sistema é estável e em quais ele pode se tornar instável. A essa condição é dado o nome de estabilidade relativa (DORF, p.257, 2009).

2.2.1 – Critérios de estabilidade de Routh

O critério de estabilidade de Routh é um método capaz de apontar a existência ou não de polos instáveis por meio dos coeficientes da equação característica, sem a necessidade de resolvê-la, e com isso, definir a estabilidade absoluta do sistema de controle (OGATA, p.192, 2010). Através desse método é possível identificar o número de polos em cada semiplano, contudo, suas coordenadas não podem ser determinadas (NISE, p.238, 2009).

Dessa maneira, considerando um sistema com a função de transferência definida como:

$$G(s) = \frac{b_0s^n + b_1s^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{a_0s^n + a_1s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

sendo o denominador $D(s)$ a equação característica do sistema. Desse modo, o polinômio $D(s)$ pode ser escrito como

$$a_0s^n + a_1s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

onde $a \in \mathcal{R}^+$. A positividade e não nulidade dos coeficientes da equação característica é uma condição necessária, mas não suficiente para a estabilidade do sistema. Isso se deve ao fato de que alguns sistemas instáveis possuem os coeficientes positivos em sua equação característica. Assim sendo, se todos os coeficientes forem positivos, é possível organizá-los em linhas e colunas formando uma tabela seguindo o seguinte padrão (OGATA, p.192, 2010):

$$\begin{array}{cccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 & f_1 & f_2 & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array}$$

A primeira coluna é formada pela variável s , começado pela de maior potencial (n). O número de linhas é dado por $n + 1$. A primeira linha (a de s^n) é formado pelos coeficientes de índices pares do polinômio e a segunda é formada pelos de índices ímpares. O processo de formação da linha seguinte é realizado através dos cálculos de b_1, b_2, b_3 como segue:

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}$$

$$\vdots$$

O cálculo dos valores de b permanece até que os elementos restante sejam todos nulos. O mesmo método é utilizado para determinar os valores de c, d, e , e assim sucessivamente se necessário. Dessa forma

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}$$

$$\vdots$$

e

$$d_1 = \frac{- \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{- \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1}$$

$$\vdots$$

O critério de estabilidade de Routh estabelece que o número de polos da equação característica do sistema situados no semiplano direito do plano s é igual ao numero de mudanças de sinal na primeira coluna de coeficientes. Portanto, de acordo com esse método, um sistema é dito estável se não o houver mudança de sinal na primeira coluna de coeficientes.

Por exemplo, considerando a equação característica de quarta ordem (OGATA, p193, 2010)

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

onde todos os seus coeficientes possuem valores positivos, sendo assim, a matriz dos coeficientes é dada como:

$$\begin{array}{r}
s^4 \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \\
s^3 \quad a_1 \quad a_3 \quad 0 \\
s^2 \quad -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = b_1 \quad -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{a_1} = b_2 \quad -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{a_1} = 0 \\
s^1 \quad -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1 \quad -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0 \quad -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0 \\
s^0 \quad -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1 \quad -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0 \quad -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0
\end{array}$$

A matriz reescrita fica:

$$\begin{array}{r}
s^4 \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \\
s^3 \quad a_1 \quad a_3 \quad 0 \\
s^2 \quad b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad a_4 = b_2 \quad 0 \\
s^1 \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad 0 \quad 0 \\
s^0 \quad d_1 = b_2 = a_4 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Desse modo, a condição para que o polinômio possua polos com parte negativa é que

$$a_1 a_2 > a_0 a_3 \text{ e } b_1 a_3 > a_1 b_2$$

Em alguns casos é passível de ocorrer um elemento nulo em qualquer linha da primeira coluna. Caso o restante dos outros elementos não sejam nulos, é possível substituir o elemento nulo por um número muito pequeno ϵ e, assim, permitir o restante do cálculo (OGATA, p.194, 2010). Por exemplo, dada a equação

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

onde sua matriz fica como

$$\begin{array}{r}
s^3 \quad 1 \quad 1 \\
s^2 \quad 2 \quad 2 \\
s^1 \quad 0 = \epsilon \\
s^0 \quad 2
\end{array}$$

Pode-se observar que o sinal do elemento acima de ϵ (nesse caso o 2) é igual ao sinal do elemento abaixo (também 2), dessa forma, isso aponta para a existência de um par de raízes imaginárias.

Caso ocorra do sinal do elemento acima do zero (ϵ) ser oposto ao sinal do elemento abaixo, como por exemplo, no polinômio

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

onde sua matriz é

$$\begin{array}{r}
s^3 \quad 1 \quad -3 \\
s^2 \quad 0 = \epsilon \quad 2 \\
s^1 \quad -3 - \frac{2}{\epsilon} \\
s^0 \quad 2
\end{array}$$

então, pode-se notar que ocorreram duas mudanças de sinais. Houve a mudança de sinal do elemento da primeira linha para o da terceira e desse último para o da quarta. Por esse motivo, o polinômio apresenta duas raízes no semiplano direito do plano s .

É possível ocorrer também o caso em que todos os coeficientes em uma linha calculada serem nulos, o que aponta para a existência de raízes de mesmo valor e radialmente oposta. Em tal caso é possível continuar calculando o restante da matriz através da substituição da linha nula pela derivada de um polinômio auxiliar formado pelos elementos da linha anterior a ela (OGATA, p.194, 2010). Tendo como exemplo a seguinte equação:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

da qual resulta a seguinte matriz de coeficiente:

$$\begin{array}{r}
s^5 \quad 1 \quad 24 \quad -25 \\
s^4 \quad 2 \quad 48 \quad -50 \\
s^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Percebe-se que todos os elementos da linha s^3 são nulos, dessa maneira, a linha s^4 forma então o polinômio auxiliar $P(s)$, representado como:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

É importante observar que a potência de cada variável s multiplicada pelos coeficientes do novo polinômio formado pelos elementos da linha s^4 são iguais aos que esses mesmos coeficientes multiplicam no polinômio original. Outro ponto importante é que o novo polinômio indica que existem dois pares de raízes de mesmo módulo (isto é, iguais valores) e sinais opostos (OGATA, p.195, 2010).

Formado o polinômio auxiliar $P(s)$ sua derivada é:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Assim, os termos da linha s^3 são substituídos pelos coeficientes da diferenciação, e a nova matriz calculada fica:

$$\begin{array}{r}
s^5 \quad 1 \quad 24 \quad -25 \\
s^4 \quad 2 \quad 48 \quad -50 \\
s^3 \quad 8 \quad 96 \\
s^2 \quad 24 \quad -50 \\
s^1 \quad 112.7 \\
s^0 \quad -50
\end{array}$$

Nota-se que ocorre uma mudança de sinal na primeira coluna da matriz, entre a linha s^1 e s^2 , portanto, o polinômio original possui uma raiz com parte real positiva.

O critério de estabilidade de Routh possui uma aplicação limitada, pois permite identificar apenas a estabilidade absoluta de um sistema. Na prática, muitas vezes é insuficiente, pois normalmente necessita-se de informações sobre a estabilidade restrita. No entanto, é possível observar os efeitos quando ocorre a mudança de um ou dois parâmetros do sistema por meio da verificação dos valores que causam a instabilidade. Outro meio apropriado de analisar a estabilidade relativa de um dado sistema utilizando esse método é deslocar o eixo imaginário $j\omega$

do plano s (OGATA, p.194, 2010). Esse deslocamento é feito substituindo s na equação característica do sistema por

$$\hat{s} = s + \sigma$$

onde σ é uma constante que representa o deslocamento no eixo real σ do plano complexo. Após a mudança de s , então aplica-se o critério de Routh-Hurwitz no novo polinômio seguindo os mesmos critérios.

2.3 – Projeto de um Controlador Clássico

2.3.1 – Análise da Resposta Temporal de um Sistemas de Segunda Ordem

No projeto de um sistema de controle, deve-se definir alguns critérios de desempenho. Com base nesses critérios escolhidos para o sistema, seus parâmetros podem ser ajustados para que o sistema responda conforme o desejado. Devido a dinâmica inerente nos sistemas, o seu desempenho é normalmente especificado pelo comportamento da resposta transitória e resposta em regime permanente (DORF e BISHOP, p.202, 2009).

Todo sistema físico controlado possui energia armazenada, no entanto, quando a entrada do sistema é submetida a um sinal de controle, sua saída pode não ser capaz de seguir a entrada imediatamente, e com isso, apresentando uma resposta transitória antes que alcance o valor desejado ou algo próximo em regime permanente. Na prática, a maioria dos sistemas demonstram uma resposta transitória com oscilações amortecidas antes de alcançar o uma resposta estabilizada (OGATA, p.146, 2010). Portanto, a resposta transitória é o comportamento observado no sistema antes que alcance a estabilidade e a resposta em regime permanente é o comportamento do sistema após alcançá-la.

A característica da resposta transitória de cada tipo de sistema está relacionada com a ordem que ele apresenta. Nesse presente trabalho será abordado apenas as características da resposta transitória de um sistema de segunda ordem por representar os aspectos do sistema escolhido.

Um sistema de segunda ordem é aquele em que o denominador de sua função de transferência possui o termo s de maior potência igual a dois. Todos os sistemas com essa característica são generalizados por um modelo de função de transferência chamado de forma padrão, do qual pode ser descrita pela expressão:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 2.6$$

onde ω_n representa a frequência natural não amortecida e ζ o coeficiente de amortecimento. Através desses dois parâmetros é possível descrever e caracterizar o comportamento dinâmico da resposta transitória do sistema, quando submetido a um sinal de entrada. Muitas das vezes, na prática, não há um conhecimento prévio desse sinal de entrada pois ele pode ser de caráter aleatório e seus valores instantâneos não podem ser expressados de maneira analítica. Devido a isso, geralmente são utilizados como sinais de entrada funções típicas de testes como: a degrau, a rampa, a parábola de aceleração, a impulso, as senoidais e o ruído branco (OGATA, p.145, 2010). O sinal típico de teste utilizado nesse trabalho é a função degrau.

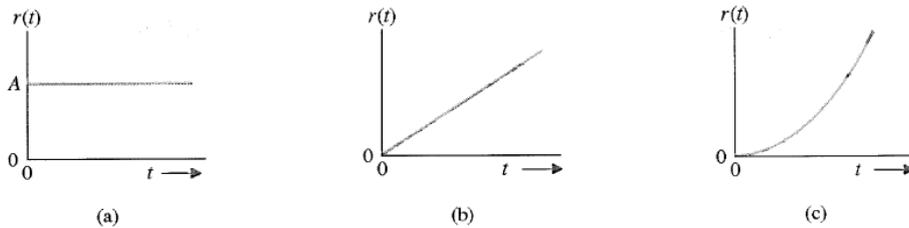


Figura 2.7: Representação gráfica dos sinais de entrada de teste: função degrau (a), função rampa (b), função parábola de aceleração (c).

Fonte: (DORF e BISHOP, p.203, 2009).

Um sistema de controle de segunda ordem apresenta alguns comportamentos observados na resposta transitória de acordo com determinados valores do coeficiente de amortecimento ζ . Esse tipo de comportamento apresentado pelo sistema permite classificá-lo como sendo: subamortecido, sem amortecimento, criticamente amortecida ou superamortecida.

a. Sistema subamortecido

Em um sistema subamortecido o coeficiente de amortecimento assume valores no intervalo aberto entre zero e um, ou seja $0 < \zeta < 1$. Nesse caso, os polos de malha fechada do sistema são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano complexo s (OGATA, p151, 2010). Desta maneira, a função de transferência desse tipo de sistema pode ser escrita como sendo

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \quad 2.7$$

onde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, conhecida como frequência natural amortecida do sistema.

Considerando uma função degrau unitário como sinal de entrada, onde sua transformada de Laplace é $1/s$, a saída $C(s)$ do sistema descrito pela equação (2.7) pode ser escrita, como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

Para se obter a transformada de Laplace inversa da equação anterior é necessário realizar o método das frações parciais. Dessa forma, a equação fica:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad 2.8$$

Conforme a tabela de pares de transformadas de Laplace (OGATA, p.781, 2010), pode-se afirmar que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

Portanto, a transformada inversa de Laplace da equação (2.8) e dada com:

$$\begin{aligned}
L^{-1}[C(s)] = c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\
&= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \text{ para } t \geq 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pode-se observar que a frequência de oscilação da resposta transitória é causada pela frequência natural de amortecimento do sistema ω_d , e sua variação está diretamente associada a variação do coeficiente de amortecimento ζ (OGATA, p.152, 2010). Nota-se, através da equação (2.7) e da Figura (2.8), que ω_d representa a parte imaginária do polo complexo, portanto, é possível concluir que a parte imaginária do polo complexo é responsável pela frequência de oscilação, como observado também pela Figura (2.6) (NISE, p.134, 2009). A resposta do sistema em regime permanente (ou seja, quando $t \rightarrow \infty$) não possui erro entre o valor da entrada e o da saída (OGATA, p.152, 2010).

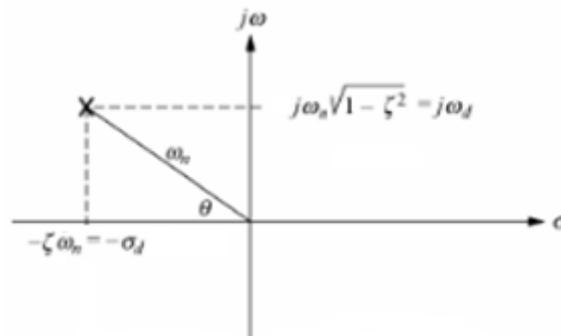


Figura 2.8 Representação de um polo complexo conjugado em termo de ω_n , ζ e ω_d .
Fonte: Própria, baseado em Ogata (p.156, 2010).

b. Sistema sem amortecimento

Um dado sistema é dito sem amortecimento quando o valor do coeficiente de amortecimento ζ é igual a zero, o qual, ocasiona o não amortecimento da resposta transitória e conseqüentemente uma oscilação indefinida quando $t \rightarrow \infty$ (OGATA, p.152, 2010). Seus polos são imaginários puros e conjugados, isto é, um se localiza na parte positiva e outra na parte negativa do eixo imaginário (ou eixo das ordenadas) do plano complexo s (NISE, p.135, 2009).

Considerando ζ nulo na equação (2.9) a resposta $c(t)$ do sistema resulta em:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \text{ para } t \geq 0 \tag{2.10}$$

Nota-se através da equação (2.10) que ω_n representa a frequência de oscilação natural do sistema sem amortecimento. Ou seja, quando o amortecimento for reduzido a zero, a resposta do sistema oscila com frequência igual a ω_n . Caso o sistema linear possua algum amortecimento, não será possível observar sua frequência ω_n de forma experimental. Nessa situação, a frequência observada será a frequência natural amortecida ω_d , que pode ser escrita como sendo $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$, que sempre será menor que ω_n (OGATA, p.152, 2010).

c. Sistema criticamente amortecido

Quando um sistema possui um coeficiente de amortecimento ζ igual a um, ele é chamado de sistema criticamente amortecido (OGATA, p.152, 2010). Esse tipo de sistema possui um par de polos idênticos localizados no eixo real do plano complexo s (NISE, p.135, 2009).

A saída $C(s)$ de um sistema criticamente amortecido submetido a um degrau unitário $R(s) = 1/s$ em sua entrada pode ser escrito como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n)^2}$$

Onde, sua transformada inversa é (OGATA, p.152, 2010):

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \text{ para } t \geq 0 \quad 2.11$$

É possível notar através da equação (2.11) que a resposta transitória desse tipo de sistema possui um comportamento exponencial. A resposta transitória desse tipo de sistema de segunda ordem é a mais rápida sem ultrapassar a magnitude da função degrau, ou seja, sem ocorrer a incidência de sobressinal (NISE, p.135, 2009).

d. Sistema superamortecido

No último caso, se um sistema possuir um coeficiente de amortecimento ζ maior que um, então será denominado sistema superamortecido (OGATA, p.152, 2010). Esse sistema possui polos reais negativos e distintos, isto significa que estão localizados no eixo real e são diferentes (NISE, p.135, 2009).

Então, a saída $C(s)$ desse sistema, quando submetida a uma entrada em degrau, pode ser escrita como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad 2.12$$

Considerando os polos do sistema superamortecido como $(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n = p_1$ e $(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n = p_2$ e expandindo a equação (2.12) em frações parciais, tem-se que:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{2\zeta^2(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right) \frac{1}{(s + p_1)} + \left(\frac{1}{2\zeta^2(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right) \frac{1}{(s + p_2)}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (2.12) resulta em:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\zeta(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-p_1 t} - \frac{1}{2\zeta(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-p_2 t} \\ c(t) &= 1 + \frac{\omega_n}{2\zeta(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} e^{-p_1 t} - \frac{\omega_n}{2\zeta(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} e^{-p_2 t} \\ c(t) &= 1 + \frac{\omega_n}{2\zeta} \left(\frac{e^{-p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{-p_2 t}}{p_2} \right) \text{ para } t \geq 0 \end{aligned} \quad 2.13$$

Quando o coeficiente de amortecimento ζ for consideravelmente maior que um, ocorre que uma das exponenciais decai mais rapidamente que a outra, resultando em um menor efeito provocado na resposta por essa exponencial de decaimento rápido e, dessa forma, pode-se desprezá-lo. Esse termo é o que possui menor constante de tempo, dessa maneira, percebe-se que ele está associado ao polo mais distante do eixo $j\omega$. Portanto, por exemplo, se o polo $-p_2$ estiver mais próximo do eixo $j\omega$ que o polo $-p_1$ (ou seja, para $|p_2| \ll |p_1|$), consequentemente, pode-se desprezar $-p_1$ para efeito de aproximação da solução. Uma vez retirado o termo exponencial que decresce mais rapidamente, sua resposta será análoga a de um sistema de primeira ordem e, portanto, sua função de transferência permite ser aproximada para (OGATA, p.153, 2010):

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1 - \zeta}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1 - \zeta}} = \frac{p_2}{s + p_2}$$

Essa aproximação é realizada devido ao fato de que tanto a função de transferência original quanto a aproximada possuem respostas idênticas. Dessa maneira, a saída $C(s)$ do sistema aproximado submetido a um sinal de entrada em degrau pode ser expressa como:

$$C(s) = \frac{\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{s(s + \zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})}$$

A resposta da saída $C(s)$ no domínio do tempo é:

$$c(t) = 1 + e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0$$

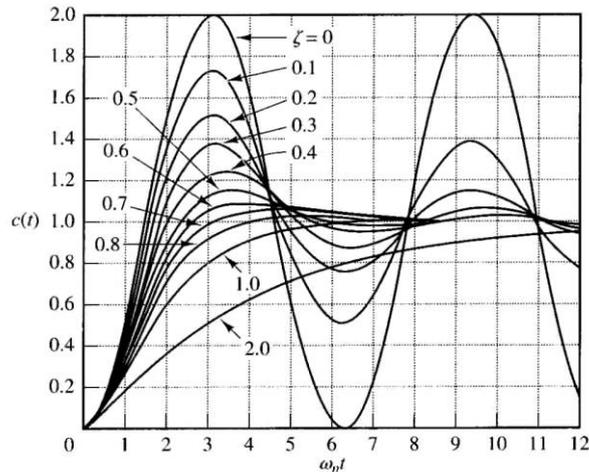


Figura 2.9: Curvas de resposta de um sistema de segundo ordem submetido a uma função de entrada em degrau com variações do coeficiente de amortecimento ζ .

Fonte: Internet³.

2.3.1.2 - Especificações de desempenho da resposta transitória de um sistema de segunda ordem

O comportamento da resposta transitória de um sistema quando submetido a uma função degrau como sinal de entrada é influenciado por suas condições iniciais. Desta maneira, por conveniência é comum na prática considerar a condição inicial padrão como nula, isto é, o sistema deve estar inicialmente em repouso e com o valor da variável de saída e de todas as suas derivadas em função do tempo iguais a zero. Isso se deve ao fator de facilitar a criação de um modelo de referência que seja possível comparar com as características de resposta de vários sistemas. Na prática, antes da saída de um sistema atingir o valor desejado da entrada em regime permanente, frequentemente, sua resposta transitória apresenta uma oscilação amortecida. Assim sendo, as características dessa oscilação no regime transitório da saída de um sistema de controle são comumente especificados como o tempo de atraso t_d , o tempo de subida t_r , o tempo de pico t_p , o máximo sobressinal (ou apenas sobre sinal) M_p , o tempo de acomodação t_s (OGATA, p.154, 2010).

³ Link: <http://www.lee.eng.uerj.br/~jpaulo/Contri/sistemas-de-segunda-ordem.html> (acesso em: jan. 2015)

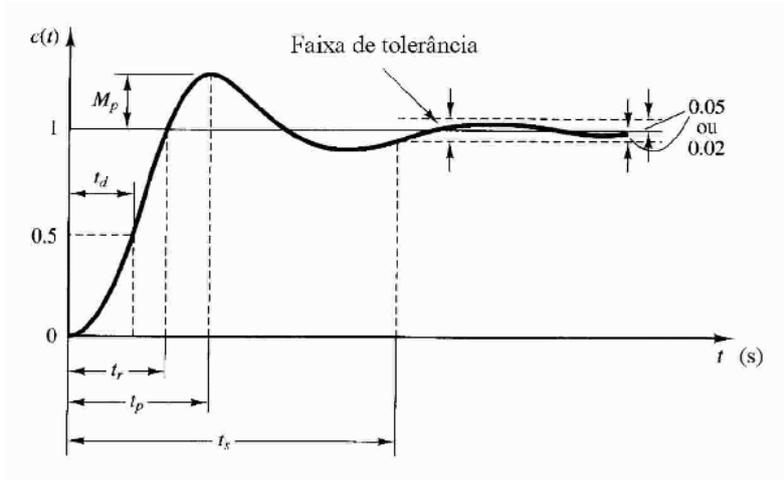


Figura 2.10: Parâmetros de desempenho da resposta transitória de um sistema de segunda ordem.
Fonte: (OGATA, p.155, 2010).

a. Tempo de atraso t_d

Essa especificação refere-se ao tempo requerido pela resposta do sistema para que alcance a metade do seu valor final desejado pela primeira vez (OGATA, p.154, 2010).

b. Tempo de subida t_r

Esse é o tempo requerido para que a resposta da saída passe de 10 a 90%, de 5 a 95%, ou de 0 a 100% do valor final. Em sistemas subamortecidos é comum utilizar um tempo de subida de 0 a 100%, ou seja, nesse caso o tempo de subida seria o tempo transcorrido para que a saída atinge o valor desejado pela primeira vez. Já para sistemas superamortecidos, é utilizado o tempo de subida de 10 a 90% (OGATA, p.154, 2010). O tempo de subida representa uma medida de desempenho que caracteriza a velocidade de resposta do sistema (DORF, et al, p.205, 2009).

Supondo-se que o sistema seja subamortecido e que submetido a uma entrada em degrau unitário, onde no tempo t_r a saída $c(t_r)$ seja igual a um. Assim, a equação (2.9) pode ser escrita como:

$$c(t) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen } \omega_d t_r \right)$$

Como $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 1$, a equação anterior reescrita fica

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen } \omega_d t_r = 0$$

$$\frac{\text{sen } \omega_d t_r}{\cos \omega_d t_r} = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

sendo $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ e $\zeta\omega_n = \sigma$, então

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Portanto, o tempo de subida t_r é dado como sendo:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(-\frac{\omega_d}{\sigma} \right) = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \quad 2.14$$

onde θ representa o ângulo inclinação do segmento de reta formado entre a origem e a localização do polo no plano complexo, como pode ser visto na Figura (2.8).

c. Tempo de pico t_p

O tempo de pico t_p representa o tempo em que a resposta leva para atingir o primeiro sobressinal (isto é, a máxima amplitude do sinal de saída acima do valor final) (OGATA, p.156, 2010). Essa parâmetro representa também uma das medidas de desempenho que caracteriza a velocidade de resposta do sistema (DORF, et al, p.205, 2009).

Pode-se obter o tempo de pico diferenciando a equação (2.9) em relação ao tempo e igualando-a a zero. Dessa forma, a expressão fica:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen } \omega_d t \right) \right]$$

Considerando que a derivada de uma constante é zero e utilizando a regra do produto, então:

$$\frac{dc}{dt} = \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen } \omega_d t \right) + e^{-\zeta\omega_n t} \left(\omega_d \text{sen } \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right)$$

Observa-se que os termos em cosseno se cancelam, portanto

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\zeta^2\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t$$

Tem-se que $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$, então a expressão pode ser simplificada como:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta^2\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \right) \text{sen } \omega_d t \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t \end{aligned}$$

Calculando a diferenciação anterior para $t = t_p$, tem-se que:

$$\left[\frac{dc}{dt} \right]_{t=t_p} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \text{sen } \omega_d t_p = 0$$

Portanto, da equação anterior resulta a expressão

$$\text{sen } \omega_d t_p = 0$$

Sabe-se que o resultado da função $\text{sen}^{-1}x = 0$ pode ser $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, dessa maneira a equação anterior fica:

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Visto que o tempo de pico é definido como sendo o tempo transcorrido até a ocorrência do primeiro pico de sobressinal, onde $\omega_d t_p = \pi$. Assim,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad 2.15$$

Nota-se que o tempo de pico t_p corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida (OGATA, p.156, 2010).

d. Máximo sobressinal M_p

O máximo sobressinal constitui o valor máximo da curva de oscilação amortecida da resposta transitória (OGATA, p.154, 2010). Ou seja, representa o quanto essa oscilação ultrapassa o valor final (ou o valor em regime permanente), podendo também ser chamada de sobrevalor percentual (NISE, p.140, 2009). Esse parâmetro ocorre no tempo de pico $t_p = \pi/\omega_d$. Em vista disso, supondo que seja aplicado um degrau unitário na entrada, onde o valor da saída em regime permanente deva ser um, o valor de M_p pode ser determinado em porcentagem através da expressão:

$$M_p = c(t_p) - 1$$

Substituindo $c(t_p)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} M_p &= -e^{-\zeta\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \left(\cos \omega_d \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right) \right) \\ &= -e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \pi \right) \end{aligned}$$

E por fim, a expressão anterior simplificada fica:

$$M_p = -e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad 2.16$$

A equação (2.16) determinar o valor do máximo sobressinal M_p da resposta transitória de um sistema de controle quando submetido a uma entrada em degrau unitário. Para calcular a porcentagem máxima de sobressinal a equação (2.16) é reescrita como:

$$M_p = \left[-e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \right] \times 100\% \quad 2.17$$

Se o valor do degrau não for unitário, então o valor do sobressinal em porcentagem deve ser determinado pela equação (OGATA, p.157, 2010):

$$M_p = \left[\frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right] \times 100\% \quad 2.18$$

e. Tempo de acomodação t_s

O tempo solicitado para que as oscilações amortecidas transientes alcancem e permaneçam indefinidamente em torno de uma faixa de $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ do valor da saída em regime permanente $c(\infty)$ é denominado tempo de acomodação (ou tempo de assentamento) (NISE, p.140, 2009). Esse parâmetro está diretamente vinculado a maior constante de tempo do sistema, e sua faixa de porcentagem deve ser escolhida através do critério de erro em regime permanente a partir dos padrões adotadas pelo projeto do sistema de controle (OGATA, p.155, 2010).

A resposta transitória da saída de um sistema subamortecido de segunda ordem é dada através da equação (2.9), onde:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \text{ para } t \geq 0$$

Observa-se, a partir da Figura (2.11), que a curva concebida pela resposta $c(t)$ conserva-se sempre dentro de um par de curvas, chamadas de curvas envoltórias, que podem ser descritas pela expressão (OGATA, p.155, 2010)

$$c_e(t) = 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

onde sua constante de tempo é dada por $1/\zeta\omega_n$. Consequentemente, é possível concluir que a velocidade de decaimento das oscilações da resposta transitória está associada ao valor dessa constante de tempo.

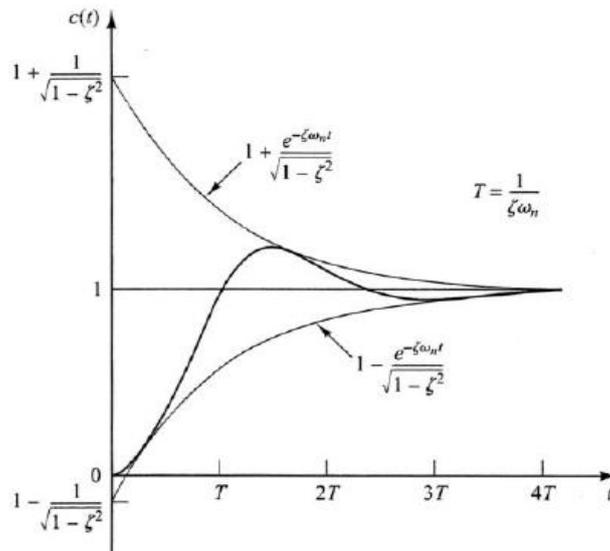


Figura 2.11: Par de curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem subamortecido.
Fonte: (OGATA, p.157, 2010)

2.3.2 – Análise da Resposta em Regime Permanente

O erro de um sistema de controle em regime permanente se dá quando o sinal de saída de um sistema em estado estabilizado não coincidir exatamente com o valor do sinal de entrada, sendo que essa discrepância na resposta final é um indicativo da precisão do sistema. Esse erro pode ser atribuído a diversos fatores, sendo os mais comuns: as não linearidades (como as folgas, imperfeições, desgastes e deteriorações) dos componentes do sistema, atrito estático, alterações na entrada de referência e entre outros (OGATA, p.146 e 203, 2010).

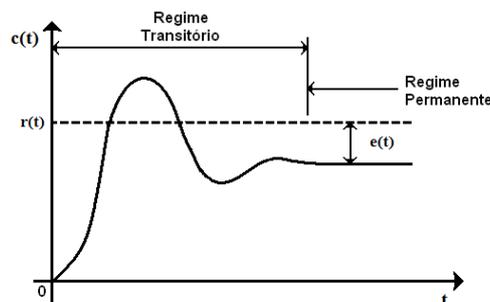


Figura 2.12: Erro em regime permanente de um sistema de segunda ordem subamortecido.
Fonte: Própria, baseado em internet⁴

⁴ Link: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAA_TUAI/teoria-controle (acesso em: jan. 2015)

O erro em regime permanente de um sistema de controle pode ser determinado através de sua função de transferência em malha fechada, ou a partir da função de malha aberta para casos onde a realimentação seja unitária (NISE, p.269, 2009). Dessa forma, considerando um sistema em malha fechada com realimentação unitária, conforme a Figura (2.4-b), representado pela função de transferência

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

sendo $H(s) = 1$.

Reescrevendo a equação anterior de modo que fique apenas $C(s)$ no lado direito:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) \quad 2.19$$

A expressão do erro $E(s)$ do sistema em malha fechada é dado como:

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad 2.20$$

Substituindo a equação (2.19) na (2.20) fica

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) \\ E(s) &= R(s) \left[1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)} \right] \\ E(s) &= \frac{R(s)}{1 + G(s)} \end{aligned} \quad 2.21$$

Ainda que ao aplicar a transformada inversa de Laplace na equação (2.21) seja possível determinar o erro $e(t)$ em qualquer instante de tempo, o interesse principal é determinar o valor final do erro, ou seja, $e(\infty)$. O erro em regime permanente pode ser calculado através do teorema do valor final sem que seja necessário retornar a expressão para o domínio do tempo (NISE, p.269, 2009). Dessa maneira, a expressão é dada como:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad 2.22$$

A utilização do teorema do valor final no cálculo do erro em regime permanente será válida somente se o sistema possuir polos no semiplano esquerdo e na origem do plano s e se a função de transferência em malha fechada do sistema for estável. A equação (2.22) aplicada em sistemas instáveis pode gerar resultados numéricos, entretanto, esses resultados não possuem significado físico (NISE, p.269, 2009).

2.3.3 – Controlador PID

O Controlador PID (proporcional – integral – derivativo) é um algoritmo de controle bastante difundido na indústria, onde pode ser encontrado em seu esquema básico ou modificado. A ampla popularidade desse algoritmo se deve a sua fácil e abrangente aplicação em diversos sistemas de controle. Particularmente, quando não se conhece o modelo matemático do sistema e, por esse motivo, não é possível servir-se dos métodos de projeto analíticos. Essa técnica de controle possui uma controlabilidade satisfatória, ainda que em muitas situações eles não proporcionam um controle ótimo (OGATA, p.521, 2010)

Um dos modelos que descreve um controlador PID relacionando a sua saída $u(t)$ e o sinal do erro atuante $e(t)$ pode ser escrito na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad 2.23$$

sendo sua função de transferência dada pela equação

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad 2.24$$

onde a constante K_p representa o ganho proporcional, o T_i é o tempo integrativo e o T_d , o tempo derivativo. Percebe-se que o algoritmo PID é formado pela soma três termos que desempenham as ações de controle proporcional, de controle integral e controle derivativo, de onde origina-se sua nomenclatura (OGATA, p.21, 2010).

A representação do algoritmo PID dado pelas equações (2.23) e (2.24) pode ser chamado de forma padrão, algoritmo ISA, ou então algoritmo ideal (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.73, 1995, tradução própria). Esse tipo de representação é o utilizado comumente nos processos industriais (FRANKLIN, et al, p.218, 2002, tradução própria).

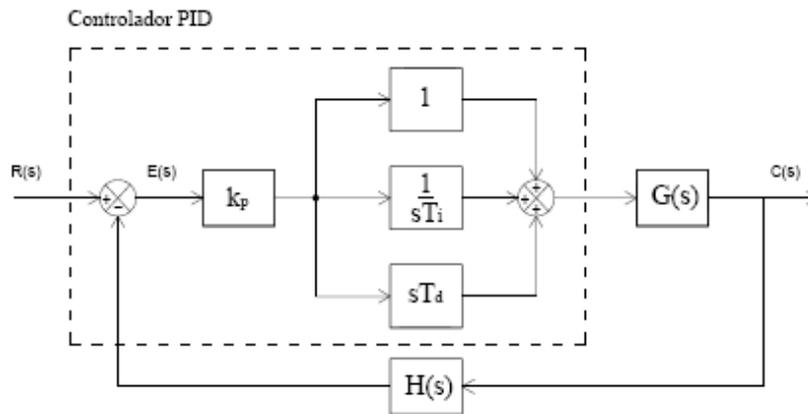


Figura 2.13: Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada com controlador PID de forma padrão.

Fonte: Própria, baseado em Nise (p.374, 2009)

a. Ação de controle proporcional

A ação de controle proporcional é caracterizada por um sinal de controle proporcional ao sinal do erro atuante em função do tempo (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.64, 1995, tradução própria), e sua equação pode ser descrita por meio da relação entre a o sinal de controle $u(t)$ e o sinal de erro atuante $e(t)$ como:

$$u(t) = K_p e(t) \quad 2.25$$

onde K_p é definido como sendo o ganho proporcional.

Sua função de transferência é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad 2.26$$

Na ação de controle proporcional, cada valor do sinal de erro possui um único valor no sinal de controle correspondente. Dessa forma, o sinal de erro pode ser relacionado com o sinal de controle excluindo os valores de erro referentes a faixa fora do intervalo de a 0 e 100% do valor do sinal de controle, isto é, a faixa de saturação da variável manipulada, conforme a Figura (2.14) (FACCIN, p.15, 2004).

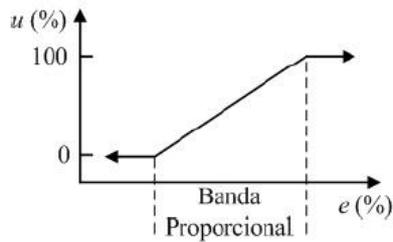


Figura 2.14: Representação gráfica da relação entre o sinal de controle e o erro
Fonte: Internet⁵

O intervalo de atuação da ação de controle proporcional é chamado de banda proporcional B_p , e a inclinação de sua reta é definida pelo ganho proporcional K_p . A relação entre a banda proporcional e o ganho K_p , quando a saída do controlador varia de 0 a 100% (para casos diferentes ela não é válida), é definida pela expressão (FACCIN, p.15, 2004):

$$B_p = \frac{100}{K_p}$$

Por meio da equação anterior verifica-se que conforme o valor do ganho proporcional aumenta o valor da banda proporcional diminui, ou seja, o valor da B_p é inversamente proporcional ao valor de K_p .

Uma importante característica da ação de controle proporcional é desempenhar um rápido ajuste do sinal de controle, e conseqüentemente, um aumento de velocidade no comportamento dinâmico do sistema (FACCIN, p.15, 2004).

Outra característica dessa ação é que, em regime estacionário, ela sempre gera um erro entre a saída e a entrada de referência. A medida que se aumenta o valor do ganho proporcional, ocorre a diminuição do erro e um aumento de oscilação na saída $y(t)$ do sistema de controle. Entretanto, valores muito elevados de ganho conduzem o sistema a instabilidade. Devido a isso, existe um limite superior para seus valores, contudo, o erro em regime estacionário ainda permanece (FRANKLIN, et al, p.216, 2002, tradução própria). É importante dizer que quanto maior o valor do ganho proporcional mais insensível a distúrbios externos e ruídos o sistema se torna (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.66, 1995, tradução própria).

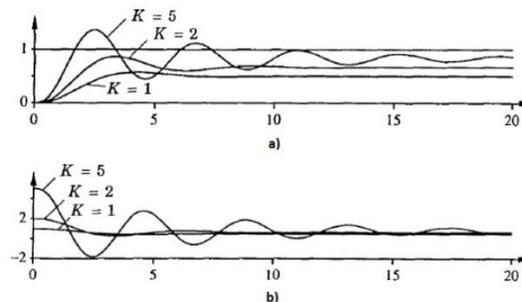


Figura 2.15: a) Gráfico da resposta de um sistema de malha fechada submetido a um degrau unitário para diferentes valores de K_p . b) Gráfico do sinal de controle do mesmo sistema sujeito a diferentes valores de K_p .
Fonte: (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.66, 1995)

Esse erro gerado pela ação de controle proporcional pode ser anulado por intermédio da adição de um termo de compensação, feito por uma escolha adequada para uma dada condição de operação do sistema (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.66, 1995, tradução própria). Sendo assim, a equação (2.25) com o termo compensador pode ser reescrita como:

⁵ Link: http://fabriciosmf.blogspot.com.br/2012_06_03_archive.html (acesso em: jan. 2015)

$$u(t) = K_p e(t) + u_b$$

onde o compensador u_b é denominado bias ou reset. O valor de bias é frequentemente estabelecido como sendo $(u_{m\acute{a}x} + u_{m\acute{i}n})/2$, mas pode ser escolhido de forma específica a fim de que o valor assumido pelo sinal de erro atuante em regime permanente seja anulado conforme o valor estabelecido para a entrada de referência (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.65, 1995, tradução própria).

b. Ação de controle integral

A ação de controle integral possui a finalidade de anular o erro em regime permanente por intermédio do somatório de todos os seus valores passados em determinado intervalo de tempo, isto é, essa ação de controle calcula a área sob da curva do erro. Essa ação de controle é capaz de cancelar qualquer distúrbio constante mesmo quando o erro do sistema seja zero (FRANKLIN, et al, p.217, 2002). A ação integral pode ser comparada a um mecanismo de ajuste automático do termo de compensação u_b da ação proporcional, que em virtude disso, lhe foi dado inicialmente o nome de reset automático (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.68, 1995, tradução própria).

A equação que representa a relação entre o sinal de controle e o sinal de erro atuante em um controlador com ação integral é dada pela expressão

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad 2.27$$

sendo sua função de transferência descrita como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s} \quad 2.28$$

onde T_i corresponde ao tempo integrativo.

Considerando um sistema submetido a uma ação proporcional, o seu erro em regime permanente é removido quando a ação integral é incorporada, com o tempo integrativo assumindo valores finitos, conforme a Figura (2.16). Para grandes valores de T_i , a saída do sistema responde lentamente em direção ao ponto de ajuste. Quando $T_i = \infty$, o controle do sistema assume as características de uma ação proporcional pura. Dessa forma, a escolha de valores pequenos para o tempo integrativo faz com que o sistema tenha uma resposta mais rápida para a correção do erro, mas no entanto, a ação de controle integral diminui a estabilidade do sistema causando uma oscilação em sua saída (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.68, 1995, tradução própria).

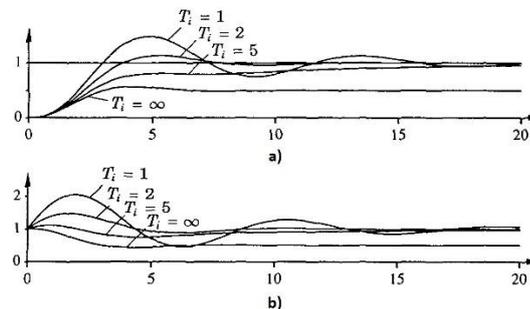


Figura 2.16: a) Gráfico da resposta de um sistema de malha fechada submetido a um degrau unitário e um ganho $K = 1$ para diferentes valores de T_i . b) Gráfico do sinal de controle do mesmo sistema sujeito a diferentes valores de T_i .

Fonte: (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.68, 1995)

c. Ação de controle derivativo

A ação de controle derivativo é responsável por realizar uma correção significativa do valor erro atuante, antecipando-o de forma a não alcançar valores elevados. Essa predição é efetuada por meio da taxa de variação do erro, ou seja, através de sua derivada no tempo. Devido ao fato dessa ação de controle não atuar diretamente no erro, esse modo de controle é sempre utilizado em combinação com uma ação de controle proporcional ou proporcional-integral (OGATA, p.201, 2010).

A relação entre o sinal de controle $u(t)$ e o erro atuante $e(t)$ para a ação proporcional-derivativo pode ser expressa como:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad 2.29$$

sendo sua função de transferência dada conforme a expressão

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s) \quad 2.30$$

onde T_d representa o tempo derivativo.

A Figura (2.17) mostra um sistema de malha fechada submetido a um controle PID onde são mantidos constantes o ganho proporcional $K_p = 3$ e o tempo integrativo $T_i = 2$ para variações do tempo derivativo. Nota-se um aumento no amortecimento da oscilação na resposta transitória do sistema conforme o aumento do valor do tempo derivativo, no entanto, esse amortecimento diminui para valores elevados (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.70, 1995, tradução própria). O aumento do amortecimento na resposta transitória causado pela ação derivativa permite a utilização de um valor mais elevado para o ganho K_p , resultando em maior precisão em regime permanente (OGATA, p.201, 2010).

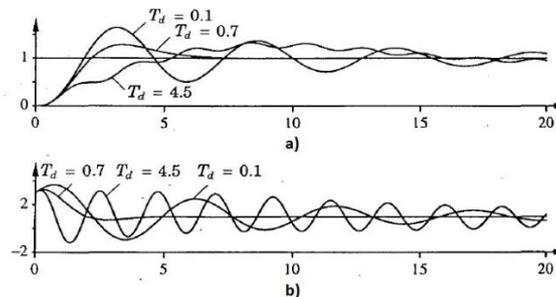


Figura 2.17: a) Gráfico da resposta de um sistema de malha fechada submetido a um degrau unitário com $K_p = 3$, $T_i = 2$ e diferentes valores de T_d . b) Gráfico do sinal de controle do mesmo sistema sujeito a diferentes valores de T_d .

Fonte: (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.70, 1995)

É importante salientar que devido a atuação antecipatória dessa ação de controle, ocorre um aumento na velocidade de resposta do sistema. Por isso, a ação derivativa possui uma maior sensibilidade a erros de alta frequência, como ruídos e mudanças no valor da entrada de referência. Outro ponto importante é que por atuar sobre a taxa de variação do erro, não há correção de erros constante, mesmo que sejam de valores elevados (FACCIN, p.16, 2004).

2.3.3.1 – Sintonia de um controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols

Quando o modelo matemático de um sistema é conhecido, então torna-se possível a aplicação de várias técnicas de projeto para a determinação dos parâmetros do controlador PID que atendam as especificações da resposta em regime transitório e permanente de um sistema em malha fechada. Entretanto, a abordagem analítica geralmente não pode ser empregada no projeto do controlador, pois em razão da complexidade do sistema, seu modelo não pode ser obtido com facilidade, deste modo, deve-se recorrer a uma abordagem experimental (OGATA, p.522, 2010).

Por esse motivo, Ziegler e Nichols propuseram regras de ajuste dos parâmetros de um controlador PID (quando os modelos matemáticos do sistema são desconhecidos) baseados na resposta experimental ao degrau unitário ou na determinação do valor do ganho proporcional crítico K_{cr} , do qual resulta em uma estabilidade marginal no sistema submetido apenas a uma ação de controle proporcional. Essas regras proporcionam um conjunto de valores para o ganho proporcional K_p , para o tempo integrativo T_i e para o tempo derivativo T_d que acarreta em uma operação estável do sistema. No entanto, o sistema resultante pode apresentar valores indesejados de alguns parâmetros de projeto como máximo sobressinal alto, um tempo de acomodação lento e entre outros. Esse fato leva a necessidade de realizar uma sintonia fina até que seja obtido um resultado aceitável. A vista disso, suas regras propiciam uma estimativa dos valores dos parâmetros do controlador PID proporcionando um ponto de partida no processo de sintonia, não sendo, portanto, considerados seus valores definitivos (OGATA, p.522, 2010).

Os métodos de Ziegler-Nichols foram desenvolvidos de forma empírica com base em inúmeros experimentos diversificados. Esses métodos são amplamente utilizados na sintonia de controladores PID em razão de serem simples, intuitivos e exigirem pouco conhecimento sobre o processo. (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.142 e 150, 1995, tradução própria).

a. Método da resposta ao degrau

O método da resposta ao degrau (também conhecido como primeiro método) é baseado na obtenção experimental da resposta do sistema em malha aberta submetido a um degrau unitário na entrada de referência (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.135, 1995, tradução própria). Esse método é aplicado em sistemas que não possuam integradores ou polos complexos conjugados dominantes, tendo sua curva de resposta o aspecto de um S, conforme a Figura (2.18) (OGATA, p.523, 2010).

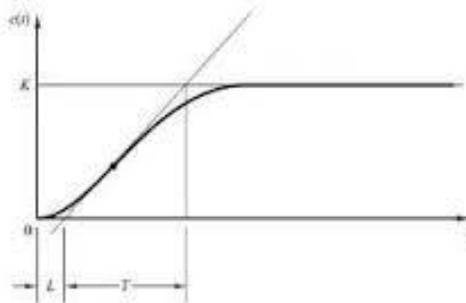


Figura 2.18: Curva com aspecto de S da resposta de um sistema submetido ao degrau unitário.
Fonte: (OGATA, p.523, 2010)

A função de transferência de um sistema que apresenta em sua resposta uma curva em forma de S pode ser expressa como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

que representa um sistema de primeira ordem com tempo de atraso (dado em segundos), onde T é a constante de tempo e L o tempo de atraso. Traçando um reta tangente no ponto de inflexão da curva, sendo sua inclinação dada por $R = K/T$, o valor da constante de tempo é determinado pela distância entre os pontos de interseção da reta tangente com o eixo do tempo e a projeção dos

pontos de interseção da tangente com a reta K também no eixo t . O tempo de atraso L é a distância entre a origem do plano e o ponto de interseção entre a eixo da abscissa e a reta tangente (FRANKLIN, et al, p.221, 2002, tradução própria).

Identificado os valores dos parâmetros L e T , esse método propõem a escolha dos valores de K_p , T_i e T_d através do cálculo das formulas dadas pela abaixo.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2T$	$0.5L$

Tabela 2.1: Valores de K_p , T_i e T_d para o primeiro método de Ziegler-Nichols, baseado na resposta ao degrau. Fonte: Própria (Baseado em Ogata, p.524, 2010).

b. Método da resposta em frequência

O método da resposta em frequência (também chamado de segundo método) é baseado na determinação dos valores do ganho crítico K_{cr} e do período crítico P_{cr} quando a saída apresenta uma oscilação sustentada, tornando o sistema marginalmente estável, ou seja, no limite para se torna instável (OGATA, p.524, 2010).

Esse método foi criado com base na observação de que muitos sistemas podem se tornar instáveis com a escolha de um ganho proporcional muito elevado. Assim sendo, a determinação do valor do ganho critico é feito considerando $T_i = \infty$ e $T_d = 0$ e realizando um aumento gradual no ganho K_p até que o sistema comece a oscilar de forma constante. O valor do ganho quando o sistema apresenta uma oscilação sustentada é o valor do ganho critico K_{cr} , e o período de oscilação da saída é denominado período crítico P_{cr} , como mostrado na Figura (2.19) (ASTRÖM e HÄGGLUND, p.36 e 137, 1995, tradução própria).

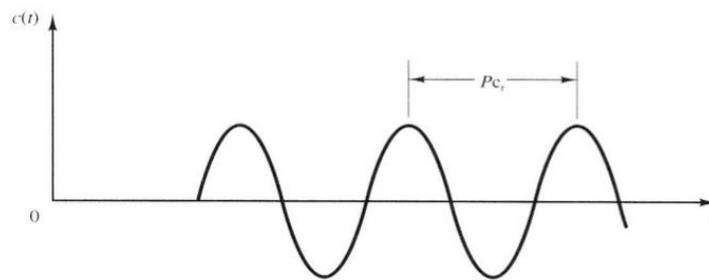


Figura 2.19: Resposta oscilatória com período P_{cr} de um sistema feito marginalmente estável. Fonte: (OGATA, p.524, 2010).

Os valores dos parâmetros K_p , T_i e T_d são escolhidos conforme a solução das formulas apresentadas na Tabela (2.2), utilizando os valores de K_{cr} e P_{cr} .

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Tabela 2.2: Valores de K_p , T_i e T_d para o segundo método de Ziegler-Nichols, baseado na estabilidade crítica do sistema.

Fonte: Própria (Baseado em Ogata, p.525, 2010).

Um meio de obter o valor do ganho crítico K_{cr} que torna o sistema marginalmente estável é utilizando o critério de Routh. Dessa forma, é possível determinar a equação característica resultante, e assim, determinar o período de oscilação sustentada através da obtenção da frequência de oscilação sustentada substituindo $s = j\omega$ na equação encontrada (OGATA, p.526, 2010).

3 - Um resumo sobre a Teoria de Controle Moderno

A teoria de controle moderno, de acordo com Nise (2011, p.94), é uma abordagem que associa os procedimentos de modelagem, análise e projeto de uma abrangente classe de sistemas dinâmicos. Essa técnica, que utiliza como modelo a representação em espaço de estados, trabalha estes sistemas no domínio do tempo (domínio matemático em que as variáveis alteram-se em função do tempo). O modelo em espaço de estados pode ser utilizado para o mesmo grupo de sistemas modelados pela teoria de controle clássico, e tal como para sistemas não lineares que possuam folgas, saturação e zona morta, variantes no tempo e com múltiplas entradas e saídas. Apesar da vantagem de abranger uma maior gama de sistemas, ela necessita de maior quantidade de cálculos antes de uma interpretação física das características e comportamentos de um sistema em seu detrimento, diferentemente das técnicas de controle clássico, que necessitam de menos cálculos e beneficiam-se de representações gráficas. Por outro lado, com a grande disponibilidade de computadores auxiliando nos cálculos dispendiosos, tornou-se atrativo a utilização do domínio do tempo.

3.1 - Modelo em Espaço de Estados

As teorias de controle moderno são fundamentadas em um conceito utilizado na área da dinâmica clássica conhecido como estado do sistema. “O estado de um sistema é um conjunto de variáveis cujos valores, em conjunto com os sinais de entrada e as equações descrevendo a dinâmica, irão fornecer o estado e a saída futuros do sistema.” (DORF; et al, 2009, p.105). Portanto, supondo que um determinado sistema seja multivariável, ou seja, possua múltipla entradas e saídas, e julgando haver r entradas $u_r(t)$ e m saídas $y_m(t)$, logo o estado do sistema pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}$$

onde t representa o tempo variável, u_r é um vetor coluna r -dimensional denominado vetor de entrada ou vetor de controle e x_n , um vetor coluna n -dimensional que representa o estado do sistema, onde seus elementos são conhecidos como variáveis de estado. A esse conjunto composto pelas variáveis de estado é dado o nome de vetor de estado. “Assim, um vetor de estado é aquele que determina univocamente o estado do sistema $x(t)$ para qualquer instante $t \geq t_0$, uma vez que é dado o estado em $t = t_0$ e a entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ é especificada.” (OGATA, 2011, p.25). Dorf (et al, 2009, p.105) diz que “As variáveis de estado descrevem a configuração presente de um sistema e podem ser usadas para determinar a resposta futura, dadas as excitações de entrada e as equações descrevendo a dinâmica”. Tais variáveis são escolhidas, em diversos problemas, de acordo com os parâmetros elementares das leis físicas que regem o comportamento dinâmico do sistema, onde essa equação é chamada de equação de estado (KAWAVERNAK e SIVAN, 1972, p.2).

A quantidade de elementos contida no vetor de estado indica a dimensão de um espaço chamado de espaço de estados, como afirma Ogata (2011, p.25): “O espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de x_1, x_2, \dots, x_n onde x_1, x_2, \dots, x_n são variáveis de estado, é denominado *espaço de estados*.”

Agora, as saídas $y_m(t)$ de um sistema em espaço de estados são variáveis mensuráveis que sofrem a alteração observada no ambiente do sistema, expressada como:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

A equação no espaço de estados de um sistema dinâmico é uma notação vetorial-matricial de um sistema de equações diferenciais escalares de primeira ordem (isto é, a derivada primeira de uma função). Sua representação não é única, diferentemente da representação no domínio da frequência, no entanto, a quantidade de variáveis de estado é sempre a mesma para qualquer que seja a representação do mesmo sistema (OGATA, p.26, 2010). Sendo assim, as equações

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ y(t) &= g(x, u, t) \end{aligned} \quad 3.2$$

no qual,

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 3.1$$

Se o sistema for variante⁶ no tempo e houver a possibilidade de ser linearizado em torno de um ponto de operação, então as equações (3.1) e (3.2) podem ser representadas na forma vetorial-matricial como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \dot{y} &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Onde $A(t)$ é conhecida como a matriz de estados; $B(t)$ a matriz de entrada; $C(t)$ a matriz de saída e $D(t)$ a matriz de transmissão direta que em alguns é considerada nula.

Se o sistema for invariante⁷ no tempo a equação de estado se torna:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{y} &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

⁶ Sistemas variantes no tempo são aqueles que possuem variações paramétricas em sua dinâmica. Como exemplo, a variação de massa de um foguete durante o voo.

⁷ Nos sistemas invariantes no tempo, ao contrário dos sistemas variantes, não possuem variação paramétrica.

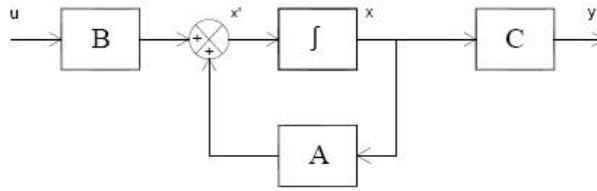


Figura 3.1: Representação em diagrama de blocos do modelo em espaço de estado de um sistema.
Fonte: Própria, baseado em Nise (p.515, 2009).

Sistemas que são constituídos de uma entrada e uma saída figuram no conjunto dos sistemas monovariáveis ou SISO (do inglês *single input – single output*) e suas matrizes possuem as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned}
 x(t) &\in \mathcal{R}^{n \times 1} / \forall t \in R_+ \\
 A &\in \mathcal{R}^{n \times n} \\
 B &\in \mathcal{R}^{n \times 1} \\
 u(t) &\in \mathcal{R}^{1 \times 1} / \forall t \in R_+ \\
 y(t) &\in \mathcal{R}^{1 \times 1} / \forall t \in R_+ \\
 C &\in \mathcal{R}^{1 \times n} \\
 D &\in \mathcal{R}^{1 \times 1}
 \end{aligned}$$

Já sistemas que são compostos por múltiplas entradas e/ou saídas, representam o conjunto de sistemas multivariáveis ou MIMO (do inglês *multiple input – multiple output*) e as dimensões de suas matrizes são:

$$\begin{aligned}
 x(t) &\in \mathcal{R}^{n \times 1} / \forall t \in R_+ \\
 A &\in \mathcal{R}^{n \times n} \\
 B &\in \mathcal{R}^{n \times n_u} \\
 u(t) &\in \mathcal{R}^{n_u \times 1} / \forall t \in R_+ \\
 y(t) &\in \mathcal{R}^{n_y \times 1} / \forall t \in R_+ \\
 C &\in \mathcal{R}^{n_y \times n} \\
 D &\in \mathcal{R}^{n_y \times n_u}
 \end{aligned}$$

3.2 - Análise de sistemas dinâmicos em espaço de estados

3.2.1 - Relação entre função de transferência e equação no espaço de estados

Considerando a função de transferência de um sistema qualquer, escrita como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad 3.3$$

E partindo da representação em espaço de estados desse mesmo sistema,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Onde $x_{n \times 1}$ vetor de estados, $u_{1 \times 1}$ a entrada e $y_{1 \times 1}$ a saída. A transformada de Laplace aplicada a esta equação de estado é dada por:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad 3.4$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad 3.5$$

Visto que a função de transferência de qualquer que seja o sistema é definida como a relação entre as transformadas de Laplace da saída e a da entrada, considerando-se as condições iniciais são nulas (isto é, $x(0) = 0$), a equação (3.4) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$X(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

Pré-multiplicando ambos os lados por $(sI - A)^{-1}$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad 3.6$$

Substituindo a equação (3.6) na (3.5), tem-se:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Então:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \quad 3.7$$

Note que a equação (3.7) envolve o termo $(sI - A)^{-1}$, conseqüentemente $G(s)$ pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|sI - A|}$$

onde o $Q(s)$ representa um polinômio em s . O termo $|sI - A|$ representa o polinômio característico de $G(s)$. As raízes do polinômio característico são denominadas autovalores da matriz $A_{n \times n}$ e suas posições no plano complexo s referem-se a estabilidade dinâmica do sistema. Conclui-se, então, que os autovalores da matriz de estados A são exatamente os polos da função de transferência $G(s)$.

3.2.2 - Solução da equação de estado invariante no tempo não homogênea

Para que seja examinada a resposta transitória e a resposta em regime permanente de um sistema dinâmico é comum a necessidade de se dispor da expressão no domínio do tempo de suas variáveis de estado. Assim sendo, o comportamento de um sistema pode ser obtido através do cálculo da solução geral de sua equação de estados (DORF e BISHOP, 2009, p.124).

Visto que a equação de estados é uma equação diferencial vetorial-matricial, por analogia é possível obter uma solução geral para todo o seu conjunto de sistemas de tempo contínuo aplicando um dos vários métodos de resolução de equações diferenciais escalares. A abordagem a ser utilizada para determinar a sua solução é o método da Transformada de Laplace estendida ao caso vetorial. Deste modo, considerando a equação de estado não homogênea:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

no qual: $x(t)$ = vetor $n \times 1$, $\forall t \in R_+$

$u(t)$ = vetor $r \times 1$, $\forall t \in R_+$

A = matriz $n \times n$

B = matriz $n \times 1$

Supondo que as condições iniciais do sistema sejam nulas, ou seja, em $t_0 = 0$, a Transformada de Laplace aplicada à equação dinâmica é dada por:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Reescrevendo-se a equação de forma que sejam mantidas apenas as variáveis $X(s)$ em seu lado esquerdo, tem-se que:

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \quad 3.8$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação por $(sI - A)^{-1}$ resulta em:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Note que expandindo em série infinita de potências:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^{k+1}} A^k$$

A matriz $(sI - A)^{-1}$ é expandida em uma série de potências infinita que representa um caso particular da série de Taylor em torno do zero conhecida como série de McLaurin. Assim se torna possível aplicar a transformada inversa de Laplace em cada termo da série (OGATA, 2011, p.607):

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = e^{At}$$

A série dada acima converge a uma matriz $n \times n$ para qualquer que seja o valor de t conforme Zill (2001, p.91), isto é, a convergência se dá para a matriz exponencial e^{At} , conhecida como matriz fundamental ou matriz de transição de estados. Por tanto, a equação (3.8) passa a ficar como:

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{At}]x(0) + \mathcal{L}[e^{At}]BU(s)$$

Por fim, aplicando-se a transformada inversa de Laplace nos termos restantes da equação anterior para que ela retorne ao domínio do tempo e observando que a transformada inversa do termo $(s - A)^{-1}BU(s)$ deve ser obtida pelo uso da integral de convolução, então a solução geral da equação de estados é dada por:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad 3.9$$

Analisando o lado direito da equação pode-se observar que o primeiro termo representa a resposta do sistema às condições iniciais $x(0)$, termo este denominado de resposta natural, e o segundo termo a resposta a entrada $u(t)$, denominado resposta forçada. (NISE, 2009, p.161)

Lembrando que na solução encontrada foi considerado que as condições iniciais eram nulas (ou seja, $t_0 = 0$). Entretanto, se o instante inicial (t_0) for diferente de zero, então o termo da equação (3.9) que corresponde à resposta as condições iniciais é modificada deixando a solução como:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

3.2.3 - Matriz de transição de estados

A matriz exponencial e^{At} , conhecida como matriz de transição de estados $\Phi(t)$ fornece a possibilidade de se determinar o estado do sistema no instante t quando conhecido suas condições iniciais $x(t_0)$ (MONTEIRO, 2002, p.120). A vista disto, considerando que a entrada

$u(t)$ é nula, a equação de estados se torna um sistema de equações diferenciais homogêneas do tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

e sua solução geral escrita como:

$$x(t) = e^{At}x(0) = \Phi(t)x(0) \quad 3.10$$

onde:

$\Phi(t)$ = matriz $n \times n$

$x(t)$ = vetor de estado do sistema no instante $t > 0$

$x(0)$ = vetor de estado do sistema no instante inicial t_0

A afirmação é válida visto que:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I$$

Notando que:

$$x(0) = \Phi(0)x(0)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}x(0) = A\Phi(0)x(0) = Ax(t)$$

3.2.4 - Controlabilidade

Segundo Ogata (2011, p. 617) “um sistema será dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito”.

Considerando o sistema de tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde, para o caso SISO:

$x_{n \times 1}$ = vetor de estado

$u_{r \times 1}$ = sinal de controle

$A_{n \times n}$ = matriz de estado

$B_{n \times 1}$ = matriz de entrada

e para o caso MIMO:

$x_{n \times 1}$ = vetor de estado

$u_{n_u \times 1}$ = sinal de controle

$A_{n \times n}$ = matriz de estado

$B_{n \times n_u}$ = matriz de entrada

A controlabilidade completa de estados de um sistema dinâmico qualquer pode ser determinada através da solução da equação de estado invariante no tempo não homogênea. Para isso, é possível supor que o estado final do sistema seja a origem do espaço de estados (ponto de estabilidade do sistema) e que o instante inicial seja $t_0 = 0$.

Como visto anteriormente, a solução das equações de estado é dada pela equação:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Através da definição de controlabilidade completa de estados tem-se que:

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &= e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ e^{At_1}x(0) &= -e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ x(0) &= -\int_0^{t_1} e^{A(\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad 3.11$$

Sabendo que $e^{-A\tau}$ pode ser escrito da forma

$$e^{-A\tau} = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \quad 3.12$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.11), tem-se:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \quad 3.13$$

Admitindo que a $\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau) = \beta_k$, então, a equação (3.13) passa a ficar como:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

podendo ser representada na forma matricial:

$$x(0) = -[B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_1 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim, um dado sistema pode ser dito de estado completamente controlável para qualquer que seja o estado inicial $x(0)$, se e somente se, a Equação seja satisfeita. Para que a equação seja verdadeira, a matriz

$$\mathcal{C} = [B \ : \ AB \ : \ A^2B \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B] \quad 3.14$$

chamada de matriz de controlabilidade, deve possuir posto pleno. Ou seja, que os vetores linhas sejam linearmente independentes (OGATA, 2011, p.618). No caso monovariável, onde a matriz de controlabilidade \mathcal{C} é uma matriz quadrada $n \times n$, ela será de posto pleno caso seja uma matriz não singular, isto é, que o seu determinante seja não nulo.

3.2.5 - Observabilidade

Na prática, o conceito de observabilidade se torna bastante útil no projeto de realimentação de estados, pois em determinadas situações pode ocorrer dificuldades no acesso a algumas variáveis de estado por meio da medição direta. Assim, torna-se necessário que o sistema trabalhado seja observável para que haja a possibilidade da reconstrução dos sinais de controle. A estimação dessas variáveis é feita por meio do conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ (OGATA, 2011, p. 622).

De acordo com Ogata (2011, p. 622) “um sistema será considerado completamente observável se todo estado $x(t_0)$ puder ser determinado pela observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$ ”.

Considerando o sistema sem a existência de uma excitação devido ao um sinal de entrada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

onde no caso SISO:

$x_{n \times 1}$ = vetor de estado
 $y_{n_y \times 1}$ = vetor de saída
 $A_{n \times n}$ = matriz de estado
 $C_{1 \times n_y}$ = matriz de saída

e para o caso MIMO:

$x_{n \times 1}$ = vetor de estado
 $y_{n_y \times 1}$ = vetor de saída
 $A_{n \times n}$ = matriz de estado
 $B_{n \times n_u}$ = matriz de entrada

Desta forma, partindo da solução geral da equação de saída

$$y(t) = C e^{At} x(0) \quad 3.15$$

onde

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

Substituindo então a expressão anterior na equação (3.15), fica:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) C A^k x(0)$$

podendo ser reescrita como:

$$y(t) = \alpha_0(t) C x(0) + \alpha_1(t) C A x(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) C A^{n-1} x(0) \quad 3.16$$

Um determinado sistema é considerado de estado completamente observável, se e somente se, dada a saída $y(t)$ durante um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t$, $x(0)$ é determinado exclusivamente pela equação (3.16). Desta forma, para que a solução da equação seja verdadeira é necessário que na matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad 3.17$$

todas suas colunas sejam linearmente independentes, ou seja, a matriz \mathcal{O} posto coluna pleno. Essa matriz é conhecida como matriz de observabilidade (OGATA, p.624, 2010).

3.3 - Projeto de um Controlador em Espaço de Estados

O controlador baseado no modelo em espaço de estado que será empregado no presente trabalho trata-se de um controle com realimentação de estados onde os ganhos do sistema realimentado serão determinados através da solução do problema de um regulador linear quadrático. O projeto dessa classe de controladores é fundamentado principalmente nos conceitos da teoria de otimização não linear. Essa técnica de controle moderno pode também ser denominada de controle ótimo, onde a solução é uma sequência ótima de entradas de controle. Devido a isso, é importante realizar uma conceituação prévia de assuntos importantes, tais como: mínimos e máximos de funções de várias variáveis, convexidade, modalidade e positividade, pertencentes à área da teoria de otimização.

3.3.1 - Conceitos prévios

A teoria de otimização é baseada na análise de complexos problemas de decisão ou alocação. Ela utiliza uma elegante filosofia para abordar problemas de decisões complexas envolvendo a escolha de valores para um determinado número de variáveis inter-relacionadas, sendo projetado para quantificar o desempenho e medir a qualidade da decisão através da maximização ou minimização de um objetivo de desempenho sujeito a restrições que limitam a seleção de valores para essas variáveis (LUENBERGE e YE, p.01, 2008, tradução própria). O problema de otimização é uma abstração do problema de se realizar a melhor escolha possível de um valor a partir de um conjunto de possíveis opções (BOYD e VANDENBERGHE, p.02, 2004, tradução própria).

A teoria de otimização (ou otimização matemática) é usada como uma ferramenta de auxílio aos responsáveis pela tomada de decisões. Uma incrível variedade de problemas práticos (como projetos, análises e operações) que envolvem a escolha de uma decisão podem ser expressos na forma de um problema de otimização matemática. Dessa maneira, as teorias de otimização tornaram-se ferramentas indispensáveis em muitas áreas como: na engenharia de sistemas de controle, civil, química, mecânica e aeroespacial, sendo utilizada também em problemas que surgem nos setores financeiros, gestão da cadeia de suprimentos, programação e muitas outras áreas (BOYD e VANDENBERGHE, p.03, 2004, tradução própria).

3.3.1.1– Máximos e mínimos

Seja f uma função onde $A \subset D_f$ e $p \in A$, conforme a Figura 3.2. A $f(p)$ é chamada de valor máximo ou que p é o ponto máximo de f em um intervalo A se $f(x) \leq f(p), \forall x \in A$. Se $f(x) \geq f(p)$ para qualquer que seja $x \in A$ então é dito que $f(p)$ é o valor mínimo de f em A (GUIDORIZZI, p.271, 2001).

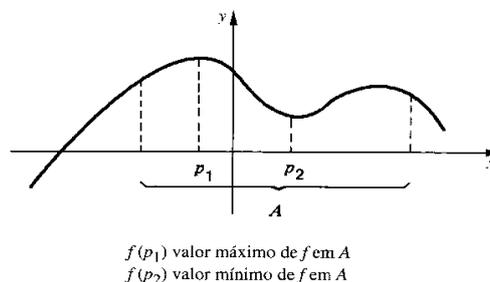


Figura 3.2: O máximo e o mínimo de uma função f .
Fonte: (GUIDORIZZI, p.272, 2001).

A $f(p)$ é chamada de valor máximo global, conforme a Figura 3.3, quando $f(x) \leq f(p)$ para qualquer valor de x pertencente ao domínio D_f da função. Se $f(x) \geq f(p), \forall x \in D_f$, então $f(p)$ é chamada de valor mínimo global. Agora, se existir $r > 0$, tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo

x no intervalo entre $] p - r, p + r [\cap D_f$, então a $f(p)$ é denominada valor máximo local. E se houver um mesmo $r > 0$, tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo x no intervalo entre $] p - r, p + r [\cap D_f$, então a $f(p)$ é denominada valor mínimo local (GUIDORIZZI, p.271, 2001).

O conceito de mínimo e máximo é de grande importante para a teoria de otimização, pois a determinação de seus valores irão representar a determinação da solução ótima (no caso, de o mínimo ou máximo serem globais) de um problema proposto.

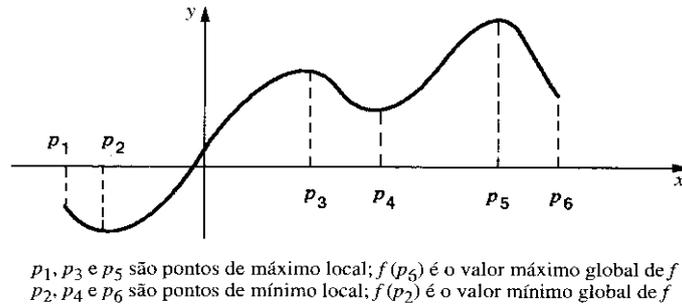


Figura 3.3: Os máximos e o mínimos globais e locais de uma função f .
 Fonte: (GUIDORIZZI, p.272, 2001).

3.3.1.2 – Convexidade

Os conceitos relacionados aos conjuntos convexos são considerados por Luenberger e Ye (p.515, 2008, tradução própria) essencialmente importantes para o conhecimento das propriedades fundamentais da teoria de otimização.

Então, supondo dois pontos distintos $x_1, x_2 \in \mathcal{R}^n$ que representam um segmento de reta que pode ser expressa por:

$$y = \theta x_1 - (1 - \theta)x_2$$

onde $\theta \in \mathcal{R}$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$. Esses valores para o parâmetro θ correspondem ao segmento de reta R entre os pontos x_1 e x_2 , ou seja, quando for θ igual a zero $y = x_2$, quando for θ igual a um $y = x_1$ (BOYD E VANDENBERGHE, p.21, 2004, tradução própria).

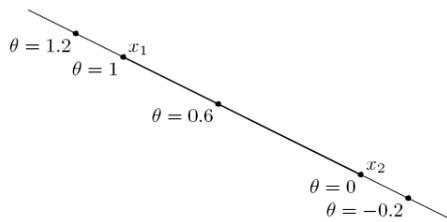


Figura 3.4: Representação dos parâmetros θ dentro e fora do intervalo entre os pontos x_1 e x_2 de uma reta.
 Fonte: (BOYD E VANDENBERGHE, p.22, 2004).

Um conjunto C , em \mathcal{R}^n , é dito convexo se para qualquer $x_1, x_2 \in C$ e todo número real θ tal que $0 \leq \theta \leq 1$ e o ponto $\theta x_1 - (1 - \theta)x_2 \in C$, isto é, se todos os pontos de um segmento de reta qualquer estiverem contidos no interior de um conjunto então esse conjunto pode ser classificado como convexo (BOYD e VANDENBERGHE, p.21, 2004, tradução própria).

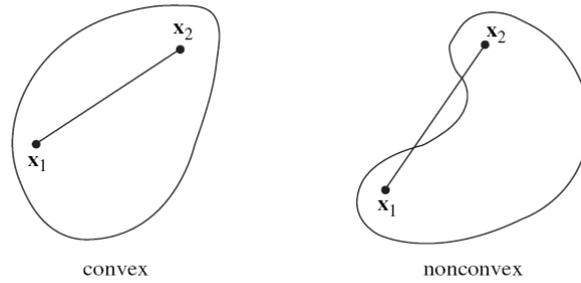


Figura 3.5: Representação geométrica de um conjunto convexo e um não-convexo.
Fonte: (LUENBERGE E YE, p.516, 2008).

Agora, no caso de uma função $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, ela também pode também ser definida como convexa se o domínio D_f for um conjunto convexo onde todo $x_1, x_2 \in D_f$ e $\theta \in [0,1]$ e seja satisfeita a desigualdade

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2)$$

Através da interpretação geométrica dessa desigualdade é possível observar que para que a função seja convexa (ou seja, ter sua concavidade direcionada para baixo) é necessário que o segmento de reta entre os pontos x_1 e x_2 estejam acima da função, como mostra a Figura (3.5) (BOYD e VANDENBERGHE, p.67, 2004, tradução própria).

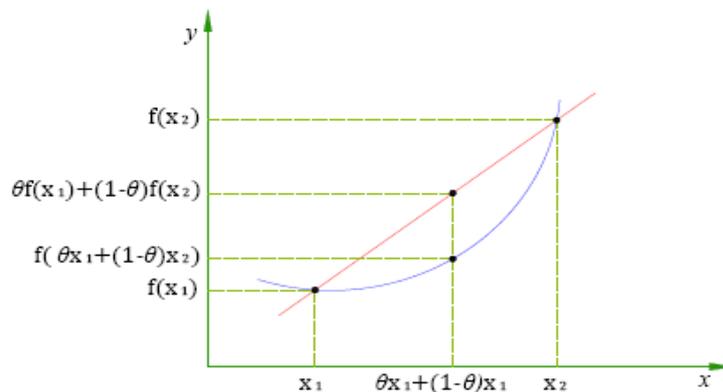


Figura 3.6: Representação geométrica de um função convexa.
Fonte: Própria.

A convexidade de uma função é outro conceito muito importante para a teoria de otimização, pois para que ocorra a minimização de uma função objetivo (funcional ou índice de desempenho), ela deve ser convexa para garantir que exista um mínimo dentro das restrições desejadas.

3.3.1.3– Positividade de uma matriz

Dada uma matriz A simétrica (isto é, $A = A^T$), sendo sua forma quadrática definida como

$$Q_A(x) = \|Ax\|^2 = x^T Ax$$

para $x \in \mathcal{R}^n$, é possível caracteriza-la conforme sua positividade. Neste trabalho interessam conceituar apenas as matrizes definidas positivas e semidefinida positivas.

Para que a matriz A seja definida positiva é necessário que $Q_A(x) > 0, \forall x \neq 0$. Assim, $Q_A(x)$ assumirá valores positivos quando todos os autovalores da matriz A forem positivos e não-nulos. Agora, para que a matriz A seja semidefinida positiva é necessário que $Q_A(x) \geq 0, \forall x \neq 0$.

0. Dessa forma, $Q_A(x)$ assumirá valores não-negativos (ou seja, menores que zero) quando todos os autovalores da matriz A forem positivos e ao menos um seja nulo (LUENBERGHE e YE, p.511, 2008, tradução própria).

O conceito de positividade de uma matriz é fundamentalmente necessário para a teoria de otimização (e para o projeto de controlador proposto por esse trabalho) pois através dele é possível garantir, no caso de minimização, que o índice de desempenho possui solução única, uma vez que o funcional que o representa é convexo. Neste caso segue que o mínimo local coincide com o mínimo global e é único.

3.3.2 - Regulador Linear Quadrático

Um sistema linear invariante no tempo pode ser estabilizado através de uma realimentação de estados com base em uma lei de controle, uma vez que a condição de controlabilidade seja verificada. Para que o sistema seja estabilizado é essencialmente importante que seus polos de malha fechada estejam localizados do lado esquerdo do eixo imaginário do plano complexo. A escolha dos pontos de localização desses polos bastante distantes do eixo vertical faz com que ocorra uma convergência muitíssimo rápida para o estado zero desse sistema. Por conseguinte, essa mudança extremamente rápida do sistema requer obrigatoriamente grandes amplitudes de entrada. Entretanto, em qualquer problema prático as amplitudes de entrada são limitadas. Esta restrição (muita das vezes de caráter físico) impõe um limite para a distância a que os polos de malha fechada possam ser alocados a esquerda do plano. Naturalmente essas considerações conduzem para a formulação de um problema de otimização, onde deve ser levado em consideração tanto a velocidade de convergência ao estado zero, quanto a magnitude das amplitudes de entrada do sistema. (KAWAKERNAAK e SIVAN, p.201, 1972, tradução própria)

Nas literaturas pesquisadas, cada autor utiliza nomenclaturas diferentes para essa técnica de controle. KAWAKERNAAK e SIVAN (p.201, 1972, tradução própria) chamam essa técnica de regulador determinístico linear ótimo, OGATA (p.718, 2010) de regulador quadrático ótimo, nesse trabalho será escolhido o uso de regulador linear quadrático, como o utilizado por Cerri (p.41, 2009).

O regulador linear quadrático é uma técnica de controle ótimo que tem por finalidade a determinação de um vetor de controle $u(t)$ capaz de transferir o estado inicial $x(t_0)$ de um sistema para um estado desejado na região do espaço de estados através da minimização ou maximização de um índice quadrático de desempenho, resultando em um sistema de controle estável. Para que esse vetor de controle $u(t)$ seja ótimo é necessário que o sistema seja de estado completamente controlável. A sua lei de controle ótimo tem a característica de ser uma função linear das variáveis de estado, que faz com que seja imprescindível a realimentação de todas elas. Desta forma, se torna fundamental que todas essas variáveis estejam disponíveis (ou seja, mensuráveis) para que permita realizar a realimentação de estados. Caso nem todas as variáveis estejam disponíveis para realimentação, então se torna indispensável o emprego de um observador de estados caso o sistema seja completamente observável para permitir a estimação das variáveis não mensuráveis e empregar esses valores estimados na realimentação para poder gerar os sinais de controle ótimo (OGATA, p728-729, 2010).

Considerando o problema do regulador linear quadrático que, para um dado sistema dinâmico representado pela equação de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.18}$$

permita determinar uma matriz K de realimentação de estados para a lei de controle ótimo expressa por:

$$u(t) = -Kx(t) \tag{3.19}$$

que seja capaz de minimizar ou maximizar o índice de desempenho (também chamado de funcional):

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad 3.20$$

onde Q é uma matriz de ponderação real simétrica semidefinida positiva e R é uma matrizes de ponderação real simétricas definidas positiva (OGATA, p.718, 2010). Essas condições de positividade das matrizes Q e R são necessárias para garantir, no caso de minimização, a convexidade do funcional J que representa o índice de desempenho. O termo $x^T Q x$ denota a medida de extensão do desvio do estado no tempo t em relação ao estado zero, por conseguinte, a matriz Q indica o peso (ou a importância) ligado a cada variável de estado referente a esse erro. Já o termo $u^T R u$ é responsável por reduzir a amplitude da entrada (KAWAKERNAAK e SIVAN, p.201-202, 1972, tradução própria). Onde a matriz R determina o consumo da energia empregada pelo sistema nessa transferência de estado. (OGATA, p.718, 2010).

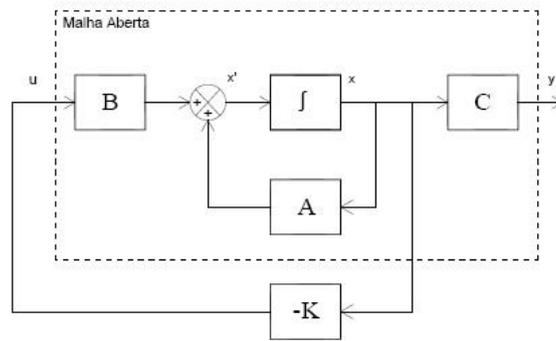


Figura 3.7: Representação em diagrama de blocos da realimentação de estados de um sistema.
Fonte: Própria, baseado em Nise (p.515, 2009).

Voltando à equação de estado do sistema para que possa ser resolvido o problema de otimização (ou seja, determinar o ganho ótimo de realimentação representado pela matriz K). Substitui-se a equação (3.19) na equação (3.18), que resulta em:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t) \quad 3.21$$

Para que possa seguir adiante, é importante supor que a matriz $A - BK$ (que representa o sistema em malha fechada) seja estável, isto é, que seus autovalores possuam parte real negativa. Assim sendo, ocorre também a substituição na equação (3.20) pelos termos iguais a equação (3.19), obtendo-se então que:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt$$

A partir disso, a determinação do índice de desempenho J pode ser calculado da seguinte maneira:

$$J = \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt = -x^* P x \Big|_0^{\infty} = -x^*(\infty) P x(\infty) + x^*(0) P x(0) \quad 3.22$$

Como foi estabelecido anteriormente a suposição de que a matriz $A - BK$ é estável, então é correto afirmar que o estado do sistema realimentado em um intervalo de tempo t convergirá a zero, ou seja, $x(\infty) \rightarrow 0$. Assim sendo, a equação (3.22) pode ser expressa como:

$$J = x^*(0) P x(0) \quad 3.23$$

A vista de disso, percebe-se que o índice de desempenho J pode ser obtido através das condições iniciais e da matriz P , uma matriz real simétrica definida positiva.

Para determinar a solução do problema de controle ótimo (que significa a determinação da matriz de ganho ótimo K) seguindo os cálculos a partir do índice de desempenho que permite ser representado como:

$$\int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt = -x^T P x$$

Então, realiza-se a diferenciação de ambos os lados:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x)$$

Aplicada a regra da derivada do produto no termo do lado direito da expressão, ela passa a ficar:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x}$$

sendo $\dot{x} = (A - BK)x$, e conseqüentemente $\dot{x}^T = (A - BK)^T x^T$. Dessa maneira, tem-se que:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x$$

Observando ambos os lados da equação, nota-se que ela é verdadeira para qualquer que seja x , então é possível dizer que:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad 3.24$$

De acordo com Ogata (p719, 2010), sempre existirá uma matriz P real simétrica definida positiva se o sistema for estável. Ele atenta para o fato de que outras matrizes que não possuem a característica citada podem satisfazer essa equação, mas que elas devem ser descartadas.

Agora, por ser considerado anteriormente que a matriz R seja real simétrica definida positiva, é justo afirmar através da definição de seu adjetivo que

$$R = T^T T$$

sendo T uma matriz não singular. Assim, passando o termo $-(Q + K^* R K)$ da equação (3.24) para o lado direito da igualdade e substituindo a matriz R , a expressão fica:

$$(A^T - K^T B^T) P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0$$

e rearranjada, torna-se:

$$A^T P + PA + PA + K^T T^T T K - K^T B^T P - PBK = 0 \quad 3.25$$

Considerando que

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - PBK = [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P$$

onde sua comprovação encontra-se no Anexo A. Com isso, permite-se que a equação (3.25) seja reescrita como:

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad 3.26$$

Ogata (p.720, 2010) diz que a minimização do índice de desempenho J em relação a matriz de ganho K está relacionada a minimização da expressão:

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x$$

O mínimo é verificado quando a expressão anterior é igual a zero, desse modo, a solução inicia através da diferenciação de J em relação a K , como segue:

$$\frac{\partial}{\partial K} (x^T [TK - (T^T)^{-1}B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1}B^T P] x) = 0$$

Como $\frac{\partial}{\partial x} (x^T x) = 2x$, uma vez que a matriz identidade é simétrica, então tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} ([TK - (T^T)^{-1}B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1}B^T P]) = 2[TK - (T^T)^{-1}B^T P] = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 2TK - 2(T^T)^{-1}B^T P &= 0 \\ 2TK &= 2(T^T)^{-1}B^T P \\ K &= T^{-1}(T^T)^{-1}B^T P \\ K &= R^{-1}B^T P \end{aligned} \tag{3.27}$$

Por consequência, a lei de controle pode ser expressada como:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$$

Desta forma, por meio da equação (3.27) é possível determinar o valor da matriz de ganho ótimo da realimentação de estados. Todavia, a identificação dos ganhos de realimentação exige a obtenção de uma matriz P da qual satisfaça a equação (3.25) ou a seguinte equação (OGATA, p.720, 2010):

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

denominada equação matricial reduzida de Riccati. Note-se que tal equação, é uma equação matricial quadrática que resulta da equação (3.26) quando o termo

$$[TK - (T^T)^{-1}B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1}B^T P] = 0$$

isto é, quando o termo anterior é minimizado.

4 - O Pêndulo Invertido

O pêndulo invertido é um sistema dinâmico com característica instável, que se submetido a uma força adequada de controle pode ser possível sua estabilização. (OGATA, p60, 2011). Em vista disso, esse sistema tornou-se um problema clássico de áreas que abrangem os estudos sobre sistemas dinâmicos e controle de sistemas dinâmicos, dispondo-se de um bom exemplo didático para essas disciplinas. (Sobhani, p.13, 2003, tradução própria)

Por ser um problema intrigantemente fascinante, vários estudos foram realizados acerca de sua dinâmica, utilizando as mais diversas composições estruturais e técnicas de análise e controle. A estrutura física proposta por esse trabalho consiste em uma haste rígida de formato cilíndrico com liberdade de movimento em torno de um ponto fixo (pivô) podendo realizar uma trajetória circular completa. Esse pivô é montado sobre uma plataforma móvel que possui liberdade para deslocar-se sobre um trilho ao longo do eixo horizontal.

Esse tipo de pêndulo é um sistema não conservativo que propicia a haste manter-se em repouso somente nos pontos da vertical com direção para baixo e para cima. O ponto de orientação para baixo é o seu ponto de equilíbrio estável natural, ou seja, é o ponto onde ele tende a permanecer em repouso enquanto não houver a ação de uma resultante de forças e nem conservação de energia mecânica. O ponto de orientação para cima é um ponto, onde devido ao acúmulo de energia potencial, seu equilíbrio apresenta uma estabilidade restrita. Nesse caso, a ação de uma força instantânea com intensidade suficientemente capaz de alterar o centro de gravidade da haste faz com que o pêndulo busque o repouso em seu ponto natural de equilíbrio. Existem diversas aplicações que empregam os conceitos envolvidos no sistema de um pêndulo invertido. O controle do ângulo de atitude de um foguete durante sua fase de lançamento, por exemplo, utiliza o modelo de um pêndulo invertido com o objetivo de mantê-lo em posição vertical (OGATA, p.60, 2010). Tal vez o exemplo mais notável nos dias de hoje seria o Segway PT (*Personal Transporter* – Transportador Pessoal), desenvolvido por Dean Kamen com o intuito de ser uma solução alternativa de transporte sem emissão de poluentes e para auxiliar a redução dos congestionamentos urbanos. O Segway PT⁸ é um dispositivo de transporte elétrico com duas rodas paralelas, que são acionadas por meio da inclinação do corpo do piloto. Um outro exemplo que apresenta o mesmo contexto é apresentado pelo artigo de Ambrose (et al, p.01, 2004) sobre a mobilidade de robôs autônomos baseados nesse conceito. Nesse artigo, a NASA (*National Aeronautics and Space Administration* – Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço) com o apoio da DARPA (*Defense Advanced Research Projects Agency* – Agência de Investigação Avançada de Projetos de Defesa) desenvolveram um sistema de manipulador robótico móvel baseado na parte superior dos robôs da família Robonaut montado em uma plataforma móvel inspirada no Segway chamada de RMP (*Robotic Mobility Platform* – Plataforma Robótica Móvel). Esse projeto obteve resultados significativos no aspecto da interação com pessoas, ferramentas e interfaces urbanas. O modelo matemático do pêndulo invertido possui muita similaridade com os modelos da biomecânica do ato de caminhar, trotar ou correr dos humanos e animais, sendo aplicados em áreas como: esportes de alto rendimento, robótica e entre outras. A grande maioria dos trabalhos dessas áreas utilizam o modelo SLIP (*Spring Loaded Inverted Pendulum* – Pêndulo Invertido de Mola) como base de seus estudos e aplicações (Hurst, p.5, 2008, tradução própria).

⁸ Link: <<http://www.segway.com/about-segway>>. Acesso em: ago. 2014.

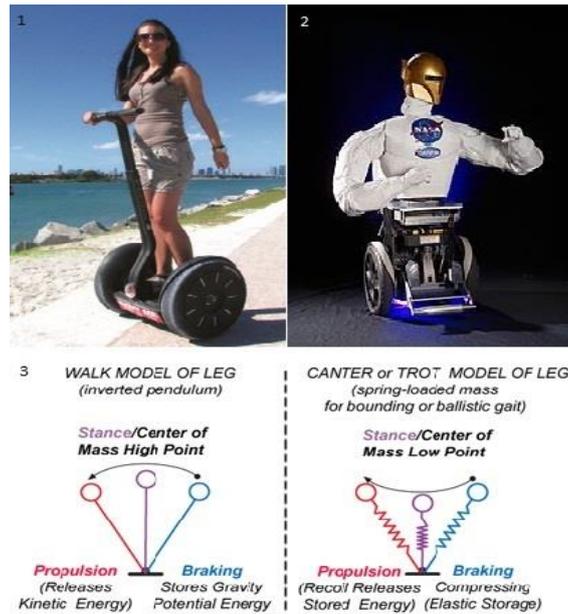


Figura 4.1: Modelo de um Segway para transporte e lazer. 2 – Robonaut, projetada pela NASA em parceria com a DARPA. 3 – Representação esquemática da dinâmica do movimento de caminhar e correr.
Fonte: Internet.

4.1 - Modelamento da dinâmica do sistema

O modelamento da dinâmica do sistema proposto por este trabalho é um caso de um problema no plano bidirecional (com dois graus de liberdade), ou seja, o movimento do pêndulo se restringe apenas ao plano da página conforme a figura abaixo.

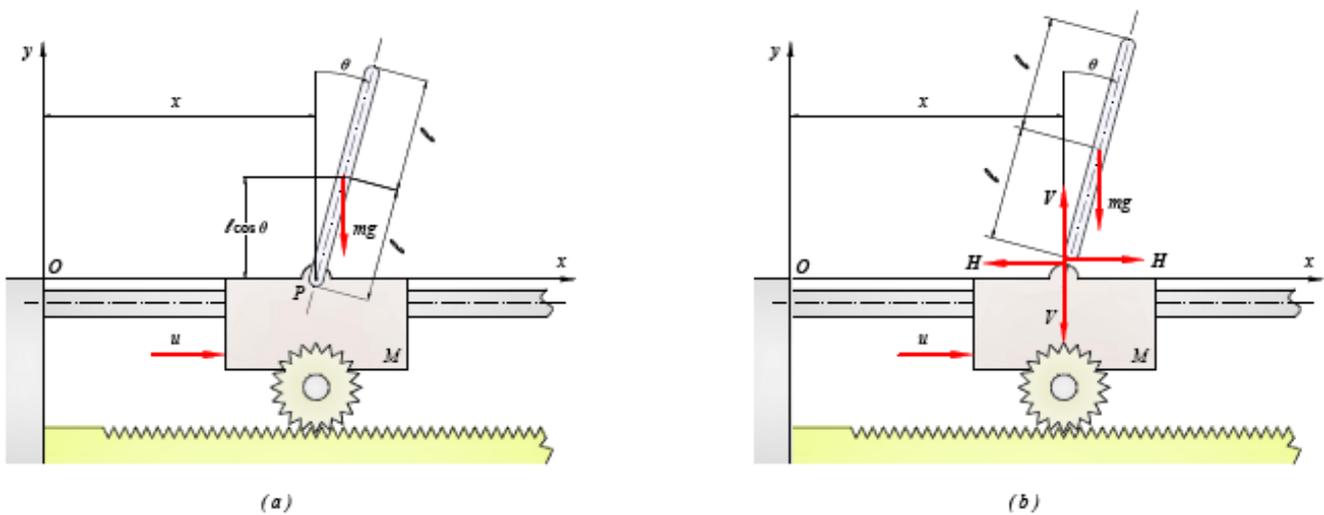


Figura 4.2: Diagrama de corpo livre do sistema do sistema do pêndulo invertido
Fonte: Própria, baseado em Ogata (p.61, 2010).

Devido a geometria tubular da haste e considerando que sua distribuição de massa seja uniforme, é válido admitir que seu centro de gravidade esteja situado no mesmo ponto que seu centro geométrico. Assim, definindo a posição angular da haste com base na linha vertical como θ , as coordenadas do centro de gravidade da haste (x_G, y_G) podem ser determinadas de acordo com as expressões (OGATA, p.61, 2011):

$$x_G = x + l \sin \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

As equações que representam a dinâmica do sistema podem ser deduzidas considerando o diagrama de corpo livre (Figura 4.2 – b). O movimento rotacional da haste do pêndulo permite ser descrito por meio da somatória das forças pela expressão (OGATA, p.61, 2011):

$$I\ddot{\theta} = Vlsen\theta - Hlcos\theta \quad 4.1$$

onde I representa o momento de inércia da haste em relação ao seu centro de gravidade, que corresponde ao seu movimento rotacional.

A força responsável pelo movimento horizontal realizado pelo centro de gravidade da haste (que resulta do movimento linear da plataforma móvel) é dada por:

$$m \frac{d^2}{dt} (x + lsen\theta) = H \quad 4.2$$

Já o movimento vertical do centro de gravidade que é influenciado pela força resultante do mesmo movimento linear pode ser expresso pela equação:

$$m \frac{d^2}{dt} (lcos\theta) = V - mg \quad 4.3$$

No caso da plataforma móvel, sua dinâmica é descrita pela somatória de forças ao longo do eixo horizontal, devido ao fato de possuir apenas o movimento linearmente ao longo desse eixo. Em vista disso, a expressão é descrita como:

$$M \frac{d^2 x}{dt} = u - H \quad 4.4$$

Pode-se observar que as equações (3.1), (3.2) e (3.3) possuem funções senoidais, portanto, o sistema possui uma dinâmica não linear. Como a finalidade do problema é manter a haste do pêndulo na posição vertical orientada para cima, é plausível de acordo com Ogata (p.61, 2011) admitir que a posição angular $\theta(t)$ da haste do pêndulo e sua velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ sejam grandezas suficientemente pequenas ao ponto de permitir que se considere o $sen(\theta) \doteq \theta$, que o $cos(\theta) = 1$ e que $\theta\dot{\theta}^2 = 0$. Desta forma, o sistema torna-se linearizado em torno do ponto de operação, que seria a região próxima a posição vertical com orientação para cima. Portanto, as equações (4.1), (4.2) e (4.3) são rearranjadas da seguinte forma:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad 4.5$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad 4.6$$

$$0 = V - mg \quad 4.7$$

A partir das equações (4.4) e (4.6) obtêm-se a expressão:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad 4.8$$

e, com base nas equações (4.5), (4.6) e (4.7), a expressão:

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl = mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta})$$

que pode ser reescrita como:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad 4.9$$

Sendo assim, as equações (4.8) e (4.9) representam a equação dinâmica que descreve o movimento do sistema de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, constituindo assim um modelo matemático do problema proposto nesse trabalho. (OGATA, p.62, 2011)

4.2 – Representação em espaço de estados do modelo do sistema

No sistema de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, a posição angular (θ) do centro de gravidade da haste e sua respectiva velocidade angular ($\dot{\theta}$) e a posição linear (x) do carro e sua correspondente velocidade linear (\dot{x}) são as variáveis de estado das duas equações de segunda ordem determinadas anteriormente (DORF; et al, p122, 2009). As variáveis de estado serão definidas como sendo x_1, x_2, x_3 e x_4 , obtendo um sistema de quarta ordem, sendo assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta \\x_2 &= \dot{\theta} \\x_3 &= x \\x_4 &= \dot{x}\end{aligned}$$

Partindo da definição de que um modelo em espaço de estados é a representação de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, então a derivada das variáveis de estado são:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} \\ \dot{x}_3 &= x_4 = \dot{x} \\ \dot{x}_4 &= \ddot{x}\end{aligned}$$

O rearranjo das equações (4.9) e (4.8) respectivamente de forma que $\ddot{\theta}$ e \ddot{x} permaneçam isolados em um dos lados da equação resulta em:

$$\ddot{\theta} = \frac{ml}{(I + ml^2)}g\theta - \frac{ml}{(I + ml^2)}\ddot{x} \quad 4.10$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{(M + m)}u - \frac{ml}{(M + m)}\ddot{\theta} \quad 4.11$$

Ao substituir \ddot{x} da equação (4.10) pela equação (4.11) e da mesma maneira com $\ddot{\theta}$, as equações passam a ficar:

$$\ddot{\theta} = \frac{ml(M + m)}{IM + m(I + Ml^2)}g\theta - \frac{(ml)^2}{IM + m(I + ml^2)}u \quad 4.13$$

$$\ddot{x} = -\frac{(ml)^2}{IM + m(I + Ml^2)}g\theta + \frac{1}{IM + m(I + Ml^2)}u \quad 4.14$$

Sendo $\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$ e $\dot{x}_4 = \ddot{x}$, dessa forma, o sistema de equações diferenciais de primeira ordem do sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{ml(M + m)g}{IM + m(I + Ml^2)}x_1 - \frac{ml}{IM + m(I + Ml^2)}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{(ml)^2g}{IM + m(I + Ml^2)}x_1 + \frac{I + ml^2}{IM + m(I + Ml^2)}u\end{aligned}$$

Por fim, de acordo com Ogata (p.63, 2011), as saídas do sistema são consideradas as variáveis θ (por indicar a rotação do centro de gravidade da haste do pêndulo) e x (a localização da plataforma móvel). Dessa forma, o sistema de equações de saída fica:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações diferenciais e a equação de saída expressa em termos de equação vetorial-matricial é representada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{IM+m(I+Ml^2)} \\ 0 \\ \frac{I+ml^2}{IM+m(I+Ml^2)} \end{bmatrix} u \quad 4.15$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad 4.16$$

As equações (4.15) e (4.16) representam o modelo em espaço de estados obtido a partir do modelo matemático expresso pelas equações (4.8) e (4.9), sendo assim, um meio possível de se observar a dinâmica do sistema de um pêndulo invertido de haste tubular sobre uma plataforma móvel, como proposto pelo presente trabalho.

4.3 – Representação em função de transferência do modelo do sistema

Como visto nas seções 2.1.1.3 do Capítulo 2 e 3.2.1 do Capítulo 3, existem duas maneiras de se determinar a função de transferência de um sistema dinâmico. A primeira maneira baseia-se na utilização da equação diferencial que representa o sistema para se determinar a relação entre a transformada de Laplace da saída e a da entrada. A segunda maneira é baseada na solução de uma equação que correlaciona a função de transferência e o modelo em espaço de estado. Posto isso, empregando o primeiro método, o sistema do pêndulo invertido tem como entrada $u(t)$ e saídas a posição angular $\theta(t)$ da haste do pêndulo e a posição linear $x(t)$ da plataforma móvel, conforme a seção anterior. De acordo com o Capítulo 2, a função de transferência é um modelo de representação matemática de apenas uma entrada e uma saída, dessa forma, o sistema do pêndulo invertido possui duas funções transferência por possuir duas saídas. A primeira pode ser expressa por meio da relação entre $\Theta(s)$ e $U(s)$, já a segunda, pela relação entre $X(s)$ e $U(s)$. Portanto, para se determina a função de transferência que relaciona $\Theta(s)$ e $U(s)$, a equação (4.9) (que integra o sistema de equações diferenciais que representa a dinâmica do sistema do pêndulo invertido) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} &= mgl\theta \\ ml\ddot{x} &= mgl\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta} \\ \ddot{x} &= g\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml}\ddot{\theta} \end{aligned} \quad 4.17$$

Substituindo a equação (4.17) em (4.8), tem-se que

$$(M + m) \left[g\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml}\ddot{\theta} \right] + ml\ddot{\theta} = u$$

Aplicando a propriedade distributiva no primeiro termo da adição e colocando o termo $\ddot{\theta}$ em evidência, a equação anterior fica:

$$\left[ml - \frac{(M+m)(I+ml^2)}{ml} \right] \ddot{\theta} + g(M+m)\theta = u$$

$$\left[\frac{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}{ml} \right] \ddot{\theta} + g(M+m)\theta = u$$

A transformada de Laplace da equação acima é expressa como:

$$\left[\frac{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}{ml} \right] s^2 \Theta(s) + g(M+m)\Theta(s) = U(s)$$

Com o termo $\Theta(s)$ em evidência, a equação passa a ficar:

$$\left\{ \left[\frac{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}{ml} \right] s^2 + g(M+m) \right\} \Theta(s) = U(s)$$

Reescrevendo a equação anterior de forma que fiquem apenas a entrada $U(s)$ e a saída $\Theta(s)$ de um lado da equação:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{\left[\frac{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}{ml} \right] s^2 + g(M+m)}$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{ml}{[(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)]s^2 + g(M+m)ml}$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{ml}{[-MI - mMI^2 - Im]s^2 + g(M+m)ml}$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{ml}{[IM + m(I+MI^2)]s^2 - g(M+m)ml} \quad 4.18$$

Desse modo, a equação (4.18) constitui a função de transferência de um pêndulo invertido que relaciona transformada de Laplace da posição angular, $\Theta(s)$, e a transformada da entrada, $U(s)$.

A função de transferência do pêndulo invertido representada pela relação entre $X(s)$ e $U(s)$ pode ser determinada a partir da equação (4.9), onde, permite ser reescrita como:

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{(I+ml^2)}\theta - \frac{ml}{(I+ml^2)}\ddot{x} \quad 4.19$$

Substituindo a equação (4.19) em (4.8), tem-se que

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{(ml)^2 g}{(I+ml^2)}\theta - \frac{(ml)^2}{(I+ml^2)}\ddot{x} = u$$

Passando o termo θ para o lado da equação e colocando \ddot{x} em evidência com seu coeficiente reorganizado, a equação anterior fica:

$$\left[\frac{(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2}{(I+ml^2)} \right] \ddot{x} = u - \frac{(ml)^2 g}{(I+ml^2)}\theta$$

Deixando apenas \ddot{x} do lado direito, a equação passa a ficar:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{(I + ml^2)}{(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2} u - \frac{(ml)^2 g}{(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2} \theta \\ \ddot{x} &= \frac{(I + ml^2)}{IM + ml^2 M + Im} u - \frac{(ml)^2 g}{IM + ml^2 M + Im} \theta \\ \ddot{x} &= -\frac{(ml)^2 g}{IM + m(I + Ml^2)} \theta + \frac{(I + ml^2)}{IM + m(I + Ml^2)} u\end{aligned}\quad 4.20$$

A transformada de Laplace da equação (4.20) é

$$s^2 X(s) = -\frac{(ml)^2 g}{IM + m(I + Ml^2)} \Theta(s) + \frac{(I + ml^2)}{IM + m(I + Ml^2)} U(s)$$

Dividindo ambos os lados por $s^2 U(s)$ de modo que a equação evidencie a relação $X(s)/U(s)$, tem então que

$$\frac{X(s)}{U(s)} = -\frac{(ml)^2 g}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2} \frac{\Theta(s)}{U(s)} + \frac{(I + ml^2)}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2}$$

Nota-se que o primeiro termo do lado direito da expressão anterior é multiplicado pela função de transferência do pêndulo invertido que relaciona $\Theta(s)$ e $U(s)$, portanto, a equação acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{(ml)^3 g}{[[IM + m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml][IM + m(I + Ml^2)]s^2} \\ &+ \frac{(I + ml^2)}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2}\end{aligned}\quad 4.21$$

Dessa maneira, a equação (4.21) representa a função de transferência do pêndulo invertido que relaciona (no domínio da frequência) a posição linear $X(s)$ da plataforma móvel e a entrada $U(s)$.

O outro método para se determinar a função de transferência de um sistema, como havia sido dito no início desta seção, se dá por meio da correlação entre a função de transferência e o modelo em espaço de estados. Sua equação é expressa por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

No modelo em espaço de estado do sistema do pêndulo invertido as matrizes que correspondem as da equação anterior são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M + m)g}{IM + m(I + Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(ml)^2 g}{IM + m(I + Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ ml \\ -\frac{ml}{IM + m(I + Ml^2)} \\ 0 \\ \frac{I + ml^2}{IM + m(I + Ml^2)} \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa decorrente do termo $sI - A$ é dada, conforme a solução desenvolvida no Apêndice A, como:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{[IM+m(I+Ml^2)]s}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & \frac{IM+m(I+Ml^2)}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & \frac{[IM+m(I+Ml^2)]s}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & 0 & 0 \\ -\frac{(ml)^2g}{[[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml]s} & -\frac{(ml)^2g}{[[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml]s^2} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ -\frac{(ml)^2g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & -\frac{(ml)^2g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Logo, a multiplicação entre as matrizes C , proveniente de $(sI - A)^{-1}$, e a B resulta em

$$G(s) = \begin{bmatrix} -\frac{ml}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & \\ \frac{(ml)^3g}{[[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml][IM+m(I+Ml^2)]s^2} + \frac{I+ml^2}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2} \end{bmatrix} \quad 4.22$$

A matriz coluna $G(s)$, representada pela equação (4.22), corresponde as funções de transferência do sistema de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel. É importante notar que, na matriz C , a primeira linha é associada a saída $\theta(t)$ e a segunda linha a saída $x(t)$. Por consequência, na matriz $G(s)$, a primeira linha equivale a função de transferência referente a saída $\theta(t)$, e logo, a segunda linha a função de transferência relativa a saída $x(t)$.

4.4 – Análise de estabilidade do sistema

A análise de estabilidade em malha aberta de um sistema utilizando o modelo em espaço de estados é realizada com base na determinação da posição dos autovalores da matriz $A_{n \times n}$ no plano complexo. Seu posicionamento é obtido através da solução da equação característica, que é encontrada a partir do cálculo do determinante da expressão:

$$|sI_{n \times n} - A_{n \times n}| = 0$$

sendo I a matriz identidade de dimensão igual à da matriz A . Dessa forma, substituindo A pela matriz de estados do sistema do pêndulo invertido e também I , tem-se então que:

$$\begin{vmatrix} s & & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ \frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = 0$$

A solução encontrada, ao aplicar o teorema de Laplace para estabelecer o determinante da matriz de ordem quatro dada, resulta em:

$$s^4 - \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)}s^2 = 0$$

Resolvendo o polinômio característico do sistema chega-se a seguinte solução:

$$s_1 = s_2 = 0$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)}}$$

$$s_4 = -\sqrt{\frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)}}$$

As raízes do polinômio característico são os autovalores do sistema do pêndulo invertido proposto. Pode-se observar que o autovalor s_3 é um polo que está localizado no semiplano da direita do plano complexo. Como o critério de estabilidade de um sistema depende da não existência de polos com parte real positiva, conclui-se através desses cálculos que a planta em malha aberta é um sistema instável.

4.5 - Controlabilidade do sistema

Apesar de um sistema ser instável em malha aberta, é possível determinar se o sistema possui a capacidade de se estabilizar em malha fechado quando submetido a um ganho de realimentação e uma ação de controle adequada. Essa análise emprega o conceito de controlabilidade introduzido no Capítulo 3. Sendo assim, a matriz de controlabilidade utilizada como critério para garantir se um sistema é controlável é dada pela expressão:

$$\mathcal{C}_{n \times n} = [B \quad : \quad AB \quad : \quad A^2B \quad : \quad \dots \quad : \quad A^{n-1}B]$$

onde B é a matriz de entrada e A a matriz de estados encontradas no modelo em espaço de estados do sistema do pêndulo invertido proposto. Através das substituições e realizadas suas devidas operações, obtém-se a matriz de controlabilidade do sistema proposto resulta em:

$$\mathcal{C}_{PI} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ml}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^2(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} \\ -\frac{ml}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^2(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 \\ 0 & \frac{I+Ml^2}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^3g}{IM+m(I+Ml^2)} \\ -\frac{I+Ml^2}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^3g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 \end{bmatrix} \quad 4.23$$

Observa-se que as colunas da matriz de controlabilidade do sistema, expressa pela equação (4.23), são linearmente independentes, isto é, não podem ser escritas como combinação linear das demais. Dessa maneira, é correto afirmar que o pêndulo invertido é um sistema que satisfaz a propriedade de controlabilidade, o que garante a existência de um ganho de realimentação que leva o sistema a se estabilizar em malha fechada. Por consequência, é possível projetar um controlador capaz de estabilizar o pêndulo na posição invertida.

5 - Projeto do Sistema de Controle do Pêndulo Invertido

“Objetivo do projeto de engenharia de controle é obter a configuração, especificações e identificação de parâmetros-chaves de um sistema proposto a atender uma necessidade real” (DORF E BISHOP, p.12, 2009).

De acordo com Ogata (p.8 e 9, 2010), os sistemas de controle são projetados com a finalidade de efetuar tarefas específicas. Para que determinada tarefa seja realizada é necessário a imposição de requisitos para uma execução satisfatória. Os requisitos impostos são normalmente atribuídos como especificações de desempenho de um sistema de controle, onde podem ser explicitados segundo os termos de resposta transitória (tal como o máximo sobressinal e o tempo de acomodação) e resposta em regime permanente (conforme o erro estacionário). Elas devem ser designadas antes do início do processo de projeto, não devendo conter mais restrições que o prescindível para o procedimento da tarefa almejada. Na maioria dos casos, o sistema não é capaz de satisfazer os critérios de desempenho, e dessa maneira, é necessário inserir um compensador (comumente chamado de controlador) para que as especificações sejam atendidas.

Projetar um sistema de controle consiste em modelar o sistema proposto, analisá-lo em malha aberta e determinar a possibilidade de estabilidade em malha fechada utilizando um compensador. Garantida a estabilidade absoluta ao fechar a malha, testa-se o desempenho do sistema realimentado. Muitas das vezes na primeira análise, o comportamento do sistema de controle em malha fechada não satisfaz os requisitos de desempenho, e portanto, deve-se ajustar os parâmetros do compensador de forma a buscar submeter-se as especificações impostas pelo projeto. Ainda assim, é possível que o sistema não seja apto a corresponder conforme esses requisitos, e portanto, deve-se alterar os critérios de desempenho de forma que o sistema tenha um comportamento dinâmico razoável.

Neste trabalho, é projetado dois tipos de controladores diferentes para controlar a haste do pêndulo de forma que a mantenha na posição vertical orientada para cima. Um controlador emprega as técnicas clássicas de controle e o outro as modernas, sendo respectivamente o controlador PID, utilizando o segundo método de Ziegler-Nichols para determinar seus parâmetros, e o controlador por realimentação de estados, utilizando o regulador linear quadrático para determinar o ganho ótimo de realimentação. O sistema do pêndulo invertido tem como condição inicial o repouso da haste e da plataforma móvel, onde o sistema parte da posição zero, $\theta = x = 0$ (ou seja, com a haste na posição vertical orientada para cima e a plataforma móvel no centro do trilho). Como o propósito do controle é manter a haste do pêndulo na posição vertical para cima quando o sistema for submetido a um distúrbio externo (por exemplo: um toque na haste para derrubá-la) ou a uma mudança de posição da plataforma móvel (mudança de *set-point* da variável x). Este problema de controle é caracterizado pela regulação da posição angular do pêndulo de forma que ela convirja para a posição inicial, de valor zero, e dessa maneira, a entrada de referência do sistema é zero. Isto significa que o problema de controle consiste em um caso de regulador, onde ele é projetado para manter a saída do sistema sempre constante, isto é, manter a saída de acordo com as condições iniciais (que normalmente possui valor zero) quando exposto a uma perturbação.

Para o projeto do sistema de controle do pêndulo invertido proposto, os critérios relevantes de desempenho da resposta transitória adotados por este trabalho são: o tempo de acomodação (considerando o critério de ± 2 de oscilação em torno do *set-point*) e o máximo sobressinal. O erro atuante na resposta em regime permanente também é bastante importante no neste trabalho. Sendo assim, no controle da haste, seu tempo de acomodação deve ser de 3s, considerando que o sistema está estabilizado quando a resposta se mantiver dentro de um intervalo

de $\pm 2\%$ em torno do valor zero da posição angular. Como nesse caso o problema do controle da haste se trata de estabilizá-la em zero, o critério de variação da saída em regime permanente dentro do intervalo de $\pm 2\%$ para poder considerar o sistema estabilizado não se aplica nesse caso, pois o valor final da saída é zero e conseqüentemente o valor dessa porcentagem é nula. Sendo assim, nesse trabalho, o intervalo será atribuído de acordo com o calculado baseado no sobressinal, isto é, a resposta da posição da haste será considerada estabilizada quando seu valor se manter dentro de um intervalo de $\pm 2\%$ do valor do máximo sobressinal. O máximo sobressinal da haste não deve exceder 0.15rad (aproximadamente 8.6°). O erro estacionário na resposta em regime permanente da posição da haste deve ser zero, pois é a única posição com direção para cima possível de estabilizá-la e qualquer valor diferente faz com que o pêndulo saia da estabilidade.

. No caso da plataforma móvel o único critério significativo (para este trabalho) na sua resposta transitória é o tempo de acomodação, que deve ser inferior a 4s. Seu erro em regime permanente, igualmente o da haste, também deve ser zero.

A análise da estabilidade e do comportamento dinâmico de um sistema geralmente demanda cálculos dispendiosos. Dessa maneira, o software MatLab® da MathWork® é utilizado para facilitar a visualização dos resultados obtidos no projeto de controle do sistema do pêndulo invertido e todas as linhas de comando utilizada para chegar nos resultados discutidos nesse capítulo são encontradas no Apêndice C. O MatLab®⁹ é uma ferramenta de programação de alto nível com um ambiente interativo utilizado por diversos engenheiros, cientistas e estudantes de todo o mundo. É aplicado no projeto e na modelagem de algoritmos por diversas disciplinas como: sistemas de controle, processamento de sinal e imagem, finanças computacionais e entre outras inúmeras áreas.

5.1 - Análise do sistema em malha aberta

A função de transferência do sistema do pêndulo invertido é representada como:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = - \frac{ml}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml}$$

onde pode ser reescrita como:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = - \frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] s^2 - g(M + m)}$$

Os valores dos parâmetros físicos do sistema representados na função de transferência proposto neste trabalho são dados como: a massa da haste e seu comprimento são respectivamente $m = 0.193\text{kg}$ e $l = 0.250\text{m}$, a massa da plataforma móvel como $M = 0.754\text{kg}$, a aceleração da gravidade por $g = 9.800\text{m/s}^2$ e o momento de inércia da haste como $I = 0.004\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Sendo assim, a equação anterior passa a ser escrita como:

$$G_{MA} = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = - \frac{1.000}{0.2675s^2 - 9.2904} \quad 5.1$$

A equação característica do sistema é escrita como:

$$P(s) = 0.2675s^2 - 9.2904$$

⁹ Ver site <<http://www.mathworks.com/>>

e seus polos são $s_1 = 5.8933$ e $s_2 = -5.8933$, como pode ser visto na Figura (5.1a). Devido à localização do polo s_1 ser no lado direito do plano complexo, o sistema do pêndulo invertido é instável em malha aberta, conforme visto na Figura (5.1b).

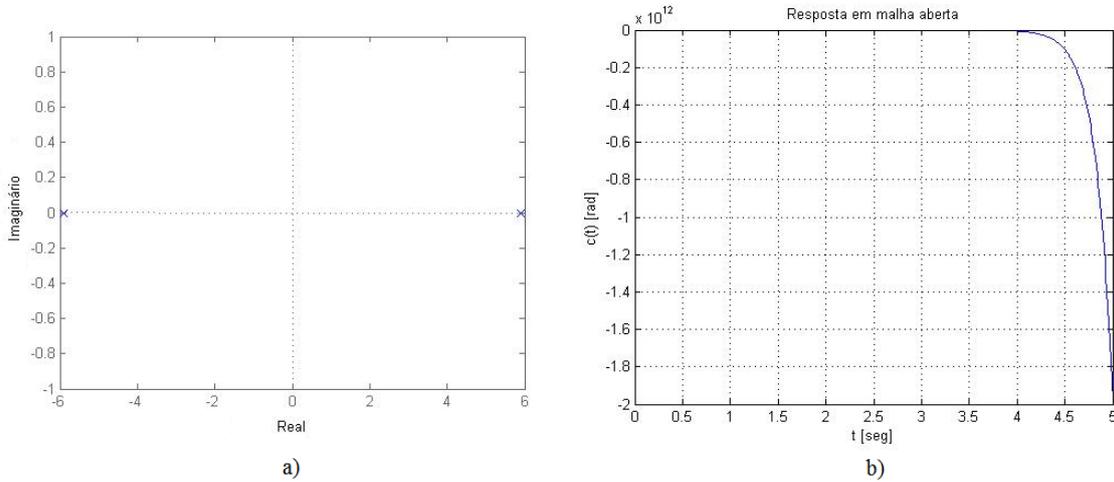


Figura 5.1: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ b) Resposta temporal da função de transferência G_{MA} , equação (5.1).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Na Figura (5.1b), percebe-se que a resposta do sistema está decaindo, isso se deve ao sinal negativo na função de transferência G_{MA} , equação (5.1). Ao forçar a função de transferência ser positiva, faz com que a resposta da saída seja crescente, como pode ser visto na Figura (5.2b). Essa modificação, como pode ser observado na Figura (5.2a), altera apenas os sinais da resposta. Sendo assim, a função de transferência que representa a posição angular da haste pode ser reescrita como:

$$G_{MA} = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1.000}{0.2675s^2 - 9.2904} \quad 5.2$$

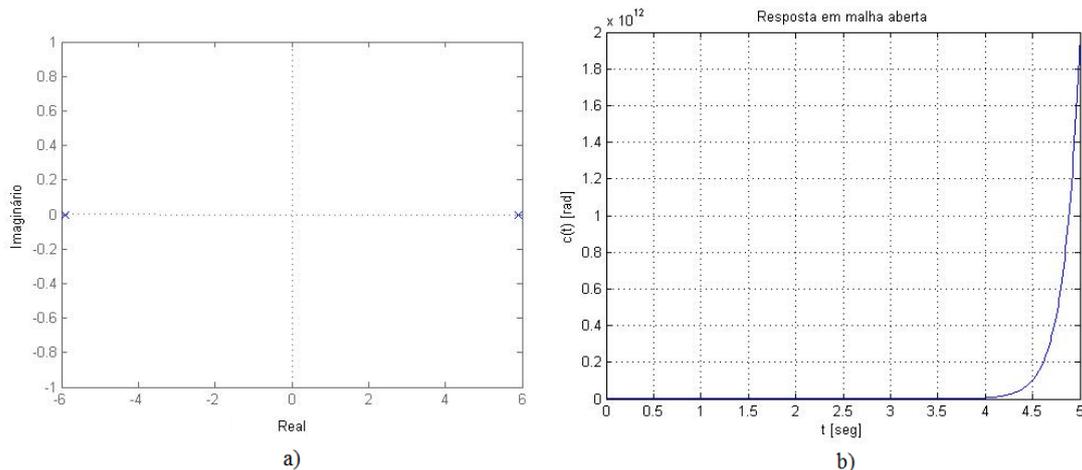


Figura 5.2: a) Mapa de polos e zeros de no G_{MA} , equação (5.2), plano complexo $s(j\omega)$ b) Resposta temporal de G_{MA} , equação (5.2).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

5.2 - Controlador PID

Conforme o visto no Capítulo 2, o controlador PID é uma técnica de controle clássico, constituída de um algoritmo que associa as ações de controle proporcional, integral e derivativa. Sua aplicação se dá utilizando o modelo no domínio da frequência, ou seja, empregando o conceito de função de transferência.

O objetivo do problema de controle do pêndulo invertido usando o algoritmo PID proposto pelo presente trabalho consiste em fazer com que a haste, que está inicialmente na vertical (direcionada para cima), retorne a sua posição original após ser submetida a uma força de perturbação externa (distúrbio) $d(t)$. Para a entrada de referência $r(t)$ é dado o valor zero, a qual coincide com a condição inicial da posição angular $\theta(t)$ da haste. Como o pêndulo invertido é um sistema inerentemente instável e o sistema é capaz de permanecer estável apenas na posição vertical, o sinal de teste escolhido para ser utilizado na simulação computacional que melhor representa uma perturbação instantânea é o impulso. A representação em diagrama de blocos da transformada de Laplace do sistema de controle submetido a uma realimentação unitária é mostrado na Figura 5.1.

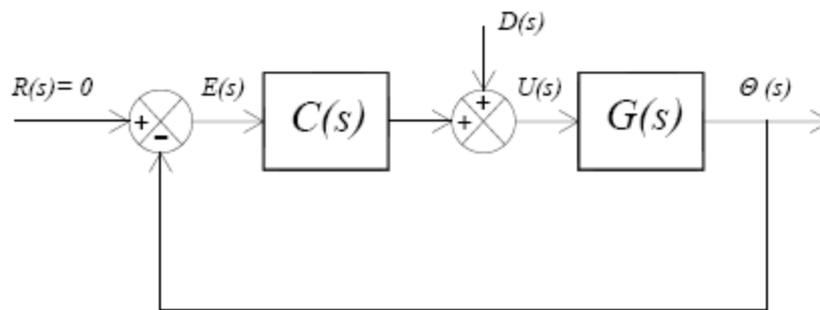


Figura 5.3: Diagrama de blocos do problema de controle proposto do sistema do pêndulo invertido em malha fechada

Fonte: Própria, baseado em Messner e Tilbury (2011).

Os blocos $C(s)$ e $G(s)$ representam respectivamente as funções de transferência do controlador (sendo nesse caso um controlador PID) e do sistema do pêndulo invertido. A transformada de Laplace da entrada de referência é expressa por $R(s)$, a do erro atuante por $E(s)$, a da perturbação externa por $D(s)$, a da entrada do sistema por $U(s)$ e a da sua saída por $\Theta(s)$. Percebe-se através do diagrama de blocos do sistema em malha fechada que sua estrutura de controle difere dos problemas padrões de controle. Portanto, para facilitar a visualização do problema, o diagrama de blocos da Figura (5.3) pode ser reorganizado conforme a Figura (5.4).

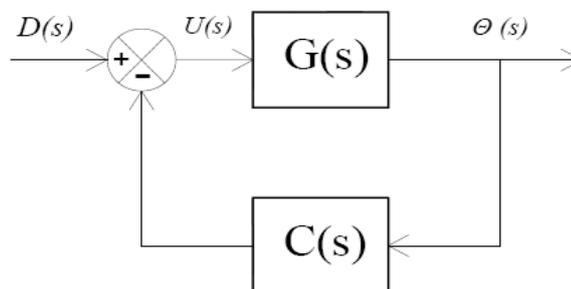


Figura 5.4: Diagrama de blocos reduzido do problema de controle proposto do sistema do pêndulo invertido em malha fechada.

Fonte: Própria, baseado em Messner e Tilbury (2011).

O primeiro passo para se determinar os parâmetros do controlador $C(s)$, que nesse caso é do tipo PID padrão, deve-se determinar o valor do ganho crítico responsável por fazer com que a resposta do sistema em malha fechada oscile de forma permanente, conforme o segundo método de Ziegler-Nichols. Dessa forma, a função de transferência de malha fechada de um sistema é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad 5.3$$

De acordo com o que foi visto no Capítulo 3, para se determinar o ganho crítico é necessário admitir a ação integral como $T_i = \infty$ e a ação derivativa $T_d = 0$ de forma que não exerçam influência alguma na ação de controle e, assim, realizar um aumento gradual no ganho K é expressa como:

$$C(s) = K_p$$

Agora, substituído as funções de transferências na equação (5.3) fica:

$$G_{MF}(s) = \frac{\frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m)}}{1 + \frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m)} K_p}$$

Reorganizando a equação anterior tem-se que:

$$G_{MF}(s) = \frac{\frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m)}}{\frac{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m) + K_p}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m)}}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m) + K_p} \quad 5.4$$

Por fim, a equação (5.4) representa a função de transferência em malha fechada do sistema de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel submetido a um controlador proporcional puro.

O próximo passo é, através do critério de Routh, determinar o valor do ganho crítico. Dessa maneira, analisando a equação (5.4), percebe-se que a equação característica do sistema é dada por:

$$\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml}\right] s^2 - g(M + m) + K_p$$

A matriz de coeficiente para um polinômio de segunda ordem é dada como:

$$\begin{array}{r} s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \\ -\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}$$

Assim sendo, a matriz de coeficiente da equação característica do sistema do pendulo invertido é:

$$\begin{array}{cc} s^2 & \left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] & -g(M + m) + K_p \\ s^1 & 0 & 0 \end{array}$$

Notar-se que a segunda linha é preenchida de zeros. Essa linha nula aparece pois a equação característica não possui todos os termos necessários para um polinômio de segunda ordem padrão, ou seja, o termo s^1 possui coeficiente nulo. Para resolver esse impasse cria-se um novo polinômio a partir da derivada linha anterior, onde os coeficientes são multiplicados pelos seus respectivos termos s . Nesse caso a linha anterior representa a equação característica, sendo assim:

$$P(s) = \frac{d}{ds} \left(\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] s^2 \right) - \frac{d}{ds} [g(M + m) + K_p]$$

$$P(s) = \left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] 2s^1$$

Substituindo o polinômio $P(s)$ na segunda linha da matriz de coeficiente e realizando os cálculos necessários tem-se que:

$$\begin{array}{cc} s^2 & \left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] & -g(M + m) + K_p \\ s^1 & \left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] 2 & 0 \\ s^0 & -g(M + m) + K_p & \end{array}$$

Analisando a primeira coluna da matriz de coeficientes, o termo $g(M + m)$ da linha s^0 sempre será negativo pois a aceleração gravidade g , a massa M do conjunto plataforma-haste e a massa m da haste são grandezas positivas, portanto, o fator responsável por determinar a positividade do elemento da primeira coluna da linha s^0 será o ganho proporcional K_p e consequentemente definir se o sistema é o não estável. Para que o sistema seja estável é necessário que o ganho proporcional K_p seja maior que o módulo de $g(M + m)$, ou seja, $K_p > |g(M + m)|$. Caso o valor de K_p seja menor que $|g(M + m)|$, então o sistema terá um comportamento instável, pois ocorrerá uma mudança de sinal entre as linhas s^1 e s^0 .

De acordo com os exemplos de Ogata (p.196 e 526, 2010), nota-se que o ganho K_p responsável por tornar o sistema marginalmente estável, de modo a ocasionar uma resposta oscilatória com amplitude sustentada, deve possuir um valor que anule algum dos elementos da primeira coluna da matriz de coeficientes, esse valor de ganho é conhecido como o ganho crítico do segundo método de Ziegler-Nichols. Dessa maneira, no problema do pêndulo invertido, para que o ganho anule os elementos da linha s^0 é necessário que $K_p = |g(M + m)|$. Sendo assim, substituindo K_p na equação (5.4) resulta em:

$$G_{MF1}(s) = \frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] s^2 - g(M + m) + g(M + m)}$$

$$G_{MF1}(s) = \frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] s^2} \quad 5.5$$

Pode-se notar que a equação (5.5) possui apenas um termo comparado com a forma padrão de um polinômio de segunda ordem, com isso, é fácil perceber que nesse caso o sistema possui raízes nulas e consequentemente o sistema pode ser considerado marginalmente estável pois os polos estão situados na origem do plano complexo. Substituindo os parâmetros físicos do sistema na equação (5.5), tem-se que:

$$G_{MF1}(s) = \frac{1}{0.267s^2} \quad 5.6$$

A Figura (5.5) mostra o gráfico do comportamento da resposta (em radianos) no tempo do sistema de controle em malha fechada expresso pela equação (5.5). Percebe-se que para um ganho K_p igual ao termo $|g(M + m)| = 9.2904$ o sistema não apresenta uma oscilação de amplitude constante dentro do intervalo de tempo proposto, logo, esse não é considerado o ganho crítico e, dessa forma, deve-se aumentar gradualmente o valor de K_p até encontrar o valor do ganho crítico.

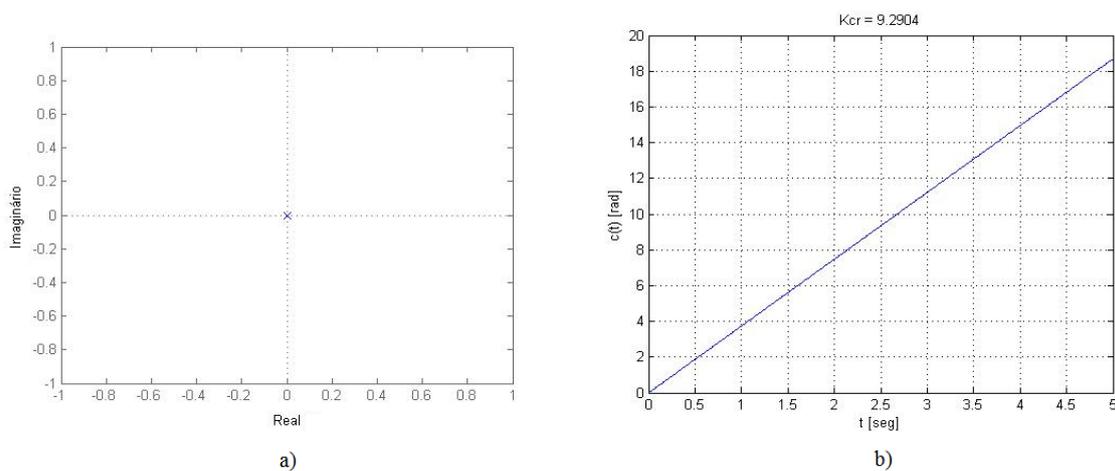


Figura 5.5: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF} equação (5.5) b) Resposta temporal de G_{MF} , equação (5.5).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Na Figura 5.6 são testados diferentes valores de K_p maiores que 9.2904. O que pode-se perceber é que o sistema apresenta uma oscilação sustentada para o primeiro valor escolhido para ganho ($K_p = 9.3$), com uma amplitude de aproximadamente 15rad e uma frequência de oscilação de 23.58s. Pelos critérios de desempenho estabelecidos, esse não seria um valor de ganho viável de ser utilizado pois o ganho proporcional representa a velocidade de resposta do sistema e com uma frequência de oscilação muito baixa, o sistema teria uma resposta muito lenta. Portanto, conforme é realizado o aumento do ganho, observa-se que ocorre a diminuição na frequência de oscilação com uma diminuição da amplitude de resposta. Conclui-se então que para qualquer $K_p > 9.281$ a resposta do sistema apresentará uma oscilação sustentada.

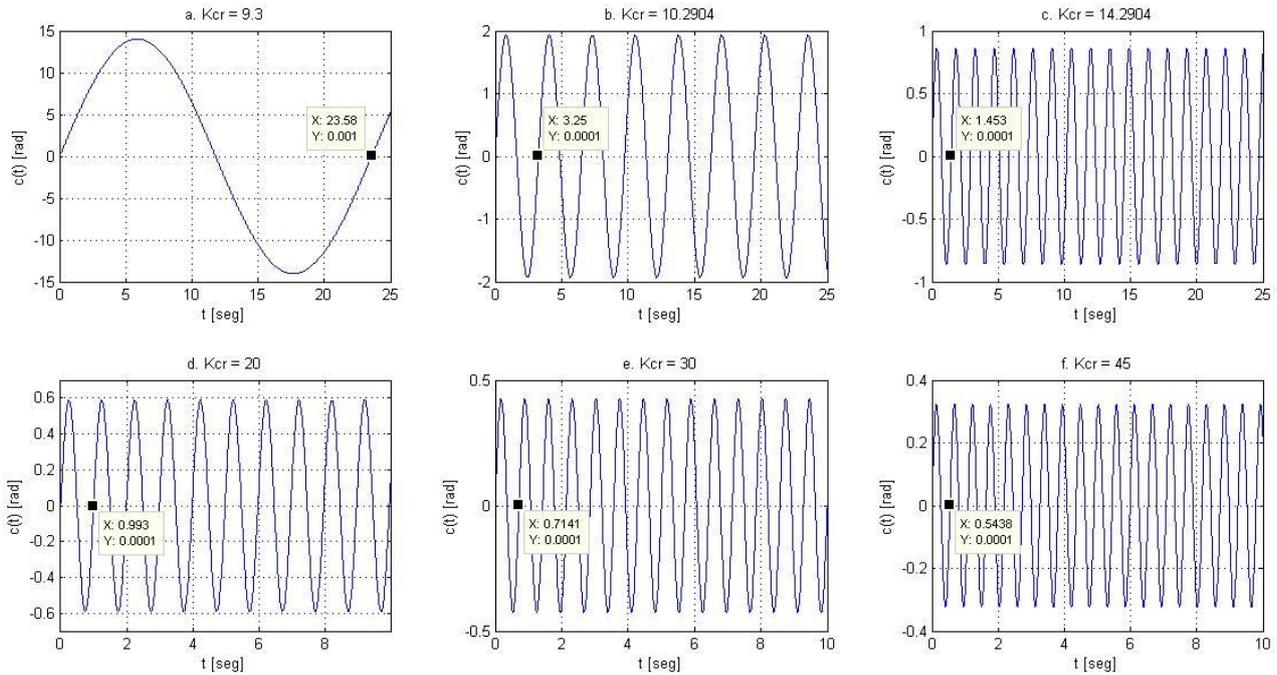


Figura 5.6: a) Resposta temporal de G_{MF} , equação (5.3), para diferentes valores de K_p .

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

O passo seguinte no projeto de controle é determinar o tipo de controlador que será utilizado. A escolha do controlador realizada nesse trabalho é feita de forma empírica, testando as três ações de controle e suas combinações, baseando-se no segundo método de Ziegler-Nichols apresentado na Tabela 2.2, e dessa maneira, escolher o que responder de forma satisfatória os critérios de desempenho. O mesmo se dá para a escolha do ganho crítico K_{cr} , como a primeira oscilação sustentada apresenta um período de valor muito alto, será utilizado todos os valores de K_p apresentado na Figura (5.6) para a análise da melhor resposta.

5.2.1 - Ações proporcional e integral

A função de transferência de um controlador PI da forma padrão pode ser expressa como sendo:

$$C_{PI} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} \quad 5.7$$

Seguindo o mesmo modelo da Figura (5.3) para representar o sistema em malha fechada, substitui-se a equação (5.7) e a equação (5.2) na equação (5.3), resultando em:

$$G_{MF2} = \frac{1}{0.267s^2 - 9.281} \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s}$$

$$G_{MF2} = \frac{1}{(0.267s^2 - 9.281)T_i s + K_p T_i s + K_p}$$

$$G_{MF2} = \frac{T_i s}{0.267T_i s^3 - 9.281T_i s + K_p T_i s + K_p}$$

De acordo com a Tabela 2.2 (que representa o segundo método de Ziegler-Nichols, visto no Capítulo 2), o ganho proporcional do controlador PI é expresso como

$$K_p = 0.45K_{cr}$$

e o tempo integrativo por:

$$T_i = \frac{1}{1.2}P_{cr}$$

Dessa maneira, a função de transferência em malha fechada do sistema do pêndulo invertido quando submetido a um controlador proporcional-integral utilizando o segundo método de sintonia de Ziegler-Nichols fica:

$$G_{MF2} = \frac{\frac{1}{1.2}P_{cr}s}{0.267\frac{1}{1.2}P_{cr}s^3 - 9.281\frac{1}{1.2}P_{cr}s + 0.45K_{cr}\frac{1}{1.2}P_{cr}s + 0.45K_{cr}}$$

$$G_{MF2} = \frac{0.833P_{cr}s}{0.223P_{cr}s^3 + (0.375K_{cr} - 7.734)P_{cr}s + 0.45K_{cr}} \quad 5.8$$

Para um ganho crítico $K_{cr} = 9.3$ e um período de oscilação $P_{cr} = 23.58$, resulta em um ganho proporcional $K_p = 4.185$ e um tempo integrativo $T_i = 19.650$, onde fornece através da equação (5.8) uma função de transferência expressa como

$$G_{MF2a} = \frac{19.64s}{5.258s^3 - 100.1s + 4.185} \quad 5.9$$

Os polos da função de transferência G_{MF3a} são $s_1 = -4.3845$, $s_2 = 4.3427$ e $s_3 = 0.0418$. Os polos s_2 e s_3 possuem sinal positivo, logo, eles estão localizados no semiplano direito do plano complexo, como pode ser visto na Figura (5.7a). Sendo assim, o sistema é instável para $K_p = 4.185$ e $T_i = 19.620$, conforme mostrado na Figura (5.7b).

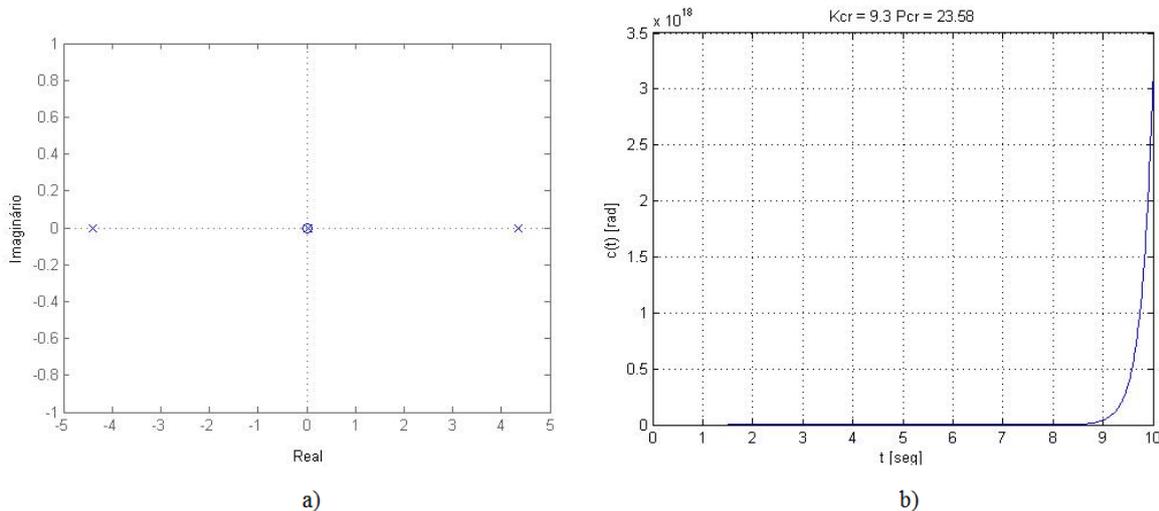


Figura 5.7: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s (j\omega)$ de G_{MF2a} da equação (5.9) b) Resposta temporal de G_{MF2a} , equação (5.9).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

A função de transferência para $K_{cr} = 10.2904$ e $P_{cr} = 3.25$ é

$$G_{MF2b} = \frac{2.707s}{0.7248s^3 - 12.590s + 4.631} \quad 5.10$$

Seus polos são $s_1 = -4.3415$, $s_2 = 3.9709$ e $s_3 = 0.3706$, conforme Figura (5.8a). Como no caso anterior, o sistema em malha fechada possui dois polos localizados no lado direito do plano complexo e consequentemente o sistema é também instável para $K_p = 4.6307$ e $T_i = 2.7083$, como visto na Figura (5.8b).

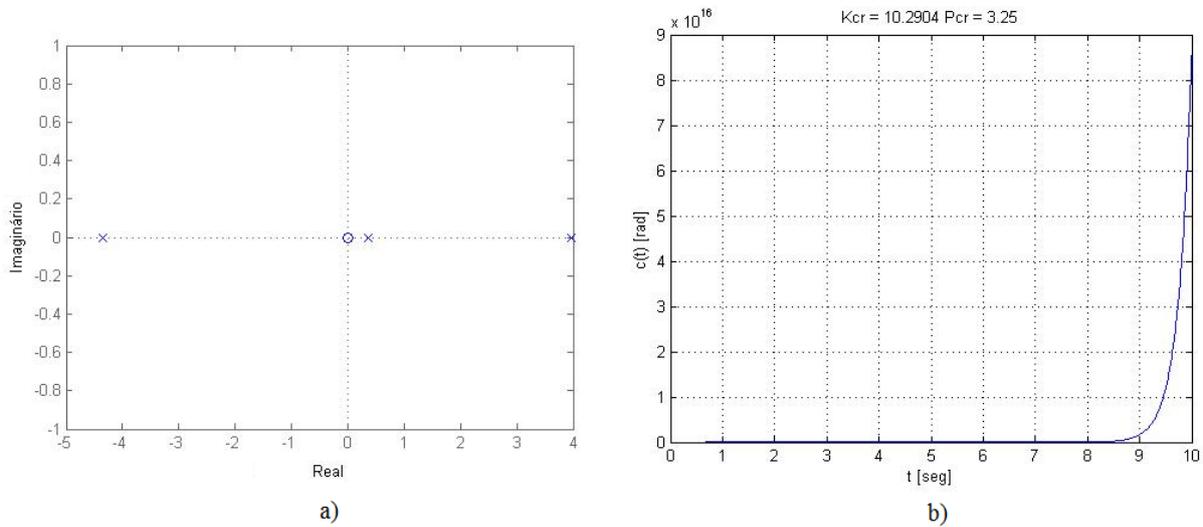


Figura 5.8: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF2b} da equação (5.10) b) Resposta temporal de G_{MF2b} da equação (5.10).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Para $K_{cr} = 14.2904$ e $P_{cr} = 1.453$, a função de transferência expressa pela equação (5.8) fica:

$$G_{MF2c} = \frac{1.210s}{0.324s^3 - 3.451s + 6.431} \quad 5.11$$

A função de transferência G_{MF2c} possui os polos $s_1 = -3.9579$, $s_2 = 1.9190 + 1.0479j$ e $s_3 = 1.9190 - 1.0479j$, podendo ser visto através da Figura (5.9a). Devido ao fato dos polos s_2 e s_3 serem positivos, o sistema é instável para $K_p = 6.4307$ e $T_i = 1.2108$, confirmado pela Figura (5.9b).

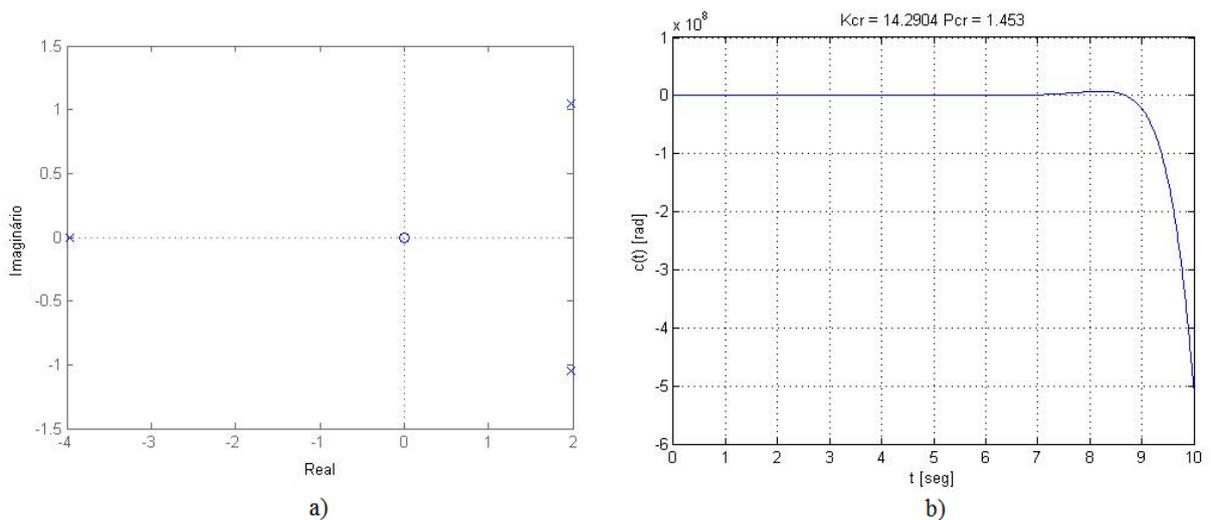


Figura 5.9: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF2c} equação (5.11) b) Resposta temporal de G_{MF2c} da equação (5.11).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Para $K_{cr} = 20.000$ e $P_{cr} = 0.993$, a função de transferência expressa pela equação (5.8) fica:

$$G_{MF2d} = \frac{0.8272s}{0.2214s^3 - 0.2324s + 9.000} \quad 5.12$$

A função de transferência G_{MF2d} possui os polos $s_1 = -3.5399$, $s_2 = 1.7699 + 2.8894j$ e $s_3 = 1.7699 - 2.8894j$, Figura (5.10a). Devido ao fato dos polos s_2 e s_3 serem positivos, os sistema é instável para $K_p = 9.000$ e $T_i = 0.8275$, Figura (5.10b).

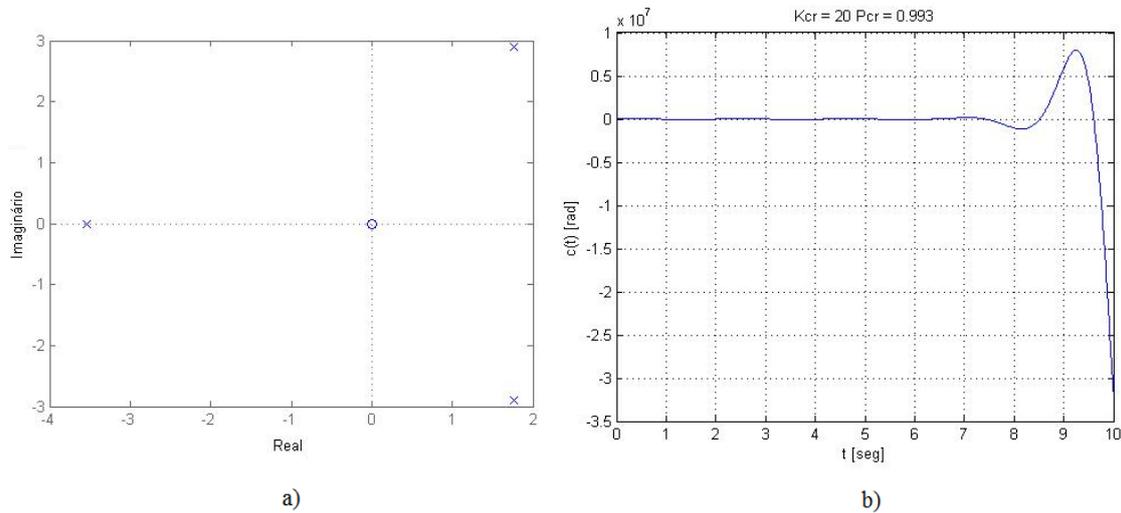


Figura 5.10: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s (j\omega)$ de G_{MF2d} equação (5.12) b) Resposta temporal de G_{MF2d} da equação (5.12).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

A função de transferência representada pela equação (5.8) é escrita para $K_{cr} = 30.000$ e $P_{cr} = 0.7141$ como:

$$G_{MF2e} = \frac{0.5948s}{0.1592s^3 + 2.511s + 13.500} \quad 5.13$$

A função de transferência G_{MF2e} possui os polos $s_1 = -3.2332$, $s_2 = 1.6166 + 4.8587j$ e $s_3 = 1.6166 - 4.8587j$, como visto na Figura (5.1a). Devido ao fato dos polos s_2 e s_3 serem positivos, o sistema é instável para $K_p = 13.500$ e $T_i = 0.5951$, comprovado pela Figura (5.11b).

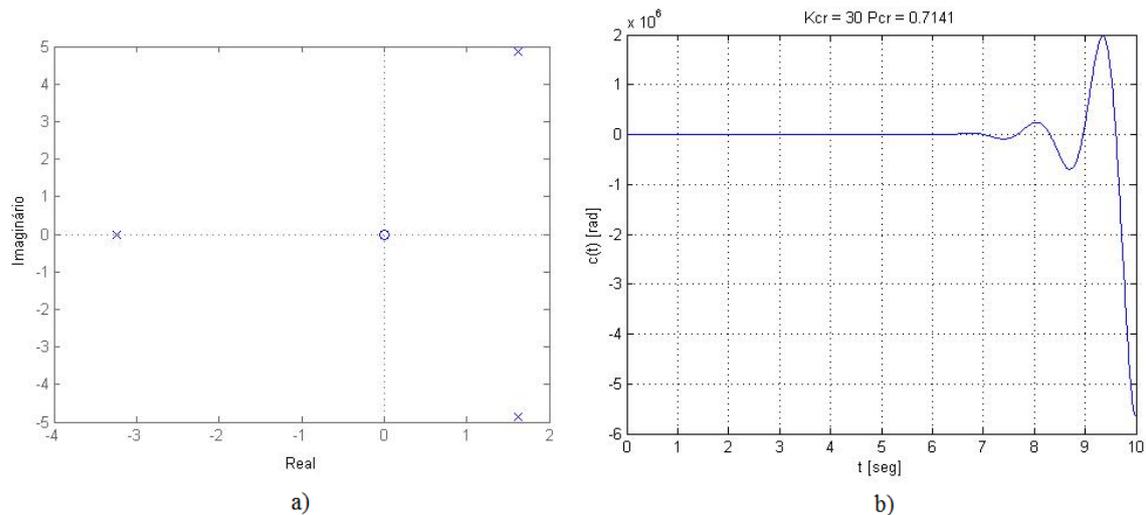


Figura 5.11: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s (j\omega)$ de G_{MF2e} equação (5.13) b) Resposta temporal de G_{MF2e} da equação (5.13).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Tendo $K_{cr} = 45.000$ e $P_{cr} = 0.5438$, a função de transferência expressa pela equação (5.8) pode ser escrita como:

$$G_{MF2f} = \frac{0.453s}{0.1213s^3 + 4.971s + 20.250} \quad 5.14$$

A função de transferência G_{MF2f} possui os polos $s_1 = -3.2423$, $s_2 = 1.6211 + 6.9911j$ e $s_3 = 1.6211 - 6.9911j$, conforme o mapa de polos e zeros da Figura (5.12a). Como os polos s_2 e s_3 são positivos, o sistema também é instável para $K_p = 20.250$ e $T_i = 0.4532$, de acordo com a Figura (5.12b).

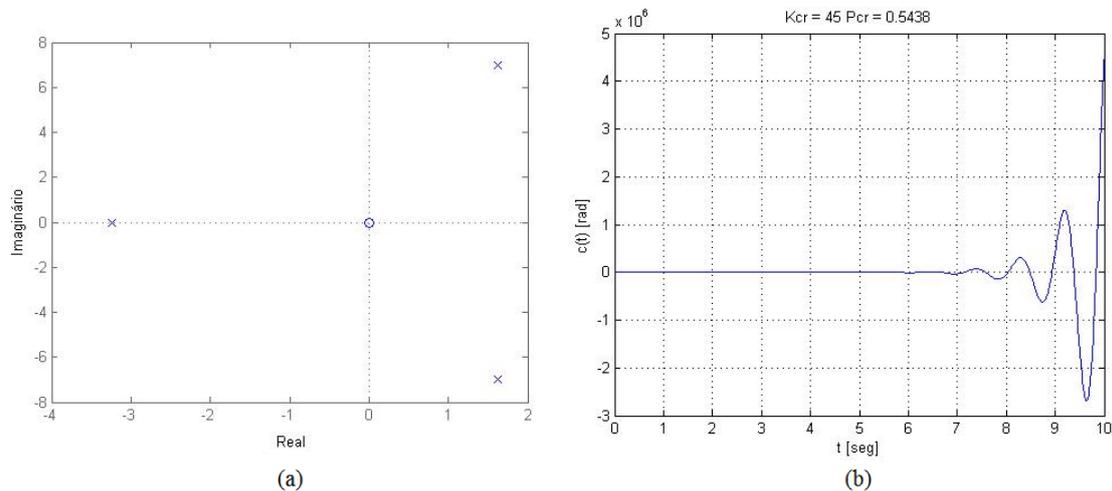


Figura 5.12: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s (j\omega)$ de G_{MF2f} equação (5.14) b) Resposta temporal de G_{MF2f} da equação (5.14).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Pode se notar, por meio das Figuras (5.7) a (5.12), que para todos os valores escolhidos para o ganho crítico K_{cr} , o sistema não se estabiliza, e portanto, o controlador proporcional-integral não é capaz de estabilizar a haste do pêndulo na posição vertical.

5.2.2 - Ação Derivativa

A função de transferência de um controlador proporcional-derivativo (PD) da forma padrão é dada como:

$$C_{PD} = K_p(1 + T_d s) = K_p + K_p T_d s \quad 5.15$$

O sistema em malha fechada quando submetido ao controlador PD também pode ser representado pela Figura (5.2), e dessa forma, sua função de transferência é determinada a partir da substituição das equações (5.1) e (5.15) na equação (5.2), conforme segue abaixo.

$$G_{MF} = \frac{\frac{1}{0.267s^2 - 9.281}}{1 + \frac{1}{0.267s^2 - 9.281}(K_p + K_p T_d s)}$$

$$G_{MF} = \frac{\frac{1}{0.267s^2 - 9.281}}{\frac{0.267s^2 - 9.281 + K_p + K_p T_d s}{0.267s^2 - 9.281}}$$

$$G_{MF} = \frac{1}{0.267s^2 + K_p T_d s + K_p - 9.281} \quad 5.16$$

Os métodos de sintonia proposto por Ziegler-Nichols não concebem um conjunto de fórmulas para determinar o valor do ganho proporcional K_p e do tempo derivativo T_d de um controlador PD, como visto na Tabela 2.2 para os outros tipos de controladores. Sendo assim, para poder sair desse impasse, o meio utilizado para orientar a identificação dos valores de K_p e T_d é utilizar as formulas apresentadas na tabela (referente ao segundo método) correspondente ao controlador do tipo PID desconsiderando o tempo integrativo T_i . Logo, supondo que

$$K_p = 0.6K_{cr}$$

e

$$T_d = 0.125P_{cr}$$

a equação (5.16) pode ser reescrita como:

$$G_{MF3} = \frac{1}{0.267s^2 + 0.075K_{cr}P_{cr}s + 0.6K_{cr} - 9.281} \quad 5.17$$

Para $K_{cr} = 9.300$ e $P_{cr} = 23.58$, tem-se que a função de transferência representada pela equação (5.17) fica:

$$G_{MF3a} = \frac{1}{0.267 s^2 + 16.45s - 3.701} \quad 5.18$$

Ao resolver a equação característica da função de transferência G_{MF3a} , identifica-se que o sistema em malha fechada apresenta os polos $s_1 = -61.8236$ e $s_2 = 0.2242$, conforme a Figura (5.13a). Devido ao fato do polo s_2 ser positivo, o sistema é instável para $K_p = 5.580$ e $T_i = 2.9475$, como visto na Figura (5.13b).

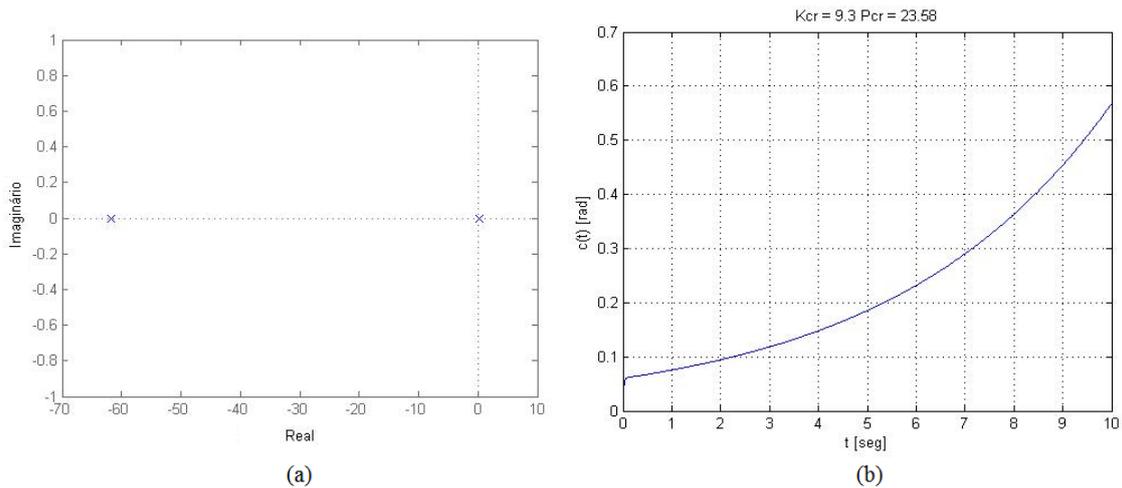


Figura 5.13: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s (j\omega)$ de G_{MF3a} equação (5.18) b) Resposta temporal de G_{MF3a} da equação (5.18).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

A função de transferência para $K_{cr} = 10.2904$ e $P_{cr} = 3.25$ é

$$G_{MF3b} = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.267 s^2 + 2.508s - 3.107} \quad 5.19$$

A função de transferência G_{MF3b} possui os polos $s_1 = -10.5023$ e $s_2 = 1.1079$, como visto na Figura (5.14a). Por s_2 ser um polo positivo, o sistema é instável para $K_p = 6.1742$ e $T_i = 0.4063$, como comprovado na Figura (5.14b).

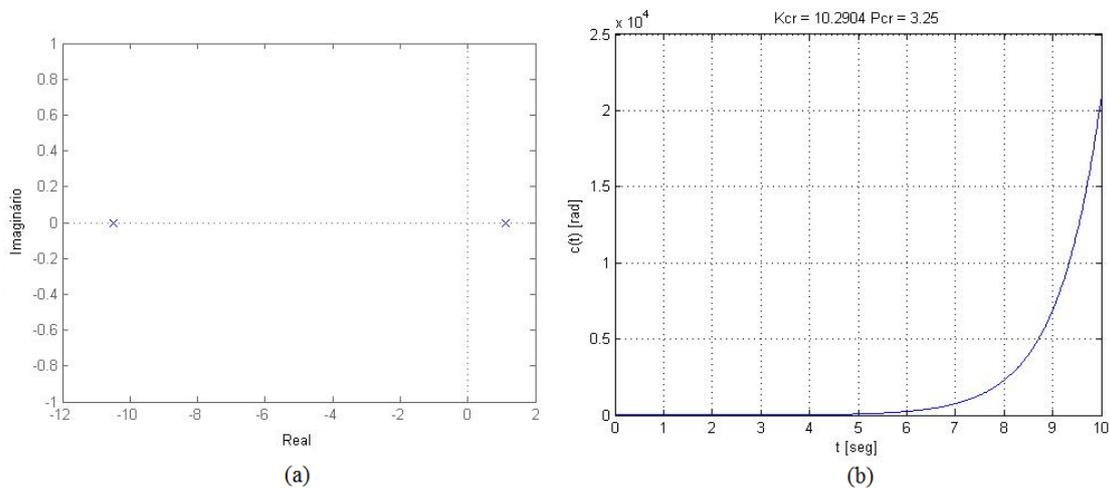


Figura 5.14: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s (j\omega)$ de G_{MF3b} , equação (5.19) b) Resposta temporal de G_{MF3b} , equação (5.19).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Para $K_{cr} = 14.2904$ e $P_{cr} = 1.453$, a função de transferência expressa pela equação (5.17) fica:

$$G_{MF3c} = \frac{1}{0.267 s^2 + 1.557s - 0.7068} \quad 5.20$$

onde seus polos são: $s_1 = -6.2557$ e $s_2 = 0.4231$, Figura (5.15a). Sendo o polo s_2 positivo, logo, o sistema é instável para $K_p = 8.5742$ e $T_d = 0.1816$, como visto na Figura (5.15b).

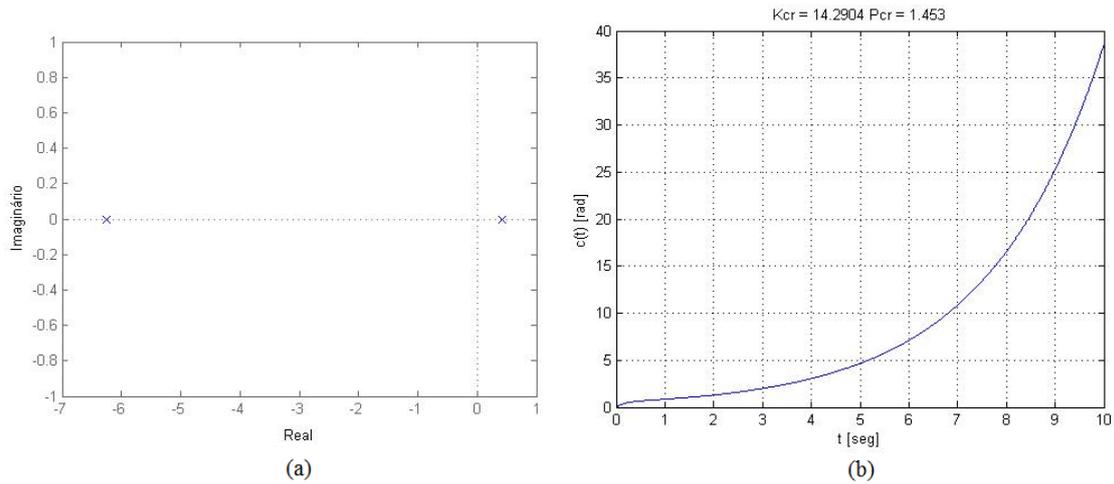


Figura 5.15: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3c} equação (5.20) b) Resposta temporal de G_{MF3c} , equação (5.20).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

A função de transferência expressa pela equação (5.17) pode ser escrita para $K_{cr} = 20.000$ e $P_{cr} = 0.993$, como:

$$G_{MF3d} = \frac{1}{0.267 s^2 + 1.49s + 2.719} \quad 5.21$$

onde a solução de sua equação característica da equação (5.21) resulta em $s_1 = -2.7893 + 1.5502j$ e $s_2 = -2.7893 - 1.5502j$, conforme visto na Figura (5.16a). Como todos os polos do sistema possuem parte real negativa, o sistema é estável para $K_p = 12$ e $T_d = 0.1241$, de acordo com a Figura (5.16b).

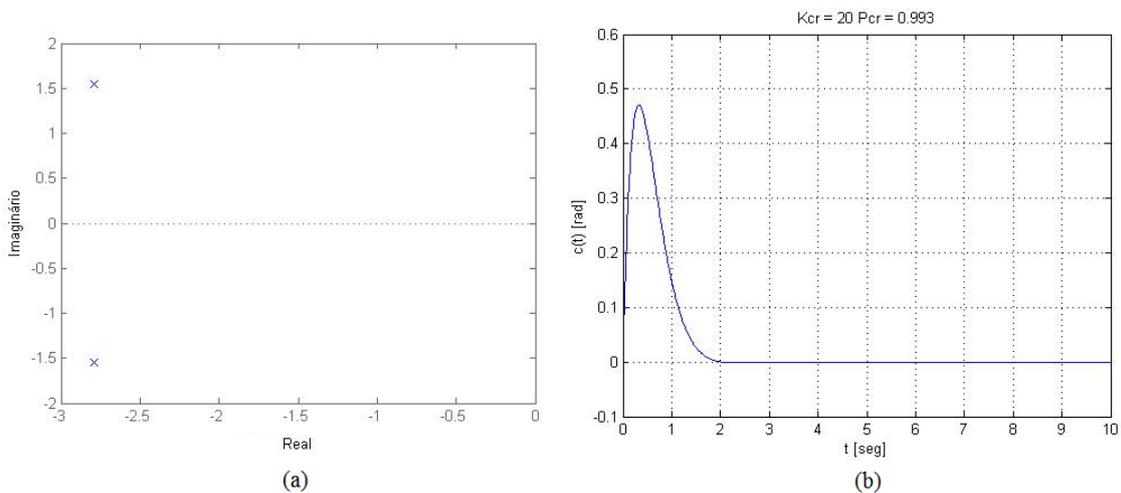


Figura 5.16: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3d} , equação (5.21) b) Resposta temporal de G_{MF3d} , equação (5.21).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Para $K_{cr} = 30.000$ e $P_{cr} = 0.7141$, a função de transferência expressa pela equação (5.17) fica:

$$G_{MF3e} = \frac{1}{0.267 s^2 + 1.607s + 8.719} \quad 5.22$$

A função de transferência G_{MF3e} possui os polos $s_1 = -3.0088 + 4.8582j$ e $s_2 = -3.0088 - 4.8582j$, como na Figura (5.17a). Devido ao fato de que todos os polos possuem parte real negativa, o sistema também é estável para $K_p = 18.000$ e $T_d = 0.0893$, Figura (5.17b).

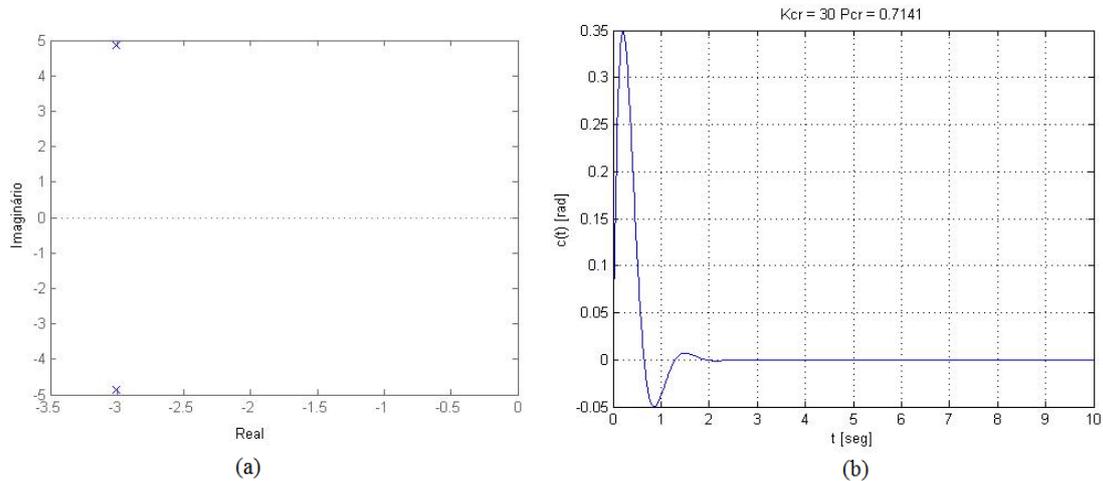


Figura 5.17: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3e} equação (5.5) b) Resposta temporal de G_{MF3e} da equação (5.5).
Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Para $K_{cr} = 45.000$ e $P_{cr} = 0.5438$, a função de transferência representada pela equação (5.17) pode ser escrita como:

$$G_{MF3f} = \frac{1}{0.267 s^2 + 1.835s + 17.720} \quad 5.23$$

sendo $s_1 = -3.4369 + 7.3858j$ e $s_2 = -3.4369 - 7.3858j$ os polos da função de transferência de G_{MF3f} , de acordo com a Figura (5.18a). Como os polos possuem parte real negativa, o sistema é estável para $K_p = 27.000$ e $T_d = 0.06798$, como visto na Figura (5.18b).

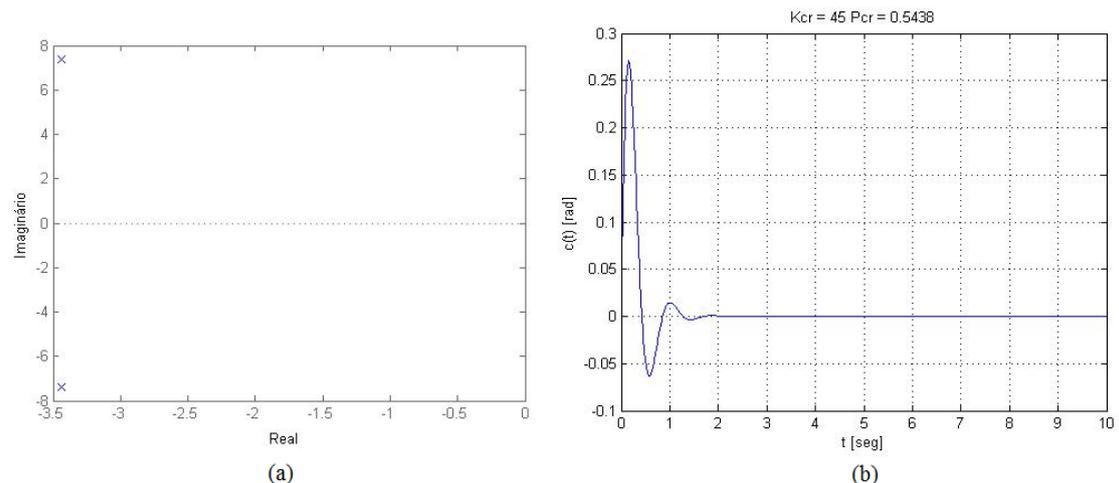


Figura 5.18: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo $s(j\omega)$ de G_{MF3f} , equação (5.23) b) Resposta temporal de G_{MF3f} , equação (5.23).
Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Como pode ser observado através das respostas apresentadas pelos gráficos das Figuras (5.13) à (5.18) (para cada valor escolhido de K_{cr} e P_{cr}), o sistema se estabiliza com um valor de

ganho crítico aproximadamente igual a vinte. Um ponto interessante de se notar neste problema é que quando a escolha dos valores de K_p e T_d se baseiam nos critérios do segundo método de Ziegler-Nichols, observa-se que o aumento do valor da ação proporcional ocasiona uma diminuição no da ação derivativa, ou seja, ocorre um aumento na diferença entre eles. Por exemplo, quando o ganho crítico é escolhido como $K_{cr} = 9.300$, onde seu período de oscilação sustentada é $P_{cr} = 23.58$, o ganho proporcional é $K_p = 5.58$ e o tempo derivativo é $T_d = 2.947$. Nesse caso a diferença é de 2.633. Quando se escolhe $K_{cr} = 10.2904$, sendo seu período de oscilação $P_{cr} = 3.25$, resulta em $K_p = 6.174$ e $T_d = 0.4062$. A diferença entre K_p e T_d é 5.7678. Para $K_{cr} = 45.000$, onde $P_{cr} = 0.5438$, tem-se que $K_p = 27$ e $T_d = 0.06798$, e sendo assim, a diferença é 26.932.

Seguindo adiante, dois importantes pontos devem ser analisados nesses gráficos conforme a escolha dos critérios de desempenho estabelecido: o máximo sobressinal e o tempo de acomodação. Nota-se que o aumento na diferença entre os valores de K_p e T_d provoca uma diminuição no valor do máximo sobressinal e um aumento na oscilação da resposta do sistema, antes de sua saída alcançar a estabilidade. Para a escolha do ganho crítico igual a 20 o máximo sobressinal é de aproximadamente 0.46rad e o tempo de acomodação está inferior a 2s. Quando o ganho crítico é de 45, o máximo sobressinal passa a ter um valor por volta de 0.255rad e o tempo de acomodação mantém-se próximo de 2s. Dessa maneira, nenhum dos valores de sobressinal para os diferentes valores de ganho se enquadram dentro do critério de desempenho estipulado pois o valor máximo escolhido para esse parâmetro é de 0.15rad. Já o tempo de acomodação se encontra dentro do limite estabelecido de 3s. Dessa maneira, para diminuir o sobressinal e a oscilação do sistema é necessário aumentar o valor de T_d até que a resposta do sistema alcance um valor abaixo do escolhido para máximo sobressinal. Sendo assim, a Figura (5.19) mostra a resposta do sistema para diferentes valores de T_d , onde o ganho crítico escolhido é $K_{cr} = 45$.

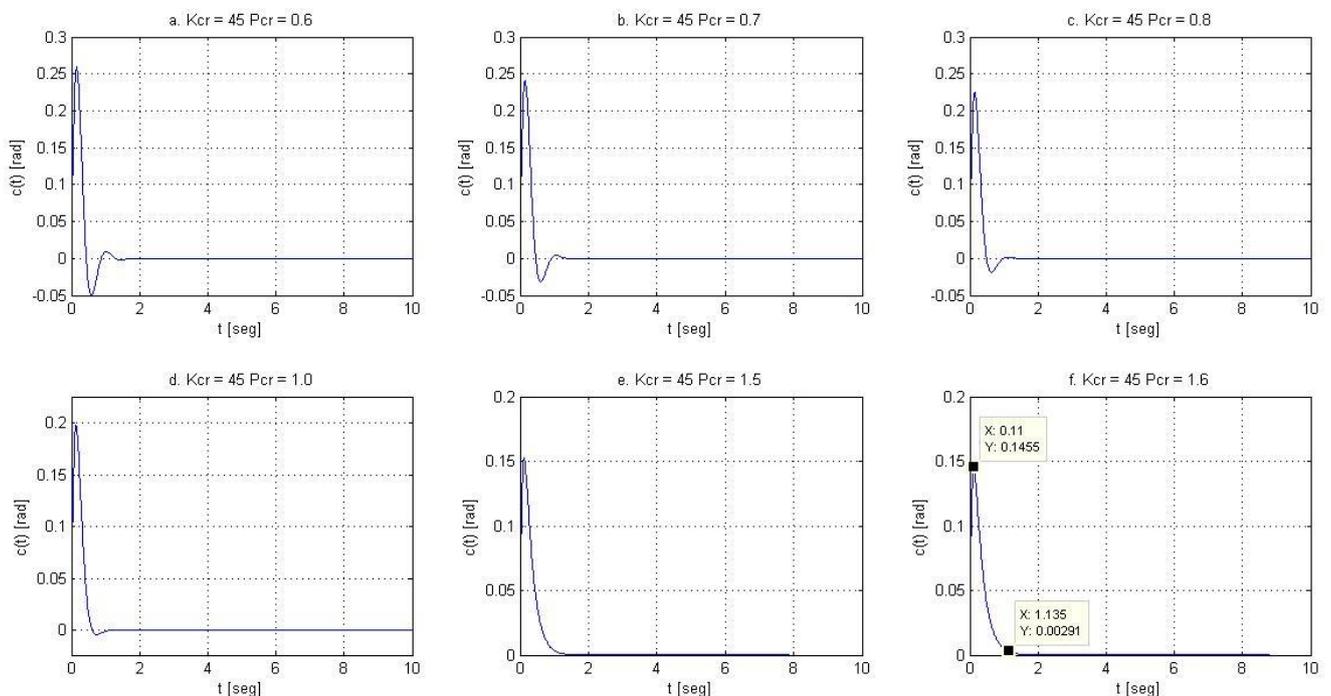


Figura 5.19: a) Resposta temporal de G_{MF3} , equação (5.17), para um ganho crítico $K_{cr} = 45$ e diferentes valores de T_d .
Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

Observa-se na figura anterior que o aumento do tempo derivativo T_d provoca: uma diminuição no sobressinal, a redução da oscilação na resposta do sistema e uma leve diminuição na velocidade da resposta. Dentre os valores escolhidos de T_d , conclui-se que a Figura (5.19f) melhor se enquadra dentro dos parâmetros de desempenho escolhido para o sistema e, portanto, os valores do ganho proporcional e do tempo derivativo do controlador PD são respectivamente

$$K_p = 27 \text{ e } T_d = 0.2$$

Sendo assim, a função de transferência do sistema em malha fechada do sistema do pêndulo invertido submetido a um controlador PD é, a partir da equação (5.17), dada como:

$$G_{MF} = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.267s^2 + 5.400s + 17.719} \quad 5.24$$

5.2.3 - Análise do comportamento da plataforma móvel

Identificados os parâmetros do controlador responsáveis por estabilizar a haste do pêndulo na posição esperada quando submetido a um distúrbio externo, é pertinente analisar a reação dinâmica da plataforma móvel durante o processo regulador do ângulo do pêndulo, provocado pela adição do controlador e fechamento da malha de controle. Essa análise é realizada através da inclusão da função de transferência da plataforma móvel no sistema, de forma que sua entrada seja submetida ao mesmo sinal de controle que a função de transferência da haste recebe do controlador. A Figura (5.20) apresenta o diagrama de blocos do sistema acrescido da função de transferência da plataforma móvel.

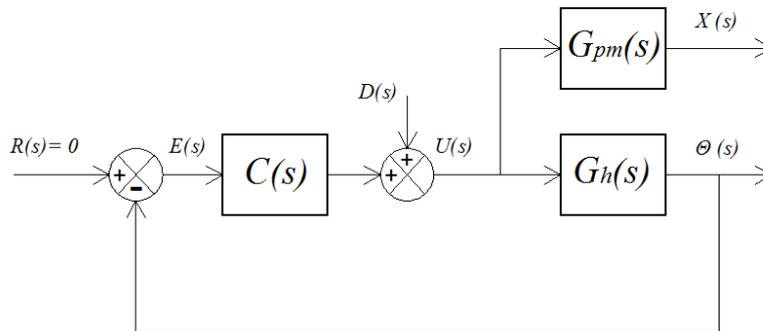


Figura 5.20: a) Diagrama de blocos do sistema de controle da haste do pêndulo, incluindo a função de transferência da plataforma móvel.

Fonte: Própria, baseado em Messner e Tilbury (2011).

A função de transferência $G_h(s)$ da haste do pêndulo é dada como sendo:

$$G_h(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = - \frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] s^2 - g(M + m)}$$

Substituindo os parâmetros físicos m , M , l , I e g do sistema do pêndulo invertido pelos seus respectivos valores, tem-se que

$$G_h(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = - \frac{1.000}{0.267s^2 - 9.281}$$

A função de transferência da plataforma móvel $X(s)/U(s)$ dada pela equação (4.21) do Capítulo 4 pode ser escrita como:

$$G_{pm}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = -\frac{(ml)^2 g}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2} \frac{\Theta(s)}{U(s)} + \frac{(I + ml^2)}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2}$$

onde $\Theta(s)/U(s)$ representa a função de transferência $G_h(s)$ da haste do pêndulo, e dessa maneira, a $G_{pm}(s)$ pode ser reescrita como:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \left(-\frac{(ml)^2 g}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2} \right) \left(\frac{1}{\left[\frac{IM + m(I + Ml^2)}{ml} \right] s^2 - g(M + m)} \right) + \frac{(I + ml^2)}{[IM + m(I + Ml^2)]s^2}$$

Substituindo os parâmetros do sistema, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{U(s)} &= \left(-\frac{0.02305}{0.01297s^2} \right) \left(\frac{1}{(0.2675s^2 - 9.2904)} \right) + \frac{0.01617}{0.01297s^2} \\ \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{(5.611 \times 10^{-5})s^4 - (224.8 \times 10^{-5})s^2}{(4.503 \times 10^{-5})s^6 - (156.4 \times 10^{-5})s^4} \end{aligned}$$

Multiplicando o numerado e o denominador de por 1×10^5 resulta em:

$$G_{pm}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{5.611s^4 - 224.8s^2}{4.503s^6 - 156.4s^4}$$

O controlador que estabiliza a haste do pêndulo é do tipo PD e sua função de transferência é escrita como:

$$C(s) = K_p T_d s + K_p$$

Substituindo os parâmetros do controlador pelos valores, que estabilizando o sistema dentro dos critérios de estabilidade fixados no começo do capítulo, encontradas anteriormente, tem-se que:

$$C(s) = 5.4s + 27$$

Para melhor visualizar a relação entre os componentes do sistema, o diagrama de blocos representado pela Figura (5.20) pode ser simplificado conforme a figura abaixo.

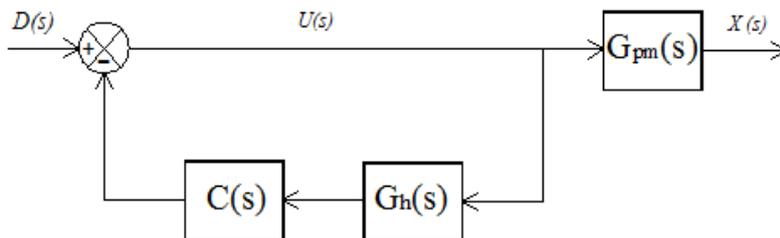


Figura 5.21: Diagrama de blocos rearranjado do sistema de controle da haste do pêndulo, incluindo a função de transferência da plataforma móvel.

Fonte: Própria, baseado em Messner e Tilbury (2011).

O diagrama de blocos da Figura (5.21) pode ser retratado através da função de transferência:

$$G_t(s) = \frac{1}{1 + G_h(s)C(s)} G_{pm}(s)$$

Ao substituir os termos $G_h(s)$, $G_{pm}(s)$ e $C(s)$, a equação anterior fica:

$$G_t(s) = \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{0.2675s^2 - 9.2904} \right) (5.4s + 27)} \right] \left(\frac{5.611s^4 - 224.8s^2}{4.503s^6 - 156.4s^4} \right)$$

$$G_t(s) = \left(\frac{1}{1 - \frac{5.4s + 27}{0.2675s^2 - 9.2904}} \right) \left(\frac{5.611s^4 - 224.8s^2}{4.503s^6 - 156.4s^4} \right)$$

$$G_t(s) = \left(\frac{1}{\frac{0.2675s^2 - 5.4s - 36.2904}{0.2675s^2 - 9.2904}} \right) \left(\frac{5.611s^4 - 224.8s^2}{4.503s^6 - 156.4s^4} \right)$$

$$G_t(s) = \left(\frac{0.2675s^2 - 9.2904}{0.2675s^2 - 5.4s - 36.2904} \right) \left(\frac{5.611s^4 - 224.8s^2}{4.503s^6 - 156.4s^4} \right)$$

$$G_t(s) = \frac{1.501s^6 - 112.2s^4 + 2088s^2}{1.204s^8 + 24.31s^7 + 37.91s^6 - 844.4s^5 - 2769s^4} \quad 5.25$$

O comportamento dinâmico da plataforma móvel pode ser observado por meio da Figura (5.22). Pode se ver, através do gráfico na Figura (5.2b), que a plataforma apresenta uma variação constante em sua resposta, e portanto, manifesta um comportamento instável. Essa instabilidade é confirmada a partir do mapa de polos e zeros apresentados na Figura (5.22a), onde a equação característica da função de transferência geral do sistema apresenta um polo real localizado no semiplano direito do plano s , com valor correspondente a 5.8935. Com isso, percebe-se que apesar de o controlador PD projetado estabilizar o ângulo da haste de pêndulo, a plataforma móvel apresenta um comportamento dinâmico instável, e portanto, fisicamente seria inviável a implementação desse sistema de controle, pois a dinâmica da haste esta intrinsecamente ligada a dinâmica da plataforma móvel.

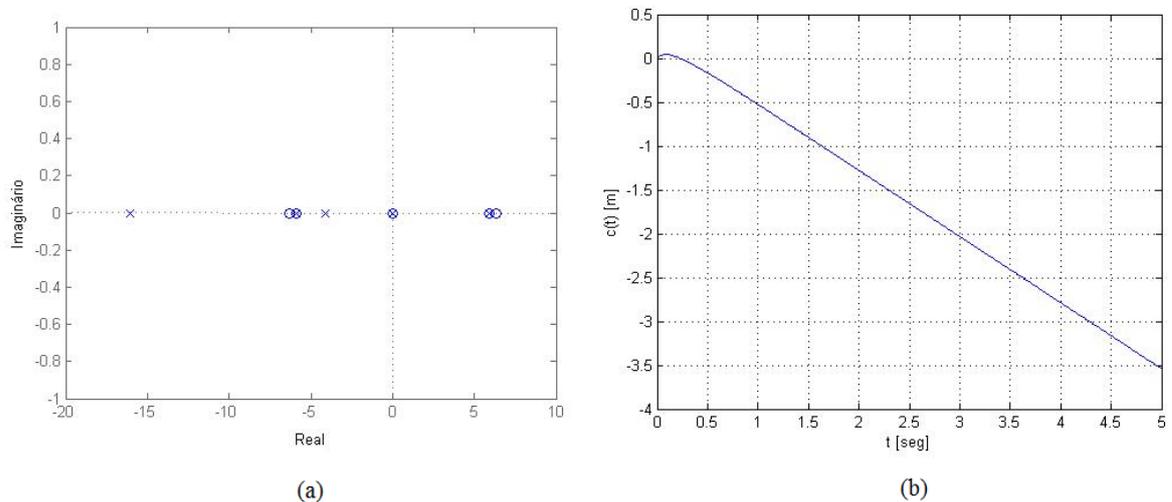


Figura 5.22: a) Mapa de polos e zeros no plano complexo s ($j\omega$) de G_t , equação (5.25) b) Resposta temporal de G_t , equação (5.25).

Fonte: Própria (resultados obtidos através do MatLab®).

5.3 – Regulador Linear Quadrático

O regulador linear quadrático, conforme visto no Capítulo 3, é uma técnica de controle moderno que permite determinar o valor ótimo para o ganho K de realimentação de estados através da utilização de um índice de desempenho quadrático, onde implica em uma boa velocidade de convergência ao estado zero quando o sistema é submetido a uma amplitude de entrada limitada, resultando em um melhor desempenho de sua resposta.

Para se ter um desempenho ótimo da resposta do sistema, primeiramente é necessário estabelecer alguns critérios de comportamento que devem ser levados em consideração para que seja realizada a análise da resposta temporal do sistema e assim, verificar se seu desempenho é satisfatório. Devido ao fato do pêndulo invertido ser um sistema multivariável, seus critérios de desempenho devem ser escolhidos conforme a resposta desejada para as variáveis de estados mais relevantes do sistema, que neste caso seria a posição angular da haste e a posição linear da plataforma móvel. Sendo assim, a análise do comportamento da resposta, diferentemente do estabelecido para o controlador PID, é feita com base na aplicação de um sinal de teste em degrau com valor de 0.2m na variável de estado x , isto é, na posição linear da plataforma.

A representação em espaço de estados do sistema do pêndulo invertido dado pelas equações (4.15) e (4.16) são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{IM+m(I+Ml^2)} \\ 0 \\ \frac{I+ml^2}{IM+m(I+Ml^2)} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Considerando os valores dos parâmetros físicos do sistema do pêndulo invertido (dados anteriormente) como sendo a massa da haste do pêndulo $m = 0.193kg$, seu comprimento $l = 0.250m$ e seu momento de inércia $I = 0.004kg \cdot m^2$, a massa da plataforma móvel $M = 0.754kg$ e por fim a aceleração da gravidade $g = 9.800m/s^2$, sua representação em espaço de estados pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 34.731 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.777 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4.737 \\ 0 \\ 0.624 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo no projeto do controlador com realimentação de estados é verificar a condição de controlabilidade do sistema. Conforme visto no Capítulo 3, para que o sistema seja de estado completamente controlável é obrigatório que sua matriz de controlabilidade todos os seus vetores colunas que sejam linearmente independentes. Dessa maneira, a matriz de controlabilidade é dado como:

$$\mathcal{C} = [B \quad : \quad AB \quad : \quad A^2B \quad : \quad \dots \quad : \quad A^{n-1}B]$$

Substituindo as matrizes A e B da equação (4.15) na matriz \mathcal{C} , e realizando os devidos cálculos, resulta na equação (4.23), sendo ela:

$$\mathcal{C}_{PI} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ml}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^2(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} \\ -\frac{ml}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^2(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 \\ 0 & \frac{I+Ml^2}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^3g}{IM+m(I+Ml^2)} \\ -\frac{I+Ml^2}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & \frac{(ml)^3g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

A substituição dos termos da matriz anterior pelos parâmetros do sistema do pêndulo invertido dado anteriormente resulta em:

$$\mathcal{C}_{PI} = \begin{bmatrix} 0 & -3.738 & 0 & 1.684 \\ -3.738 & 0 & 1.684 & 0 \\ 0 & 3.944 & 0 & 0.086 \\ -3.944 & 0 & 0.086 & 0 \end{bmatrix} \quad 5.26$$

Percebe-se através da equação (5.26) que o sistema proposto é controlável, comprovando de forma numérica o que já havia sido visto no Capítulo 4. Sendo assim, o sistema do pêndulo invertido pode ser controlado através de uma lei de controle quando submetido a uma realimentação de estados, sujeita a um ganho de realimentação adequada.

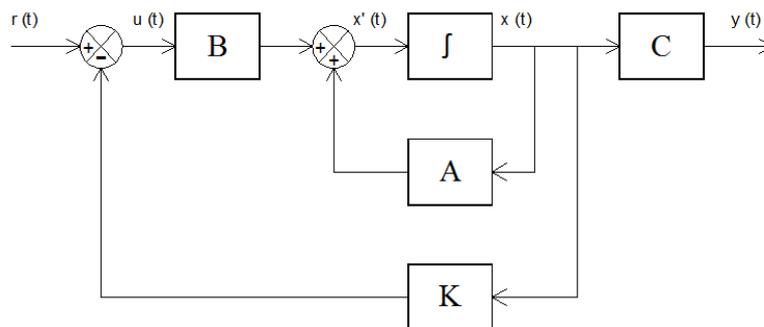


Figura 5.23: Diagrama de blocos de um sistema representado pelo seu modelo em espaço de estados com realimentação de estados.

Fonte: Própria, baseado em Messner e Tilbury (2011).

Conforme visto no Capítulo 3, a lei de controle é expressa pela equação (3.19), sendo ela dada como:

$$u(t) = -Kx(t)$$

e o índice de desempenho, de acordo com a equação (3.20), é:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

A matriz Q representa o peso dado para cada variável de estado x referente ao erro de cada uma no instante t em relação ao estado zero e a matriz R o consumo de energia de cada entrada u (como pôde ser visto no capítulo 3). Normalmente, essas matrizes de ponderação são representadas na forma diagonal, na qual permite atribuir individualmente a importância do erro

de cada estado e definir a energia absorvida por cada entrada. Dessa maneira, os valores atribuídos as matrizes de ponderação para o problema do pêndulo invertido são:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

Pode-se observar que a matriz de ponderação Q possui dimensão quatro pois o sistema do pêndulo invertido apresenta quatro variáveis de estado (como visto no Capítulo 4) e sua diagonal principal foi escolhida para ter dois elementos nulos e dois elementos não-nulos. Os elementos não-nulos a_{11} e a_{33} representam respectivamente a posição angular da haste e a posição linear da plataforma móvel, os elementos nulos a_{22} e a_{44} correspondem nessa ordem a velocidade angular da haste e a velocidade linear da plataforma móvel. A escolha de atribuir valor zero para a_{22} e a_{44} se deve a opção de definir que os elementos a_{11} e a_{33} possuam maior relevância que os anteriores. Como neste trabalho a escolha dos valores dos elementos da matriz de ponderação é feita de forma empírica, a escolha do valor um serve como ponto de partida para efeito de ajustes. Na matriz R , nota-se que a escolha de uma representação escalar aponta para uma atribuição proporcional de consumo em todas as entradas e a opção pelo valor unitário indica que a absorção de energia deve ser a natural do sistema. Sendo assim, após a fixação dos valores das matrizes de ponderação, o vetor de realimentação de estados K_1 obtida através da função $lqr()$ do Matlab® é:

$$K_1 = [-17.122 \quad -3.027 \quad -1.000 \quad -2.644]$$

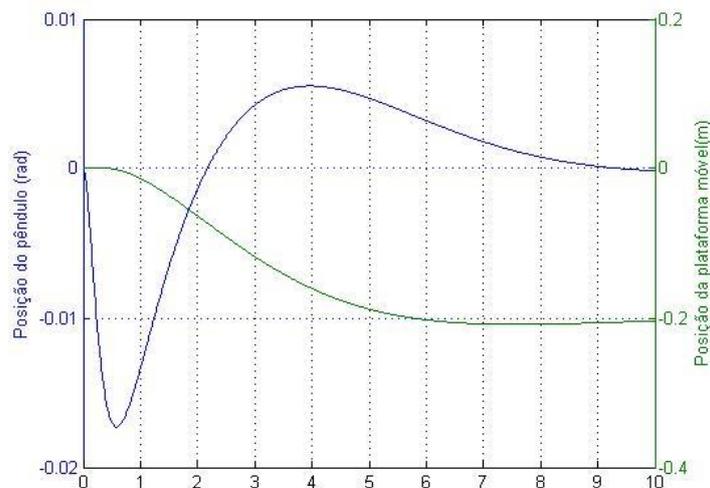


Figura 5.24: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_1 .

Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).

A Figura (5.24) mostra o gráfico da resposta do sistema para um ganho K_1 quando a variável de estado que representa a posição linear da plataforma móvel é submetida a uma entrada em degrau de 0.2m. Nota-se que o sistema apresenta uma resposta lenta com a escolha do valor um para os elementos a_{11} e a_{33} da matriz Q . Uma vez que a haste do pêndulo não se estabiliza dentro do intervalo de tempo escolhido para análise (que é de 10s), ou seja, ela não cumpre o critério de desempenho para um tempo de acomodação inferior a 3s. Logo, é necessário a realização de ajustes (de forma empírica) nos valores dos elementos a_{11} e a_{33} da matriz Q para que seja alcançado a resposta desejada para o sistema. Dessa maneira, a nova matriz ponderação Q escolhida é:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

Para os novos valores da matriz Q resulta em um novo vetor de ganho de realimentação, sendo ele

$$K_2 = [-19.8012 \quad -3.5603 \quad -3.1623 \quad -5.3053]$$

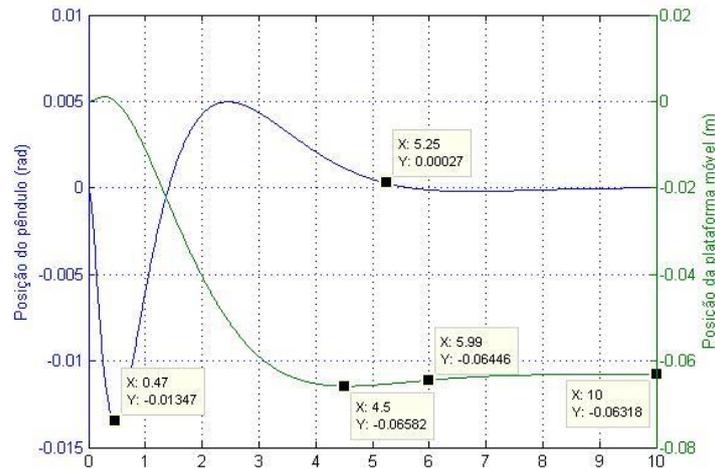


Figura 5.25: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_2 .
Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).

Na Figura (5.25) é possível observar que com o aumento dos valores dos elementos a_{11} e a_{33} da matriz Q houve um aumento na velocidade de resposta do sistema comparado com os valores escolhidos anteriormente. Mas pode-se notar que o tempo de 5.25s para a acomodação da haste do pêndulo continua superior ao critério de desempenho estabelecido, além dela estabilizar em 0.02rad e não na posição zero, ou seja, a sua resposta estacionária possui um erro de regime permanente. No caso da plataforma móvel, ela se estabiliza em aproximadamente 0.063m e não no valor de 0.2m estabelecido pelo degrau aplicado na entrada que representa a variável de estado x (ou seja, a posição linear da plataforma móvel), gerando também um erro de regime permanente. Seu tempo de acomodação é de 5.99s, que também não cumpre o critério estipulado. Dessa maneira, a resposta do sistema ainda não possui a dinâmica desejada, fazendo com que seja necessário continuar a realização do ajuste na matriz de ponderação Q . Sendo assim uma nova matriz é dada como:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

onde resulta em um ganho de realimentação

$$K_3 = [-27.9212 \quad -4.9498 \quad -10.0000 \quad -12.1230]$$

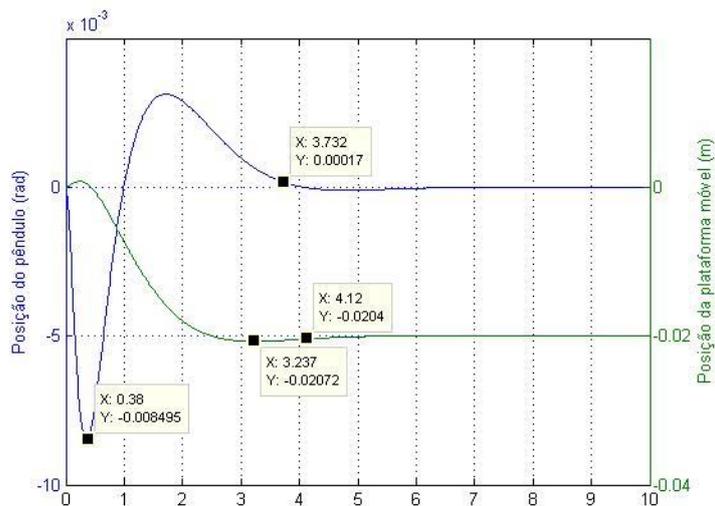


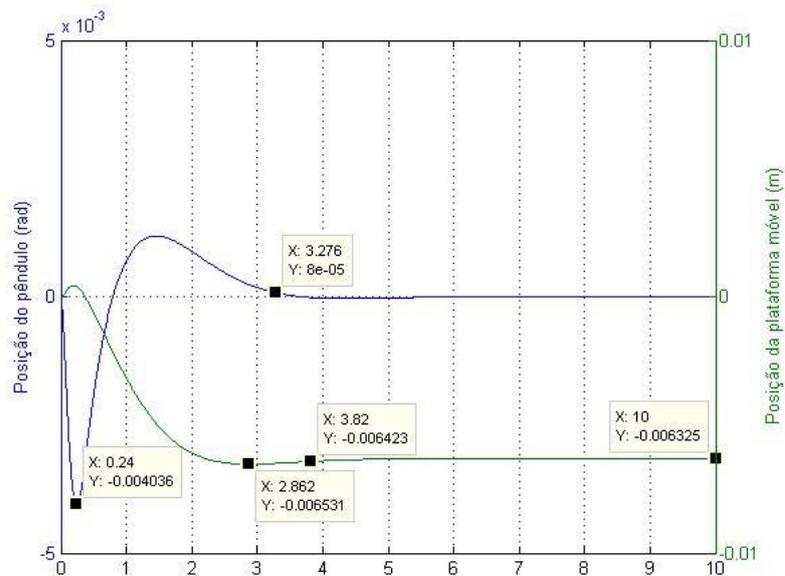
Figura 5.26: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_3 .
Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).

Através da Figura (5.26), observa-se que novamente a velocidade de resposta do sistema para $a_{11} = a_{33} = 100$ aumenta em comparação as repostas para valores inferiores de a_{11} e a_{33} utilizadas anteriormente. O tempo de acomodação de 3.732s da haste ainda é superior ao desejado, mas está próximo do estabelecido pelo critério de desempenho e o máximo sobressinal de 0.0085rad da haste é bem inferior aos 0.15rad estipulados pelo critério. Mas o mais interessante é o erro em regime permanente da posição angular da haste, que para esses valores da matriz Q , foi anulado, ou seja, o pendulo se estabiliza na posição desejada. Ao analisar a resposta da plataforma móvel, o tempo de acomodação de 4.12s se encontra também fora do critério de desempenho adotado, mas muito próximo do pretendido. Sua estabilização é alcançada em 0.02m, gerando novamente um erro de regime permanente. Dessa maneira, devido ao fato de que a maioria dos pontos não se encontram dentro do conjunto de critérios estipulados para o um bom desempenho do sistema, é necessário um novo aumento nos valores dos elementos da matriz Q para se realizar uma nova análise. Sendo assim, tem-se então que:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

onde resulta em nova matriz de realimentação de estados:

$$K_4 = [-54.9019 \quad -8.9484 \quad -31.6228 \quad -32.7688]$$



**Figura 5.27: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_4 .
Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).**

Nota-se, a partir da Figura (5.27), que o máximo sobressinal gerado na posição da haste (de aproximadamente 0.004rad) continua diminuindo, juntamente com seu tempo de acomodação (de 3.276s). A posição final de -0.0063 da plataforma móvel aponta que o erro em regime permanente ainda continua, e o tempo de acomodação de 3.82s diminuiu em relação aos gráficos anteriores, mas ainda continua fora do limite imposto. Isso indica que a escolha do valor 1000 para os elementos da matriz Q não resulta na resposta satisfatória do sistema. Sendo assim, um novo ajuste deve ser realizado. A nova matriz de ponderação é dada como:

$$Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

e sua matriz de realimentação como:

$$K_5 = [-139.147 \quad -20.081 \quad -100.000 \quad -97.001]$$

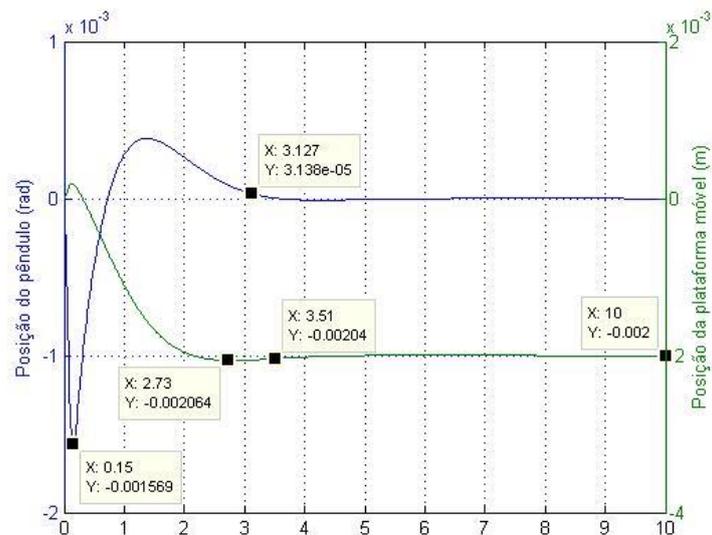
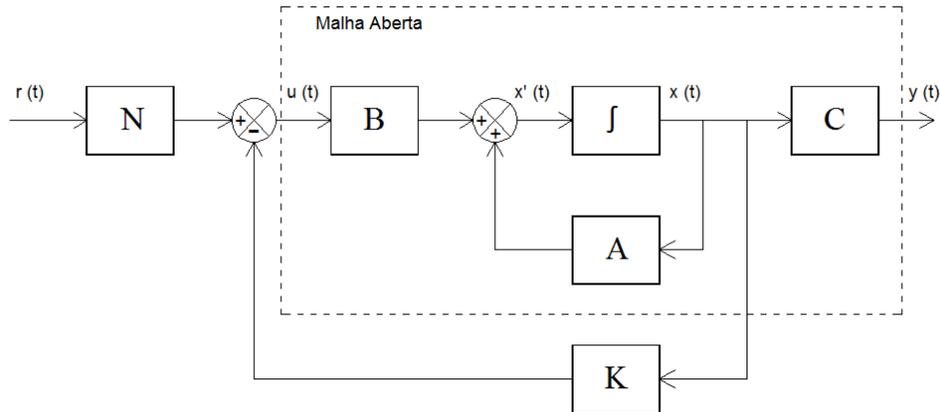


Figura 5.28: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_5 .
Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).

A partir da Figura (5.28), pode ser observado que o tempo de acomodação e o máximo sobressinal da haste do pêndulo são respectivamente 3.127s e 0.001569rad. Já para a plataforma móvel se estabiliza em 3.51s com uma posição final de -0.002. Através desses resultados é possível notar que apenas o máximo sobressinal da haste se enquadra dentro dos critérios de desempenho fixados. Ao comparar o comportamento da haste e o da plataforma nesse gráfico com os resultados do gráfico da Figura (5.27) percebe-se que ocorreu uma diminuição muito pequena entre os critérios de desempenho de cada um. O tempo de acomodação da haste teve uma diferença de 0.149s e no seu máximo sobressinal, aproximadamente 0.0025rad. No caso da plataforma, a diferença entre os tempos de acomodação foi de 0.31s e o erro de regime permanente reduziu gerando uma diferença de 0.004325m entre os dois.

Comparando todas as respostas, da Figura (5.24) à Figura (5.28), é possível perceber que o aumento no peso dado aos elementos a_{11} e a_{33} da matriz de ponderação Q provoca um aumento na velocidade de resposta do sistema (diminuindo o tempo de acomodação tanto da haste do pêndulo quanto da plataforma móvel), uma diminuição no máximo sobressinal da posição angular da haste e uma diminuição do erro de regime permanente da posição linear da plataforma. Portanto, conclui-se que da magnitude dessa ponderação está relacionada ao desempenho da resposta transitória e da diminuição do erro de regime permanente. Segundo Messner e Tilbury (2011, tradução própria), o aumento no peso dado aos elementos da matriz Q exige um maior esforço de controle na entrada u , geralmente resultando em um maior custo, ou seja, em maior consumo de energia, em um maior atuador ou entre outras coisas. Dessa maneira, uma forma de corrigir o erro estacionário da plataforma móvel sem que seja necessário aumentar a magnitude da matriz Q é adicionar um ganho constante no ramo da entrada de referência, como mostrado na Figura (5.29), denominado pré-compensador.



**Figura 5.29: a) Diagrama de blocos do modelo espaço de estado de um sistema submetido a realimentação de estados com ganho K e ao pré-compensador N .
Fonte: Própria, baseado em Messner e Tilbury (2011).**

Devido ao fato de estar localizado em um ramo fora do trecho realimentado, o pré-compensador não possui a capacidade de corrigir distúrbios não conhecidos ou erros no modelo que podem gerar um erro em regime permanente. Sua característica é de apenas corrigir antecipadamente o erro estacionário conhecido previamente.

O pré-compensador é determinado a partir do modelo da planta. Diferentemente da técnica clássica que em um sistema em malha fechada é caracterizado pela comparação entre a entrada de referência a saída realimentada para determinar um erro, um sistema de controle com realimentação plena de estados é caracterizado pela realimentação de todos os estados. Dessa forma, é necessário determinar o estado estacionário dos estados, multiplicá-lo pelo ganho de realimentação K e utilizar um novo valor de referência para que seja comparado com o valor do estado e computar o resultado na entrada (MESSNER e TILBURY, 2011, tradução própria).

Nesse trabalho, o pré-compensador é determinado através de uma função do MatlabTM chamada de `rscale`¹⁰. Como as respostas do sistema do pêndulo invertido observados para os ganhos K_4 e K_5 foram as que mais se aproximaram dos critérios de desempenho estabelecidos, o pré-compensador será adicionado nesses dois casos para que seja escolhido o de melhor resposta, pois, como visto anteriormente, quanto maior o valor do ganho de realimentação, maior a velocidade de resposta do sistema e maior o custo necessário para atingir o objetivo desejado. Sendo assim, o valor do pré-compensador para o ganho K_4 é:

$$N_1 = -31.6228$$

¹⁰ A função `rscale` pode ser encontrada em http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras_rscale

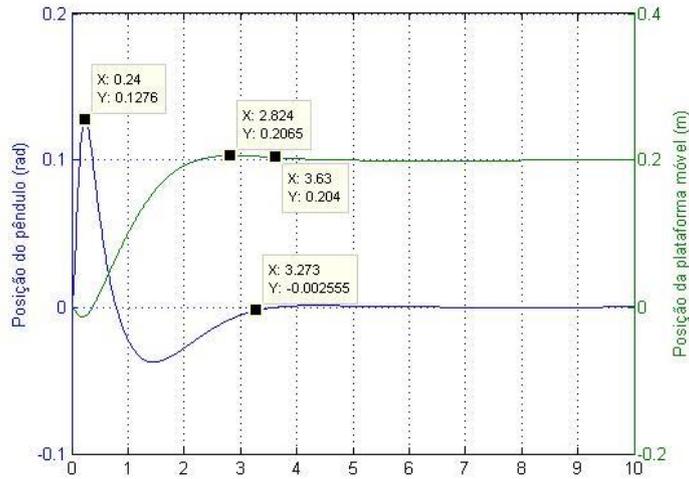


Figura 5.30: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_4 e ao pré-compensador N_1 .

Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).

A resposta dinâmica do sistema do pêndulo invertido realimentado pelo ganho K_4 , sujeito ao pré-compensador N_1 , é apresentada na Figura (5.30). Nota-se que, ao adicionar N_1 no sistema, o ponto mais visível de mudança na resposta apresentada é a eliminação do erro em regime permanente da posição linear da plataforma móvel, ou seja, dado o degrau de 0.2m na variável de estado x , a plataforma se estabiliza na posição desejada. Outro ponto é seu tempo de acomodação de 3.630s, o que significa que está dentro do critério desempenho convencional. Observando o comportamento da haste, percebe-se que a resposta em regime permanente permanece com um erro estacionário nulo. Seu máximo sobressinal é de 0.128rad, estando abaixo dos 0.15rad, portanto, cumprindo o critério imposto. Mas o seu tempo de acomodação não cumpriu o limite fixado de 3s, tendo a haste gasto 3.273s para se estabilizar.

Agora, considerando o sistema do pêndulo invertido submetido ao ganho de realimentação K_5 , seu pré-compensador é dado como:

$$N_2 = -100.000$$

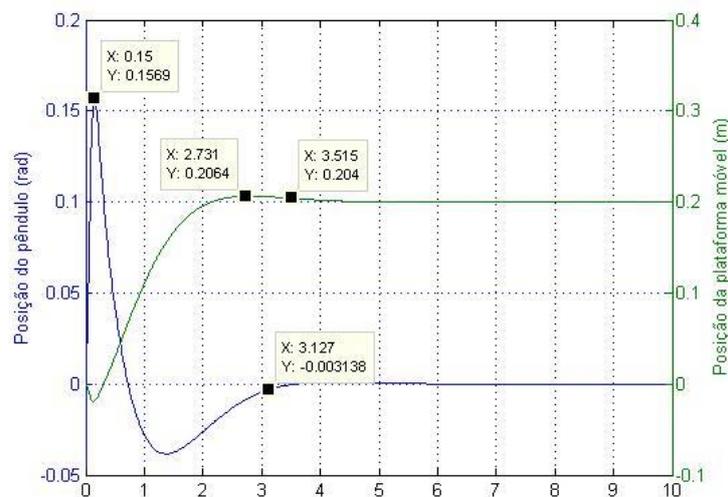


Figura 5.31: Gráfico da resposta da posição angular da haste e da posição linear da plataforma móvel quando submetido a realimentação de estados com ganho K_5 e ao pré-compensador N_2 .

Fonte: Própria (resultado obtido através do MatLab®).

A Figura (5.31) mostra o comportamento dinâmico da resposta do sistema do pêndulo quando submetido ao ganho K_5 e ao pré-compensador N_2 . É possível perceber que, como no caso anterior, o erro em regime permanente da posição linear x da plataforma móvel também foi anulada com o uso do pré-compensador N_2 . O tempo transcorrido para a estabilização da plataforma na posição almejada é de 3.51s, isso significa que seu tempo de acomodação também cumpre o critério de desempenho. A resposta da haste do pêndulo possui um tempo de acomodação de 3.127s, ultrapassando o valor estabelecido para esse critério, mas bem próximo do pretendido. O seu máximo sobressinal de 0.1569rad não se enquadra dentro do valor estabelecido, mas também se aproximado do esperado

As respostas dos dois casos são muito parecidas e dessa forma é necessária uma comparação item por item. Dessa maneira, começando pela dinâmica da haste do pêndulo, seu tempo de acomodação do gráfico da Figura (5.30) é de 3.273s (ultrapassando 9.1% do valor dos 3s desejado) com um máximo sobressinal de 0.1276 (14.93% abaixo dos 0.15rad fixados). O tempo gasto para estabilizar a haste no gráfico da Figura (5.31) é de 3.127s (sendo 4.23% acima), com um máximo sobressinal de 0.1569rad (4.6% a mais do que os 0.15rad estipulados). Ao analisar a dinâmica da plataforma móvel, tem-se que o tempo de acomodação na Figura (5.30) é de 3.63s, 9.25% abaixo dos 4s, já o da Figura (5.31) é de 3.51s, 12.125% abaixo dos 4s. Para o erro em regime permanente, todos os dois casos alcançam o valor desejado de zero para a posição angular da haste e de 0.2m para a posição linear da plataforma móvel.

Os dois casos não cumprem o critério de 3s para que a haste do pêndulo estabilize. Mas ao considerar que nas duas situações o erro estacionário não ultrapassa 10% (ou seja, menos que 0.3s), e sendo esse acréscimo um tempo bastante rápido, isso faz com que esse erro seja aceitável. No caso dos outros critérios, todos eles são cumpridos na Figura (5.30), já no gráfico da Figura (3.29), apenas o máximo sobressinal da haste ultrapassa o limite estabelecido. Portanto, após julgar aceitável um erro máximo 10% no tempo de estabilização da haste, ao comparar as respostas das Figuras (5.30) e (5.31), é possível perceber que o primeiro caso cumpre todo o conjunto de critérios de desempenho estabelecido, enquanto que no segundo, apenas o critério do máximo sobressinal da haste não cumpre o seu limite fixado.

Ao observar a dinâmica dos dois casos é possível perceber que elas são bastante parecidas, não tendo uma diferença muito grande entre seus valores. O primeiro caso será escolhido pois cumpre todos os critérios e por possuir um pré-compensador de valor inferior ao segundo. Sendo assim, para o sistema do pêndulo invertido proposto, o ganho de realimentação de estados e seu pré-compensador é dado como sendo:

$$K_4 = [-54.9019 \quad -8.9484 \quad -31.6228 \quad -32.7688]$$

$$N_1 = -31.6228$$

6 - Conclusões

Este trabalho propôs identificar a equação dinâmica do sistema do pêndulo invertido de modo objetivando a obtenção de sua função de transferência e sua equação de estados para posteriormente realizar a análise de estabilidade em malha aberta e efetuar seu controle empregando o controlador PID e o controle por realimentação de estados. A partir disso, realizou-se uma análise crítica sobre o processo de projeto dos dois métodos de controle aplicado no sistema.

Os Capítulos 2 e 3 foram destinados a introduzir os conceitos gerais das teorias de controle clássico e controle moderno, necessários para o desenvolvimento deste projeto. No Capítulo 4 foi abordado o problema de controle do pêndulo invertido, onde definiu-se seu comportamento físico, suas aplicações, suas equações dinâmicas, funções de transferência e sua equação de estados.

O processo de projeto dos controladores do problema de controle do pêndulo invertido inicia-se no Capítulo 4 com a dedução da equação dinâmica do sistema e estende-se ao Capítulo 5. Comprovou-se, na secção 4.4 do Capítulo 4 (de forma algébrica) e na secção 5.1 do Capítulo 5 (de forma gráfica e numérica), que o sistema do pêndulo invertido é instável em malha aberta e, portanto, necessita uma ação de controle adequada para levar o sistema à estabilidade.

O projeto de controle do sistema do pêndulo invertido empregando as técnicas clássicas de controle inicia-se na secção 5.2 do Capítulo 5, onde se utilizou o critério de Roth para determinar o valor do ganho crítico (proposto pelo segundo método de Ziegler-Nichols).

Ainda no Capítulo 5, utilizou-se o controlador PI (controlador com a ação integral em conjunto com a ação proporcional), determinando-se a função de transferência em malha fechada genérica, observando-se que o sistema de controle do pêndulo invertido não possui a capacidade de se estabilizar para estes valores quando submetido a um controlador PI.

Como, a princípio, o controlador PI não foi capaz de estabilizar o sistema, optou-se por verificar a possibilidade de um controlador PD conseguir o objetivo.

Apesar de o sistema ter se estabilizado, em nenhum dos casos o sistema cumpriu o critério de desempenho de 15rad para o máximo sobressinal, e portanto, havia a necessidade de continuar realizando ajuste nos parâmetros do controlador. Para cumprir todos os critérios de desempenho estabelecidos no começo do Capítulo 5, houve a necessidade de continuar o processo de sintonia do controlador PD.

Durante o processo de projeto do controlador PID, utilizando o critério de Routh para determinar o ganho crítico estabelecido pelo segundo método de Ziegler-Nichols para sua sintonia, constatou-se alguns pontos importantes. As regras de sintonia do controlador PID proposto por Ziegler-Nichols realmente não podem ser considerados como métodos que estabelecem valores definitivos para os parâmetros do controlador, mas como um método que auxilia no início do processo de sintonia, servindo como ponto de partida. Durante o procedimento de ajustes desses parâmetros, por ser um método experimental, conhecer e entender as características de cada ação de controle (proporcional, integral e derivativa) faz com que não sejam necessários um número elevado de testes, pois de acordo com o comportamento da resposta é possível perceber qual ação de controle deve ser alterada. Apesar da proposta de controle da haste não mostrar-se fisicamente viável, não quer dizer que um controlador PID não é capaz de controlar o sistema do pêndulo invertido. Pode ser que outros arranjos de sistema de controle sejam capacitados, como por exemplo: a utilização em cascata de um controlador PID para a haste e outro para a plataforma móvel, ou a utilização de um controlador PID com vários graus de liberdade.

O projeto de controle do pêndulo invertido no âmbito da teoria de controle moderna foi desenvolvido no Capítulo 5. Realizou-se a substituição dos parâmetros físicos do sistema pelos seus respectivos valores na equação de estados, analisando-se a condição de controlabilidade do sistema, verificando-se que o sistema é controlável.

Após os ajustes das matrizes de ponderação, e utilizando-se o *software* Matlab® foram determinados, para os valores atribuídos as matrizes Q e R , os ganhos de realimentação de estados, posteriormente melhorados através das análises dos tempos de respostas.

Durante o processo de projeto do controle do sistema do pêndulo invertido por realimentação de estados, empregando a técnica do regular linear quadrático para determinar o valor do vetor do ganho ótimo de realimentação de estados, pode-se constatar alguns pontos interessantes. A ação de controle resultante da realimentação de estados é idêntica a ação de controle proporcional. Ao utilizar o índice de desempenho quadrático do regulador linear quadrático, nota-se que a matriz de ponderação Q possui as mesmas características de controle que o ganho K_p do controlador PID, ou seja, desempenha um rápido ajuste do sinal de controle, e conseqüentemente, um aumento de velocidade no comportamento dinâmica do sistema. A adição do pré-compensador no controle por realimentação de estados seria o mesmo que adicionar o termo de compensação *bias* no controlador proporcional. Por intermédio dessas observações, é possível concluir que o controle por realimentação de estados seria para abordagem no domínio do tempo o mesmo que o controlador proporcional é para abordagem no domínio da frequência complexa.

No contexto deste trabalho, conclui-se que o controle por realimentação de estados se mostrou menos dispendioso no que se refere a sintonia do controlador, comparado com o mesmo processo realizado para o controlador PID. No que diz respeito ao desempenho do sistema, não houve a possibilidade de realizar uma comparação entre os dois, pois o arranjo de controle proposto para o controlador PID, apesar da haste ter sido estabilizada dentro dos critérios de desempenho estabelecidos, não resultou em uma resposta fisicamente realizável.

O controle do pêndulo invertido é um problema muito rico para desenvolvimento de projetos futuros. Uma proposta para projetos seria desenvolver o projeto de controle em cascata, onde implementa-se um controlador PD para haste e outro controlador PID (PI ou PD) para a plataforma móvel, de forma que a saída do controlador da haste sirva como entrada de referência do controlador da plataforma. Outra proposta seria, utilizando o controle por realimentação de estados, empregar a ação integral ou a ação derivativa para corrigir o desempenho e o erro estacionário do sistema no lugar do pré-compensador. No campo do modelamento de sistemas, pode-se determinar um modelo mais preciso do sistema, considerando força de atrito e incertezas não modeladas na equação dinâmica do pêndulo invertido proposta neste trabalho, determinar a função de transferência do sistema em malha fechada considerando a função de transferência dos sensores e atuadores. Por fim, outra proposta interessante seria construir um protótipo para validar o modelo criado neste trabalho.

7 - Referências Bibliográficas

ÅSTRÖM, Karl J.; HÄGGLUND, Tore. **PID Controllers: Theory, Design and Tuning**. 2nd ed. 1995. 343 p.

AGUIRRE, Luis Antonio. **Introdução a Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 3^a ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007

BENNETT, Stuart. **A Brief History of Automatic Control**. IEEE Control Systems Magazine, vol.16, iss.03, p.17-25, jun.1996.

Disponível em: <<http://ieeecs.org/CSM/library/1996/june1996.html>>. Acesso em 10/08/2015.

BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven. **Convex Optimization** – 1^a ed. (7^a printing). Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 716 p.

Disponível em: <https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf>. Acesso em: 14/10/2014

CERRI, João Paulo. **Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estados**. 2009. 126 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2009.

Controls Tutorials for Matlab® and Simulink®. Internet. University of Michigan, 2015. Disponível em: <<http://ctms.engin.umich.edu/>>. Acesso em: 30/07/2015

CUBILLOS, Ximena C. M. **Extensão da Teoria do Regulador Linear Quadrático para o Controle de Atitude de um Satélite Artificial**. 2005. 35 p. Relatório do Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE). Ministério da Ciência e Tecnologia, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 2005.

Disponível em:

<<http://mtc-m16.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/iris@1916/2005/10.05.17.27/doc/13034.pdf>>

Acesso em: 05/09/2013

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Sistemas de Controle Moderno**. Tradução: Jackson Paul Matsuura. 11^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 724 p.

FACCIN, Flávio. **Abordagem Inovadora no Projeto de Controladores PID**. 2004. 124 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2004.

FALEIROS, Antonio; YOUNEYAMA, Takashi. **Teoria Matemática de Sistemas** – 1^a ed. São José dos Campos: Arte & Ciência, 2002. 296 p.

FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 910 p.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um Curso de Cálculo – Volume 1**. 5^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001 (reimpressão 2008), 635 p.

HURST, Jonathan W. **The Role and Implementation of Compliance in Legged Locomotion**. 2008. 102 p. These (Doctor of Philosophy in Robotics). Robotics Institute, Carnegie Mellon University. Pittsburgh, 2008.

Disponível em:

<http://mime.oregonstate.edu/research/drl/publications/_documents/hurst_2008a.pdf>.

Acesso em: 03/08/2014

KWAKERNAAK, Huibert; SIVAN, Raphael. **Linear Optimal Control Systems** – John Wiley & Sons, Inc. New York, 1972. 563 p.

LUENBERGER, David G.; YE, Yinyu. **Linear and Nolinear Programming** – 3ª ed. New York: Springer, 2008, 546 p.

MALAJOVICH, Gregorio. **Álgebra Linear**. Versão eletrônica e preliminar – 3ª Revisão. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2010. 181p.
Disponível em: <<http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/livro/al2.pdf>>. Acesso em: 02/08/14.

MONTEIRO, Luiz H. A. **Sistemas Dinâmicos** – 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 627 p.

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. Tradução: Fernando Ribeiro da Silva – 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 682 p.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. Tradução: Heloísa Coimbra de Souza – 5ª ed. São Paulo: Person, 2011. 809 p.

RIBEIRO, Ricardo. **Implementação de um Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido**. 2007. 85 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2007.

RUGH, Wilson J. **Linear System Theory** – 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 581 p.
Disponível em:
<<http://pt.scribd.com/doc/199102354/Linear-System-Theory-2E-Wilson-J-Rugh#download>>.
Aceso em: 03/08/14

SILVA, Michel B. **Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais**. 2011. 68 p. Monografia (Bacharel em Matemática). Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Campina Grande.
Disponível em:
<<http://mat.ufcg.edu.br/pgmat2/wp-content/uploads/sites/2/2015/06/MichelBarros.pdf>>.
Acesso em: 03/08/14

SOBHANI, Ziaieh C. **Stabilization of an Inverted Pendulum with Base Arcing about a Horizontal Axis**. 2003. 65 p. Thesis (Bachelor of Science in Mechanical Engineering). Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, 2003.
Disponível em: <http://fromthepantothefire.com/mit/portfolio/ip/zia_undergrad_thesis.pdf>
Acesso em: 31/07/14.

SOARES, David Ricardo de Mendonça. **Sistema inteligente com entrada e saída remota sem fio**. 2010. 116 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica). Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010.

Souza, Paulo J. A. de. **Implementação de um controlador PID em um pêndulo invertido**. 2010. 105 p. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica). Escola de Engenharia da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

ZILL, Dennis G.; Cullen, Michael R. **Equações Diferenciais – Volume 2**. Tradução: Alfredo Alves de Faria – 3ª ed. São Paulo: Person Makron Book, 2001. 434 p.

International Conference on Robotics & Automation. April 2004. New Orleans, LA. **Mobile Manipulation using NASA's Robonaut**. IEEE, 2004. 6 p.

Disponível em:

<<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.206.2548&rep=rep1&type=pdf>>.

Acesso em: 03/08/14

9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications. Junho, 2011. Serra Negra, SP. **Controle de um Pêndulo Invertido sobre uma Plataforma Móvel Utilizando PID e MFAC (Model-free Adaptive Control)**. 10 p.

Disponível em: <<http://www.sbmac.org.br/dincon/trabalhos/PDF/control/68876.pdf>>.

Acesso em: 03/08/14.

Control Tutorials for MatLab® and Simulink®. Messner, Bill; Tilbury, Dawn. University of Michigan, Carnegie Mellon University, University of Detroit Mercy. Internet

Disponível em: <<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>>.

Acesso em: 10/01/15

Segway Simply Moving. Internet. Bedford, New Hampshire.

Disponível em: <<http://www.segway.com/>>. Acesso em: 03/08/2014

Apêndice A

Este apêndice tem a finalidade de provar que a expressão

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - P B K \quad \text{A.1}$$

$$= [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P$$

empregada no Capítulo 3 é verdadeira, posto isto, tem-se que:

$$[TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P$$

$$[TK - T^{-T} B^T P]^T [TK - T^{-T} B^T P] - P B R^{-1} B^T P$$

$$[K^T T^T - P^T B T^{-1}] [TK - T^{-T} B^T P] - P B R^{-1} B^T P$$

Aplicada a propriedade distributiva no termo $[K^T T^T - P^T B T^{-1}] [TK - T^{-T} B^T P]$, resulta em:

$$K^T T^T T K - K^T T^T T^{-T} B^T P - P^T B T^{-1} T K + P^T B T^{-1} T^{-T} B^T P - P B R^{-1} B^T P \quad \text{A.2}$$

Sabendo que

$$T^T T^{-T} = I$$

$$T T^{-1} = I$$

$$R^{-1} = T^{-T} T^{-1}$$

Logo, a equação (A.2) pode ser expressa como:

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - P^T B K + P^T B R^{-1} B^T P - P B R^{-1} B^T P \quad \text{A.3}$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 4, sabe-se que a matriz P é simétrica, ou seja, $P^T = P$, portanto, a equação (A.3) pode ser reescrita como:

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - P B K + P B R^{-1} B^T P - P B R^{-1} B^T P$$

no que resulta em

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - P B K$$

A vista disso, prova-se que a equação (A.1) é realmente verdadeira.

Apêndice B

O desenvolvimento da solução do termo $(sI - A)^{-1}$ é dado neste apêndice para comprovar o resultado utilizado na obtenção da matriz função de transferência $G(s)$ no Capítulo 4. Assim sendo, tem-se então que:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{[IM+m(I+Ml^2)]s}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & \frac{IM+m(I+Ml^2)}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & \frac{[IM+m(I+Ml^2)]s}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & 0 & 0 \\ -\frac{(ml)^2g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & -\frac{(ml)^2g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ -\frac{(ml)^2g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & -\frac{(ml)^2g}{[IM+m(I+Ml^2)]s^2-g(M+m)ml} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad \text{B.1}$$

onde I é a matriz identidade de dimensão 4 e a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, o termo $(sI - A)^{-1}$ pode ser escrita com

$$\begin{aligned} & \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ & \left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ \frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ & \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ml(M+m)g}{IM+m(I+Ml^2)} & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(ml)^2g}{IM+m(I+Ml^2)} & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{B.2}$$

Para melhor visualizar as interações ocasionadas pelas operações elementares, os termos dos elementos a_{21} e a_{41} podem ser substituídos da seguinte maneira:

$$a = ml(M+m)g$$

$$b = IM + m(I + Ml^2)$$

$$c = (ml)^2g$$

Portanto, a equação (B.2) reescrita fica:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{b} & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{b} & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{B.3}$$

A cada linha da matriz anterior é nomeada como segue abaixo.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{b} & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{b} & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \text{linha 1} \\ L_2 \rightarrow \text{linha 2} \\ L_3 \rightarrow \text{linha 3} \\ L_4 \rightarrow \text{linha 4} \end{array}$$

Dessa maneira, multiplicando as linhas L_2 e L_4 da equação (B.3) por b resulta em

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & bs & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & bs & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$$

As linhas L_1 e L_2 , da matriz anterior, multiplicadas respectivamente por a e s fica como:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bs^2 - a & 0 & 0 & a & bs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & bs & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$$

Ao multiplicar as linha L_1 por c e a linha L_2 por s , tem-se que

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bs^2 - a & 0 & 0 & a & bs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & bs^2 & -c & 0 & 0 & bs \end{array} \right)$$

A matriz estendida quando tem sua linha L_1 multiplicada por $bs^2 - a$ e sua linha L_2 por 1 é dada como:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} (bs^2 - a)s & 0 & 0 & 0 & bs^2 & bs & 0 & 0 \\ 0 & bs^2 - a & 0 & 0 & a & bs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & bs^2 & -c & 0 & 0 & bs \end{array} \right)$$

Multiplicando a linha L_2 por c e a linha L_4 por $bs^2 - a$, tem-se que

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} (bs^2 - a)s & 0 & 0 & 0 & bs^2 & bs & 0 & 0 \\ 0 & bs^2 - a & 0 & 0 & a & bs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bs^2(bs^2 - a) & -bcs^2 & -bcs & 0 & bs(bs^2 - a) \end{array} \right)$$

A matriz, quando as linhas L_3 e L_4 são multiplicadas por $bs^2(bs^2 - a)$ e 1 respectivamente, resulta em:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} (bs^2 - a)s & 0 & 0 & 0 & bs^2 & bs & 0 & 0 \\ 0 & bs^2 - a & 0 & 0 & a & bs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bs^3(bs^2 - a) & 0 & -bcs^2 & -bcs & bs^2(bs^2 - a) & bs(bs^2 - a) \\ 0 & 0 & 0 & bs^2(bs^2 - a) & -bcs^2 & -bcs & 0 & bs(bs^2 - a) \end{array} \right)$$

E por fim, dividindo a linha L_1 por $(bs^2 - a)s$, a linha L_2 por $bs^2 - a$, a L_3 por $bs^3(bs^2 - a)$ e a L_4 por $bs^2(bs^2 - a)$ resulta na matriz transformada

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & \frac{bs}{bs^2 - a} & \frac{b}{bs^2 - a} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{bs^2 - a} & \frac{bs}{bs^2 - a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{c}{s(bs^2 - a)} & \frac{c}{s^2(bs^2 - a)} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{bs^2 - a} & \frac{-c}{s(bs^2 - a)} & 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array} \right) \quad \text{B.4}$$

Ao substituir a, b e c na equação (B.4) pelos seus respectivos termos, tem-se que

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & \frac{[IM - m(I + Ml^2)]s}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & \frac{[IM - m(I + Ml^2)]}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{ml(M + m)g}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & \frac{[IM - m(I + Ml^2)]s}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{(ml)^2 g}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & \frac{(ml)^2 g}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{(ml)^2 g}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & \frac{(ml)^2 g}{[IM - m(I + Ml^2)]s^2 - g(M + m)ml} & 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array} \right)$$

B.5

Através da equação (B.5), portanto, prova-se que a equação (B.1) é verdadeira.

Apêndice C

Abaixo se encontra o código fonte utilizado para gerar os resultados apresentados no Capítulo 5. Todas as linhas de comando são explicitadas e, a partir delas, os valores dos parâmetros do controlador PID do sistema de controle do pêndulo invertido são obtidos.

```
%%-----  
%% Análise da resposta do sistema de controle do pêndulo invertido  
%% utilizando um controlador PID  
%%-----  
  
%% - Parametros físicos do sistema  
syms l m M g L  
  
l = 0.25          %% Comprimento da haste.  
m = 0.194        %% Massa da haste.  
M = 0.754        %% Massa da plataforma móvel.  
g = 9.8          %% Aceleração da gravidade.  
L = (m*(l^2))/3  %% Momento de inércia da haste.  
  
%%-----  
%% Análise da resposta em malha aberta  
  
%% Função de transferência em malha aberta da posição angular  
numma = [-1];  
denma = [(L*M+m*(L+M*(l^2)))/(m*l) 0 -(g*(M+m))];  
Gma = tf(numma,denma)  
pzmap(Gma); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');  
plot(t,impulse(Gma,t));  
grid on;  
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Resposta em malha aberta');  
  
Gma = Gma*(-1)  
pzmap(Gma); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');  
plot(t,impulse(Gma,t));  
grid on;  
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Resposta em malha aberta');  
  
%% Identificação do ganho crítico Kcr  
syms kp kpa kpb kpc kpd kpe kpf  
  
kp = 9.2904;  
Gmf1 = feedback(Gma,kp)  
pzmap(Gmf1); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');  
plot(t,impulse(Gmf1,t));  
grid on;  
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 9.2904');  
  
kpa = 9.3;  
nummf = [1];  
denmfa = [(L*M+m*(L+M*(l^2)))/(m*l) 0 -(g*(M+m))+kpa]  
Gmfa = tf(nummf, denmfa)  
kpb = 10.2904;  
nummf = [1];  
denmfb = [(L*M+m*(L+M*(l^2)))/(m*l) 0 -(g*(M+m))+kpb]  
Gmfb = tf(nummf, denmfb)  
  
kpc = 14.2904;  
nummf = [1];  
denmfc = [(L*M+m*(L+M*(l^2)))/(m*l) 0 -(g*(M+m))+kpc]  
Gmfc = tf(nummf, denmfc)  
  
kpd = 20;  
nummf = [1];  
denmfd = [(L*M+m*(L+M*(l^2)))/(m*l) 0 -(g*(M+m))+kpd]  
Gmfd = tf(nummf, denmfd)  
  
kpe = 30;  
nummf = [1];  
denmfe = [(L*M+m*(L+M*(l^2)))/(m*l) 0 -(g*(M+m))+kpe]  
Gmfe = tf(nummf, denmfe)  
  
kpf = 45;
```

```

nummf = [1];
denmf = [(L*M+m*(L+M*(1^2)))/(m*1) 0 -(g*(M+m))+kpf]
Gmf = tf(nummf, denmf)

t=0:0.01:25;
subplot (2,3,1);plot(t,impulse(Gmfa,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]');title('a. Kcr = 9.3')
subplot (2,3,2);plot(t,impulse(Gmfb,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]');title('b. Kcr = 10.2904')
subplot (2,3,3);plot(t,impulse(Gmfc,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]');title('c. Kcr = 14.2904')
t=0:0.01:10;
subplot (2,3,4);plot(t,impulse(Gmfd,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]');title('d. Kcr = 20')
subplot (2,3,5);plot(t,impulse(Gmfe,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]');title('e. Kcr = 30')
subplot (2,3,6);plot(t,impulse(Gmff,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]');title('f. Kcr = 45')

%%-----
%% Controlador proporcional-integral
syms pcr2a pcr2b pcr2c pcr2d pcr2e pcr2f
syms kcr2a kcr2b kcr2c kcr2d kcr2e kcr2f

kcr2a = 9.3;
pcr2a = 23.58;
nummf2a = [0.833*pcr2a 0];
denmf2a = [0.223*pcr2a 0 (0.375*kcr2a-7.734)*pcr2a 0.45*kcr2a];
Gmf2a = tf(nummf2a,denmf2a)
plmf2a = roots(denmf2a)
pzmap(Gmf2a); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf2a,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 9.3 Pcr = 23.58');

kcr2b = 10.2904;
pcr2b = 3.25;
nummf2b = [0.833*pcr2b 0];
denmf2b = [0.223*pcr2b 0 (0.375*kcr2b-7.734)*pcr2b 0.45*kcr2b];
Gmf2b = tf(nummf2b,denmf2b)
plmf2b = roots(denmf2b)
pzmap(Gmf2b); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf2b,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 10.2904 Pcr = 3.25');

kcr2c = 14.2904;
pcr2c = 1.453;
nummf2c = [0.833*pcr2c 0];
denmf2c = [0.223*pcr2c 0 (0.375*kcr2c-7.734)*pcr2c 0.45*kcr2c];
Gmf2c = tf(nummf2c,denmf2c)
plmf2c = roots(denmf2c)
pzmap(Gmf2c); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf2c,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 14.2904 Pcr = 1.453');

kcr2d = 20;
pcr2d = 0.993;
nummf2d = [0.833*pcr2d 0];
denmf2d = [0.223*pcr2d 0 (0.375*kcr2d-7.734)*pcr2d 0.45*kcr2d];
Gmf2d = tf(nummf2d,denmf2d)
plmf2d = roots(denmf2d)
pzmap(Gmf2d); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf2d,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 20 Pcr = 0.993');

kcr2e = 30;
pcr2e = 0.7141;
nummf2e = [0.833*pcr2e 0];
denmf2e = [0.223*pcr2e 0 (0.375*kcr2e-7.734)*pcr2e 0.45*kcr2e];
Gmf2e = tf(nummf2e,denmf2e)
plmf2e = roots(denmf2e)
pzmap(Gmf2e); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf2e,t));

```

```

grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 30 Pcr = 0.7141');

kcr2f = 45;
pcr2f = 0.5438;
nummf2f = [0.833*pcr2f 0];
denmf2f = [0.223*pcr2f 0 (0.375*kcr2f-7.734)*pcr2f 0.45*kcr2f];
Gmf2f = tf(nummf2f,denmf2f)
plmf2f = roots(denmf2f)
pzmap(Gmf2f); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf2f,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 45 Pcr = 0.5438');

% Controlador proporcional-derivativo
syms pcr3a pcr3b pcr3c pcr3d pcr3e pcr3f
syms kcr3a kcr3b kcr3c kcr3d kcr3e kcr3f

kcr3a = 9.3;
pcr3a = 23.58;
nummf3a = [1];
denmf3a = [0.267 0.075*kcr3a*pcr3a 0.6*kcr3a-9.281];
Gmf3a = tf(nummf3a,denmf3a)
plmf3a = roots(denmf3a)
pzmap(Gmf3a); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf3a,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 9.3 Pcr = 23.58');

kcr3b = 10.2904;
pcr3b = 3.25;
nummf3b = [1];
denmf3b = [0.267 0.075*kcr3b*pcr3b 0.6*kcr3b-9.281];
Gmf3b = tf(nummf3b,denmf3b)
plmf3b = roots(denmf3b)
pzmap(Gmf3b); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf3b,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 10.2904 Pcr = 3.25');

kcr3c = 14.2904;
pcr3c = 1.453;
nummf3c = [1];
denmf3c = [0.267 0.075*kcr3c*pcr3c 0.6*kcr3c-9.281];
Gmf3c = tf(nummf3c,denmf3c)
plmf3c = roots(denmf3c)
pzmap(Gmf3c); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf3c,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 14.2904 Pcr = 1.453');

kcr3d = 20;
pcr3d = 0.993;
nummf3d = [1];
denmf3d = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d = tf(nummf3d,denmf3d)
plmf3d = roots(denmf3d)
pzmap(Gmf3d); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf3d,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 20 Pcr = 0.993');

kcr3e = 30;
pcr3e = 0.7141;
nummf3e = [1];
denmf3e = [0.267 0.075*kcr3e*pcr3e 0.6*kcr3e-9.281];
Gmf3e = tf(nummf3e,denmf3e)
plmf3e = roots(denmf3e)
pzmap(Gmf3e); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf3e,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 30 Pcr = 0.7141');

kcr3f = 45;
pcr3f = 0.5438;
nummf3f = [1];
denmf3f = [0.267 0.075*kcr3f*pcr3f 0.6*kcr3f-9.281];

```

```

Gmf3f = tf(nummf3f,denmf3f)
plmf3f = roots(denmf3f)
pzmap(Gmf3f); xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gmf3f,t));
grid on;
xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [rad]'); title('Kcr = 45 Pcr = 0.5438');

% Kcr = 45 e diferentes valores de Td
syms pcr3d1 pcr3d2 pcr3d4 pcr3d5 pcr3d6 pcr3d7
syms kcr3d1 kcr3d2 kcr3d3 kcr3d4 kcr3d5 kcr3d6

kcr3d = 45;

pcr3d1 = 0.6;
nummf3d1 = [1];
denmf3d1 = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d1 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d1 = tf(nummf3d1,denmf3d1)

pcr3d2 = 0.7;
nummf3d2 = [1];
denmf3d2 = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d2 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d2 = tf(nummf3d2,denmf3d2)

pcr3d3 = 0.8;
nummf3d3 = [1];
denmf3d3 = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d3 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d3 = tf(nummf3d3,denmf3d3)

pcr3d4 = 1.0;
nummf3d4 = [1];
denmf3d4 = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d4 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d4 = tf(nummf3d4,denmf3d4)

pcr3d5 = 1.5;
nummf3d5 = [1];
denmf3d5 = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d5 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d5 = tf(nummf3d5,denmf3d5)

pcr3d6 = 1.6;
nummf3d6 = [1];
denmf3d6 = [0.267 0.075*kcr3d*pcr3d6 0.6*kcr3d-9.281];
Gmf3d6 = tf(nummf3d6,denmf3d6)
subplot(2,3,1);plot(t,impulse(Gmf3d1,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t)
[rad]');title('a. Kcr = 45 Pcr = 0.6')
subplot(2,3,2);plot(t,impulse(Gmf3d2,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t)
[rad]');title('b. Kcr = 45 Pcr = 0.7')
subplot(2,3,3);plot(t,impulse(Gmf3d3,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t)
[rad]');title('c. Kcr = 45 Pcr = 0.8')
subplot(2,3,4);plot(t,impulse(Gmf3d4,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t)
[rad]');title('d. Kcr = 45 Pcr = 1.0')
subplot(2,3,5);plot(t,impulse(Gmf3d5,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t)
[rad]');title('e. Kcr = 45 Pcr = 1.5')
subplot(2,3,6);plot(t,impulse(Gmf3d6,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t)
[rad]');title('f. Kcr = 45 Pcr = 1.6')

%%-----
%% Análise da resposta da função de transferência da plataforma móvel
numc1=[-(m*1)^2]*g;
denc1=[((L*M)+m*(L+M*(1^2))) 0 0];
Gc1=tf(numc1,denc1)

numc2=[L+(m*(1^2))];
denc2=[(L*M)+m*(L+M*(1^2)) 0 0];
Gc2=tf(numc2,denc2)

Gc=(Gc1*Gma)+Gc2
Gc=(Gc*1e05)/1e05

numpd = [5.4 27];
denpd = [1];
Gpd = tf(numpd,denpd)

Gt=feedback(1,Gma*Gpd)*Gc

dent = [1.204 24.31 37.91 -844.4 -2769 0 0 0 0];
roots(dent)

```

```
t=0:0.01:5;
pzmap(Gt);xlabel('Real'); ylabel('Imaginário'); title('');
plot(t,impulse(Gt,t));grid on; xlabel('t [seg]'); ylabel('c(t) [m]');
```

As linhas de comando utilizadas para determinar, através do regulador linear quadrático, os valores do ganho ótimo de realimentação K do controle do sistema do pêndulo invertido em espaço de estados com realimentação de estados, aplicados no Capítulo 5.

```
%%-----
%%  Análise da resposta do sistema de controle por realimentação de estados de um
%%  pêndulo invertido
%%  utilizando o regulador linear quadrático para determinar o vetor ótimo de
%%  realimentação K
%%-----
%% - Parâmetros físicos do sistema

syms l m M g L

l = 0.25          %% Comprimento da haste (m).
m = 0.194        %% Massa da haste (kg).
M = 0.754        %% Massa da plataforma móvel (kg).
g = 9.8          %% Aceleração da gravidade (m²/s).
L = (m*(l^2))/3  %% Momento de inércia da haste (kg.m²).

%%-----
%% - Modelo em espaço de estado do sistema de um pêndulo invertido

%% Matriz de estados
A = [0 l 0 0; ((m*l*(M+m)*g)/(L*M+m*(L+M*(l^2)))) 0 0 0; 0 0 0 1; -
    (((m*l)^2)*g)/(L*M+m*(L+M*(l^2))) 0 0 0]

%% Vetor de entrada
B = [0; -(m*l)/(L*M+m*(L+M*(l)^2)); 0; (L+(m*l)^2)/(L*M+m*(L+M*(l)^2))]

%% Matriz de saída
C = [1 0 0 0; 0 0 1 0]

%% Matriz de transmissão direta
D = [0; 0]

%%-----
%% - Análise de controlabilidade do sistema

%% Matriz de controlabilidade do sistema
Ccontr = [0 -((m*l)/(L*M+m*(L+M*(l^2)))) 0 (((m*l)^2)*(M+m)*g)/(L*M+m*(L+M*(l^2))); -
    ((m*l)/(L*M+m*(L+M*(l^2)))) 0 ((m*(l^2))*(M+m)*g)/(L*M+m*(L+M*(l^2))) 0; 0
    ((L+M*(l^2))/(L*M+m*(L+M*(l^2)))) 0 (((m*l)^3)*g)/(L*M+m*(L+M*(l^2))); -
    ((L+M*(l^2))/(L*M+m*(L+M*(l^2)))) 0 (((m*l)^3)*g)/(L*M+m*(L+M*(l^2))) 0]

posto = rank(Ccontr)

%%-----
%% - Cálculo do vetor K e o gráfico de resposta do sistema em malha fechada

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 1
Q = C'*C
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi'; 'x'};

sys = ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf, 'statename', states, 'inputname', inputs, 'outputname', outputs)
```

```

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 10

Q = C'*C;
Q(1,1) = 10;
Q(3,3) = 10
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi';'x'};

sys =
ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 100

Q = C'*C;
Q(1,1) = 100;
Q(3,3) = 100
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi';'x'};

sys = ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 1000

Q = C'*C;
Q(1,1) = 1000;
Q(3,3) = 1000
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

```

```

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi';'x'};

sys = ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 10000

Q = C'*C;
Q(1,1) = 10000;
Q(3,3) = 10000
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi';'x'};

sys = ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

%%-----
%% - Cálculo do pré-compensador1

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 1000

Q = C'*C;
Q(1,1) = 1000;
Q(3,3) = 1000
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi';'x'};

sys = ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

Cn = [0 0 1 0]
sys_cn = ss(A,B,Cn,0)
Nbar = rscale(sys_cn,K)

sys_comp
=ss(Amf,Bmf*Nbar,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys_comp,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

```

```

%% Para a matriz de ponderação Q com os elementos q11 = q33 = 10000

Q = C'*C;
Q(1,1) = 10000;
Q(3,3) = 10000
R = 1
K = lqr(A,B,Q,R)

Amf = [(A-B*K)]
Bmf = [B]
Cmf = [C]
Dmf = [D]

states = {'phi' 'phi_lin' 'x' 'x_lin'};
inputs = {'r'};
outputs = {'phi';'x'};

sys = ss(Amf,Bmf,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

Cn = [0 0 1 0]
sys_cn = ss(A, B, Cn, 0)
Nbar = rscale(sys_cn, K)

sys_comp
=ss(Amf,Bmf*Nbar,Cmf,Dmf,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs)

t = 0:0.01:10;
r = 0.2*ones(size(t));
[y,t,x] = lsim(sys_comp,r,t);
[AX,H1,H2] = plotyy(t,y(:,1),t,y(:,2),'plot');
grid on;
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Posição do pêndulo (rad)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Posição da plataforma móvel (m)')

%%-----
%%
%% 1 Para o cálculo do pré-compensador é necessário a utilização da função rscale (Yanjie
%% Sun, 1996).
%% encontrada em http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras\_rscale
%%-----
%%

```