CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

TARCISIO FÚLVIO DOS SANTOS

PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA EM UMA INDÚSTRIA DE MINERAÇÃO

ARAXÁ/MG
2015

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

TARCISIO FÚLVIO DOS SANTOS

PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA EM UMA INDÚSTRIA DE MINERAÇÃO.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – Unidade Araxá, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação Industrial.

Orientadora: Prof.Dra.Aline Fernanda Bianco

ARAXÁ/MG
2015

TARCÍSIO FÚLVIO DOS SANTOS

PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA EM UMA INDÚSTRIA DE MINERAÇÃO.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – Unidade Araxá, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação Industrial.

Data de aprovação: ____/ ____/ _____

Banca Examinadora:

____

Aline Fernanda Bianco - Orientadora
Doutora; Professora do CEFET MG – Unidade Araxá

____

Glaydson Keller de Almeida Ferreira
Mestre; Professor do CEFET MG – Unidade Araxá

____

Geraldo Dutra Neto
Mestrando; Proprietário da Empresa Instale Tecnologia

ARAXÁ/MG
2015

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo aplicar um modelo de Programação Linear, técnica pertencente à área da Pesquisa Operacional com uso do software LINGO, para obter a otimização dos indicadores de um processo da indústria de mineração e propor o melhormodelo de produção que minimize o custo operacional da empresa. Sendo a Pesquisa Operacional uma metodologia aplicada a sistemas complexos, o modelo se encaixa na proposta do projeto que visa trabalhar com variáveis de produção dentro de uma planta com múltiplas entradas e saídas. As saídas precisam ser otimizadas para viabilizar o melhor resultado com base na entrada do processo. A utilização da Programação Linear é dar suporte à definição de políticas e determinação de ações de forma científica para tomada de decisões, que procura determinar como melhor projetar e operar um sistema, usualmente sob condições que requerem a alocação de recursos escassos, como é o caso do minério de Fosfato no Brasil.

Palavras Chave: Pesquisa Operacional, Programação Linear, Otimização, Mineração.

ABSTRACT

This work aims to apply a linear programming model, belonging to the technical field of Operations Research with using LINGO software for the optimization of the indicators of a mining industry process and propose the best production model that minimizes operating costs from the company. As the Operations Research methodology applied to complex systems, the model fits in the project proposal to work with production variables within a plant with multiple inputs and outputs. The outputs need to be optimized to enable the best result based on the process input. The use of linear programming is to support policy development and determination scientifically actions for decision making, which seeks to determine how best to design and operate a system, usually under conditions requiring the allocation of scarce resources, such as phosphate ore in Brazil.

Keywords: Operations Research, Linear Programming, Optimization, Mining.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

O Brasil é o celeiro do mundo. Aqui, em se plantando, tudo dá. Essas máximas são velhas conhecidas, mas, num mundo que precisará cada vez mais de alimento para manter uma população crescente, elas podem ser revitalizadas. O Brasil, como um dos maiores países em extensão de terra do globo, deverá ocupar lugar de destaque nessa realidade.(GARCIA, 2013)

Em um mundo com mais de 7 bilhões de habitantes em 2014 e com previsão de chegar a 10 bilhões em 2050, dados segundo o Departamento das Nações Unidas para Assuntos Econômicos e Sociais (*DepartmentofEconomicand Social Affairs*),o Brasil terá a oportunidade e a responsabilidade de prover alimentos para essa população que vive em um planeta com área agricultável correspondente a 3% do planeta terra, conforme demonstra a Figura 1. (NAÇÕES UNIDAS, 2015)

Fertilizante é o insumo que, isoladamente, mais contribui para o crescimento, produtividade e competitividade do agronegócio brasileiro. A base nutricional dos fertilizantes é o Nitrogênio (N), Fósforo (P) e o Potássio (K). (VALE, 2013)

Conforme os dados da Associação Nacional para Difusão de Adubos (ANDA) em 2014 a demanda nacional de NPK é da ordem de 32 milhões de toneladas, sendo que cerca de 75% é importado, ou seja, o Brasil está longe de ser autossuficiente na produção de nutrientes para fertilizantes. (VALE FERTILIZANTES, 2015)

Os projetos para aumentar a produção de nutrientes, principalmente o Fósforo (P), esbarram na viabilidade econômica, pois os custos operacionais e redução de teores nas minas tornam o produto nacional mais oneroso em relação ao importado. (VALE, 2013)

Figura 1 - Simbologia da área disponível para agricultura no planeta
Fonte: BUNGE (2009).

A fim de assegurar o melhor aproveitamento dos recursos minerais, o controle da qualidade, estudo tecnológico de processo e gestão da viabilidade produtiva e econômica são fatores fundamentais no sucesso e sustentabilidade do negócio. (BUNGE,2009) Para isso é imprescindível que as informações e modelamentos matemáticos para simulações de produção sejam precisos e confiáveis para suportar os gestores nas tomadas de decisões.

A Pesquisa Operacional, também conhecida como ciência e tecnologia de decisão, “[...] consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas” (ARENALESet al., 2007, p. 03).

Sendo a Pesquisa Operacional uma metodologia aplicada a sistemas complexos, o modelo encaixa na proposta do projeto que visa trabalhar com variáveis de produção dentro de uma planta com múltiplas entradas e múltiplas saídas. As saídas precisam ser otimizadas para viabilizar o melhor resultado com base na entrada do processo.

Para Arenaleset al., “O objetivo da utilização da Pesquisa Operacional é dar suporte à definição de políticas e determinação de ações de forma científica sobre a tomada de decisões.” (ARENALES et al., 2007, p. 03).

1.2 VISÃO GERAL DO SETOR DE FERTILIZANTES

A aplicação do trabalho foi na empresa Vale Fertilizantes, na área de extração do Fósforo (P), que em grego significa luz brilhante. Sem o Fósforo não haveria vida, seja animal ou vegetal. (VALE FERTIIZANTES, 2015)

Conforme é mostrado na figura 2, as plantas precisam desse nutriente para captar com mais eficiência a luz solar. A sua presença é essencial em suplementos minerais e vitamínicos, utilizados em rações para animais. O fósforo é indispensável para a geração e armazenamento de energia em vegetais e animais. (VALE FERTIIZANTES, 2015)

Os fertilizantes são compostos por três nutrientes básicos: nitrogênio (N), fósforo (P) e potássio (K). Esses elementos, misturados conforme as necessidades de cada solo e cultura garantem o crescimento das plantas e a qualidade dos frutos e grãos. (VALE FERTIIZANTES, 2015)

O nitrogênio (N), é essencial para as plantas. Por estar presente na constituição das proteínas, responde pelo seu crescimento e o potássio (K), aumenta a resistência a pragas e doenças. (VALE FERTIIZANTES, 2015)

Figura 2 - A importância do NPK nas plantas.
Fonte: Apresentação Institucional da Vale Fertilizantes (2015).

2 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho são dois*:* objetivo geral e os específicos.

2.1 OBJETIVO GERAL

Aplicar um modelo de Programação Linear (PL) com uso do *software*LINGO, para obter a otimizaçãode recursos de um processo da indústria de mineração e comparar os resultados com o planejamento de produção adotado pela empresa Vale Fertilizantes S.A.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1) Analisar o macro fluxo da cadeia do mineral Fósforo(P) para produção deácido fosfórico (H_3PO_4);

2) Formular o modelo matemático do processo de produção de H_3PO_4 para minimização do custo utilizando a Programação Linear; e

3) Programar o *software* LINGO para simular as variáveis do modelo matemático e obter a solução ótima.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Tomar decisões é uma tarefa atribuída aos gestores das empresas e no cenário cada vez mais competitivo e veloz, a informação correta e no tempo certo é fundamental para o sucesso das decisões.

No campo da mineração, nota-se uma evolução da utilização de técnicas de otimização matemática dos resultados e indicadores para atender a necessidade da gestão e garantir a sustentabilidade da utilização dos recursos naturais que são finitos.

A revisão bibliográfica desse trabalho visa prover a base teórica da Programação Linear e suas aplicações para auxiliar na montagem do modelo a ser simulado e proporcionar informações e dados para a tomada de decisões de uma aplicação prática na indústria de mineração voltada para produção de fertilizantes fosfatados.

3.1 PESQUISA OPERACIONAL

Pesquisa operacional pode ser definida “como uma abordagem científica para a solução de problemas no gerenciamento de sistemas complexos.” (ARENALES et al., 2007, p.3).

Mais recentemente a pesquisa operacional também tem sido chamada de ciência e tecnologia de decisão. (ARENALES et al., 2007, p. 03)

Segundo Arenales, o componente científico está relacionado àsidéias e processos para articular e modelar problemas de decisão, determinando os objetivos do tomador de decisão e as restrições sob as quais se devem operar; e o componente tecnológico está relacionado a ferramentas de *software* e *hardware* para coletar e comunicar dados, e organizar esses dados, usando-os para gerar e otimizar modelos e reportar resultados, ou seja, a pesquisa operacional está se tornando um importante elemento nas metodologias de tecnologia da informação. (ARENALES, 2007, p. 03)

Definida como um método para estruturar processos por meio de construção de modelos e também como um conjunto de técnicas quantitativas de otimização, esse ramo da ciência ganhou vulto a partir de 1950. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 01)

Para Loesche e Hein, pesquisa operacional pode ser conceitual em:

> A pesquisa operacional como ciência estrutura processos, propondo um conjunto de alternativas de ação, fazendo a previsão e a comparação de valores, de eficiência e de custos.A maioria de suas aplicações abrange as áreas de administração, produção, planejamento e organização.Seus fundamentos encontram-se na matemática, na análise de sistemas e na estatística. A ferramenta de resolução, por excelência, é o computador, dado que os problemas reais aos quais as técnicas normalmente se aplicam conduzem à construção de modelos matemáticos de porte médio ou grande, de solução manual muito difícil ou mesmo impraticável. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 01)

A otimização faz parte da índole humana. Desde seu surgimento, o homem vem se dedicando a minimizar esforços e a maximizar os retornos de alguma atividade por ele desenvolvida, que no princípio de sua existência limitavam-se à própria sobrevivência. Essa preocupação pelo ótimo encontra-se registrada nos trabalhos de Euclides (século III a.C.). (LOESCH & HEIN, 2009, p. 01 e 02).

No século XVII, época na qual a humanidade começava a entrar na grande Revolução Industrial, a qual tornava imperativo o uso pleno dos recursos, ou seja, das matérias-primas utilizadas na fabricação de produtos. Os proprietários das indústrias começam, mesmo que de uma forma primitiva, a se preocupar com a maximização dos lucros e a minimização de custos. Nesse sentido, surge por necessidade o cálculo diferencial e integral, com a contribuição dos matemáticos Newton, Leibniz, Lagrange e Bernoulli. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 02).

Em 1759, Quesnaypublica o trabalho "*Tableau economique*", que marca historicamente por se tratar da primeira tentativa de modelar a economia. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 02).

Em 1936, Leontief apresenta o modelo insumo-produto, que é o segundo marco histórico na macroeconomia depois de Quesnay. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 02).

Von Newmann publica em 1937 o trabalho "*A modeloof general economicequilibrium*", no qual formula um modelo de PL dinâmica. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 02).

Em 1939, Kantovich apresenta o trabalho "Métodos matemáticos de organização e planejamento de produção", elaborado na forma de um problema de PL, mas para o qual não apresenta a resolução. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 02).

Com o início da Segunda Guerra Mundial, surge a pesquisa operacional como ramo científico independente, começando a investigar de forma sistemática e racional os processos envolvidos na realização de uma atividade produtiva, mesmo que de início com finalidades bélicas. A pesquisa operacional começa a servir, a partir de suas técnicas quantitativas, de ajuda no processo de tomada de decisão em problemas relacionados ao controle de sistemas. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 02).

Segundo Loesche&Hein (2009, p. 3):

> Embutido nessa problemática militar, especificamente da logística de tempo de guerra, é que surge o fato consolidador da pesquisa operacional: a criação do método Simplex, que é uma forma sistemática de resolução de problemas de Programação Linear e que se revelou de uma eficácia extraoridinária.

A pesquisa operacional é composta por um conjunto de técnicas dentre as quais se destaca por maior relevância as técnicas clássicas, como:

- Programação linear;
- Programação inteira e mista;
- Programação não-linear;
- Programação dinâmica;
- Grafos, árvores e algoritmos; e
- Simulação.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Lachtermacher:

> Quando os gerentes se veem diante de uma situação na qual uma decisão deve ser tomada entre uma série de alternativas conflitantes e concorrentes, duas opções básicas se apresentam: (1) usar apenas a intuição gerencial; e (2) realizar um processo de modelagem da situação e exaustivas simulações dos mais diversos cenários de maneira a estudar mais profundamente o problema. (LACHTERMACHER, 2009, p. 03)

Até recentemente, a primeira opção se constituía na única alternativa viável, visto que não existiam nem dados, nem informações sobre os problemas, nem poder computacional para resolvê-los, as informações eram limitadas. Com o avanço da tecnologia dos microcomputadores e com o aprimoramento de banco de dados, a intuição gerencial **deixou de ser a única opção**(grifo nosso) para os tomadores de decisão. Um número cada vez maior de empresas passou a optar pela elaboração de modelos para auxiliar esse processo (LACHTERMARCHER, 2009, p. 03).

Na realidade, nos dias de hoje, está ocorrendo o inverso do que acontecia anos atrás. Possivelmente, a maioria dos tomadores de decisão está adotandorealizar um processo de modelagem da situação e exaustivas simulações dos mais diversos cenários de maneira a estudar mais profundamente o problemaa, visto que, a quantidade de informações disponíveis cresceu exponencialmente nos últimos anos com o advento da Internet, disponibilizando uma quantidade de dados que se tornam impossíveis montar modelos com todas as informações. Então surge uma primeira análise que é separar as informações relevantes das irrelevantes, de maneira a modelar situações para queseja possível analisá-la (LACHTERMARCHER, 2009, p. 03).

Com a facilidade e velocidade dos simuladores, muitos gestores começaram a não utilizar sua intuição completamente, o que é bastante prejudicial ao processo de tomada de decisão, pois uma base de conhecimento pode estar sendo desperdiçada(LACHTERMARCHER, 2009, p. 03).

Conforme proposto e definido por Lachtermacher, o ideal é utilizar conjuntamente a tecnologia da informação com a experiência para melhorar ainda mais o processo de tomada de decisão. A intuição do tomador de decisão deve ajudá-lo na seleção das informações relevantes, nos possíveis cenários a serem estudados, na validação do modelo e na análise de seus resultados. Esse processo está representado na Figura 3. (LACHTERMACHER, 2009, p.03)

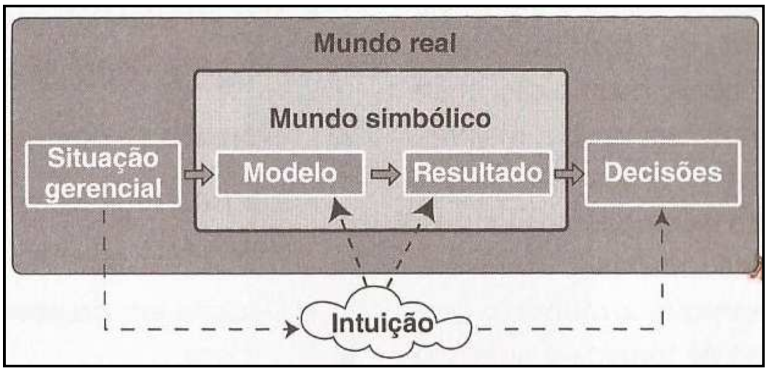


Figura 3 - Processo de tomada de decisão
Fonte: LACHTERMACHER, 2009, p. 03

“Se fazer ciência é a capacidade de observar e descrever fenômenos naturais, sociais, econômicos, entre outros, a matemática tem uma importância fundamental na descrição desses fenômenos” (ARENALES et al., 2007, p. 03).

Em geral, para formular um modelo matemático, simplificações razoáveis do sistema ou problema real precisam ser consideradas e a validação do modelo depende de a solução do modelo matemático ser coerente com o contexto original. Com isso, o modelo matemático é uma representação simplificada do problema real. Ele deve ser suficientemente detalhado para captar os elementos essenciais do problema, mas suficientemente tratável por métodos de resolução. O diagrama da Figura 4 ilustra um processo simplificado da abordagem de solução de um problema usando a modelagem matemática. (ARENALES et al, 2007. p. 04)

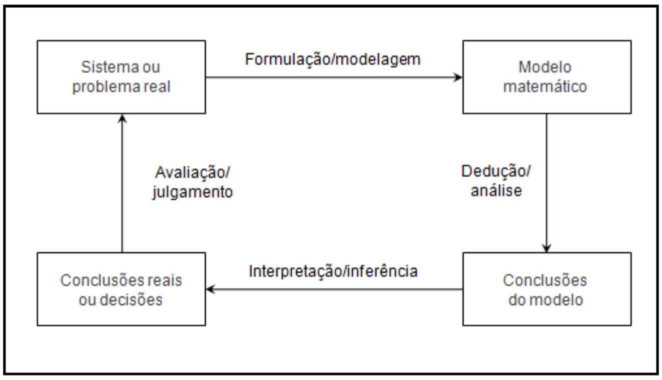


Figura 4 - Processo de modelagem
Fonte: ARENALESet al., 2007, p. 4

A modelagem define as variáveis e as relações matemáticas para descrever o comportamento relevante do sistema ou problema real. A dedução (análise) aplica técnicas matemáticas e tecnologia para resolver o modelo matemático e visualizar quais conclusões ele sugere. A interpretação (inferência) argumenta que as conclusões retiradas do modelo têm significado suficiente para inferir conclusões ou decisões para o problema real. Frequentemente, uma avaliação (julgamento) dessas conclusões ou decisões inferidas mostra que elas não são adequadas e que a definição do problema e sua modelagem matemática precisam de revisão e, então, o ciclo é repetido (ARENALES et al, 2007, p. 04).

A solução do modelo apoia o processo de tomada de decisões, mas em geral diversos outros fatores pouco tangíveis, não quantificáveis, também devem ser levados em consideração para a decisão final. Convém salientar que modelos não substituem tomadores de decisão (ARENALES et al, 2007, p. 04).

Em Loesch e Hein (2009, p. 7), na modelagem de problemas de Programação Linear [...] devem ser estabelecidas:

- as variáveis do problema: aquilo que se pode controlar e que se deseja saber exatamente quanto vale;
- a função objetivo: sempre se quer ou maximizar ou minimizar determinado objetivo, expresso em função das variáveis do problema;
- as restrições: também expressas em função das variáveis do problema, as restrições limitam as combinações das variáveis a determinados limites.

3.3 SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

Para Loesch e Hein (2009, p.21) apenas problemas de PL de três variáveis podem ser resolvidos graficamente. Contudo, tais modelos reduzidos servem mais para fins didáticos, pois em problemas reais o número de variáveis, quando não muitas, pode ainda ser manualmente resolvido sobre um *tableau*adequado, mediante o uso do algoritmo Simplex. Essa forma de resolução exige um considerável esforço, que cresce com o tamanho do problema. Recomenda-se, assim, o uso de *software* adequado para a solução. Alguns deles serão comentados a seguir.

ORSYS: acrônimo de *OperationsResearch System*, é um produto da *Estern Software Products, Inc.* Na versão 3.12, última que chegou ao conhecimento dos autores, o produto foi elaborado para ser executado sob o sistema operacional DOS. Esse produto é de uso geral e pode operar em modo real ou modo protegido. É composto por um conjunto de programas de resolução destinados à pesquisa operacional. Esses programas aplicam métodos avançados de pesquisa operacional para resolver problemas de PL, programação inteira e mista, problemas de transporte, problemas de transexpedição e problemas com função objetivonão linear. Permite encontrar soluções de problema de grande porte. Pode ser operado interativamente a partir de comandos e dados fornecidos via teclado ou de forma automática em modo de comandos gravados em arquivo de execução em lote e dados lidos a partir de arquivos ASCII. O programa é também capaz de importar dados a partir de planilhas eletrônicas e escrever soluções para planilhas para uso por Lotus 1-2-3, *Symphony*, Quattro Pro e Excel (LOESCH & HEIN, 2009).

Embora seja um ambiente completo, sua restrição ao ambiente DOS e certos detalhes de navegação em sua planilha de edição não o tornam um ambiente dos mais amigáveis.

MATLAB: acrônimo de *MATrixLABoratory*, é marca registrada da MathWorks. É uma linguagem de composição técnica baseada em operações matriciais. Trata-se de uma ferramenta poderosa que permite rápida prototipagem para aplicações numéricas gerais. Acompanha o núcleo básico a possibilidade de instalar grande número de “*Toolboxes*”, cada um com funções especializadas de determinada área de conhecimento. Entre eles há um denominado “*Optimization Toolbox*”, que incorpora funções de resolução de equações e de otimização para diferentes propósitos, como programação quadrática, de múltiplos objetivos, não linear, linear, etc. A função *“Lin*prog*”*, por exemplo, é destinada à resolução de problemas de PL (LOESCH & HEIN, 2009).

Essa função possui múltiplas formas de argumentos de entrada, de acordo com os dados do problema: existência ou não de limites inferiores e superiores para as variáveis, existência de igualdades etc. Sua forma mais simples de uso é por meio do comando:

x = linpgro (c, A, b)

onde c é o vetor dos coeficientes da função objetivo, A é a matriz dos coeficientes das restrições e b é o vetor dos valores do lado direito das restrições. Esse uso pressupõe objetivo de minimização e todas as restrições do tipo menor ou igual (LOESCH & HEIN, 2009).

A ferramenta Solver da planilha eletrônica Excel resolve problemas genéricos de programação matemática. O *Microsoft Excel Solver* usa o código de otimizaçãonão linear*“GeneralizedReducedGradient”*. Já para os problemas lineares e inteiros usa o método Simplex com limites sobre as variáveis e o método de desvio e limite. Embora permita a resolução de problemas de programação matemática de forma geral, essa flexibilidade possui um preço adicional, exigindo certa dose de esforço na colocação do problema na planilha, pois as fórmulas que efetuam as combinações lineares das variáveis com os coeficientes do problema, tanto da função objetivo quanto das restrições, devem ser construídas em etapa prévia à resolução. Em etapa posterior à resolução, o Solver permite ainda a construção de relatórios de resultados e de análise de sensibilidade (LOESCH & HEIN, 2009).

Segundo Lachtermacher (2009, p. 200), otimizadorLINGO (*Linear, Interative, GeneralandOptmizer),* é uma ferramenta computacional para modelagem e resolução de problemas linearesenão lineares de otimização. A linguagem de modelagem do LINGO permite representar a função objetivo de forma bastantesimples e intuitiva.

Trata-se de um *software* interativo para resolução de problemas de PL, quadrática, inteira e não linear. O algoritmo utilizado pelo LINGO é superior ao utilizado pelo Excel, tornando sua solução mais eficiente, rápida e segura. É empregado para resolução de problemas reais de mais de 10 mil variáveis (LACHTERMACHER, 2009).

Segundo Lachtermacher (2009), os comandos necessários à modelagem de um problema de otimização são:

- MAX – Inicia um problema de maximização.
- MIN – Inicia um problema de minimização.
- END – Termina a entrada de um problema.

Os operadores que podem ser utilizados nas restrições são:

- < Para restrições menores que.
- > Para restrições maiores que.
- <= Para restrições do tipo menor ou igual.
- >= Para restrições do tipo maior ou igual.
- + Para adição de termos das restrições e da função-objetivo.
- - Para subtração de termos das restrições e da função-objetivo.
- * Para multiplicação de termos das restrições e da função-objetivo.
- / Para divisão de termos das restrições e da função-objetivo.
- ^ Para exponenciação de termos das restrições e da função-objetivo.
- ( ) Para alterar a ordem de prioridades de operadores.

4 MÉTODOS

A metodologia do trabalho será um estudo de caso da aplicação da metodologia de Programação Linear aplicada a uma indústria de mineração. O processo inicia-se com o conceito teórico de Programação Linear com aplicações através de exemplos, na sequência realiza uma análise do processo produtivo escolhido para o estudo, depois demonstra o levantamento dos dados e indicadores para a construção do modelo matemático do problema, simula a proposta no *software* LINGO e conclui com análise dos resultados simulados.

Para proteger as informações da empresa, os dados referentes a custos e consumos específicos foram modificados pelo autor mantendo uma proporcionalidade para não impactar nos resultados.

4.1 PROGRAMAÇÃO LINEAR

Segundo Ramalhete et al. (1984, v.1, p. XV):

> A Programação Matemática (PM), e em especial a *Programação Linear* (PL), constitui um dos ramos mais desenvolvidos e mais utilizados da IO. O seu objecto de estudo é a atividade humana dirigida em que se pretenda satisfazer da melhor forma determinado objectivo, sendo que existem limitações (restrições) ao funcionamento dessa atividade.

Durante a Segunda Guerra Mundial, a Força Aérea Americana (*United States Air Force)* organizou um grupo de pesquisadores de nome SCOOP (*ScientificComputationofOptimimProgram*), sob a direção de Marshall K. Wood, para tentar solucionar o problema de alocação de recursos limitados, de modo a otimizar objetivos (RAMALHETE, 1984, v.1, p.XVII).

Métodos práticos de solução para o problema de PL baseados no método Simplex foram desenvolvidos entre 1948 e 1952. Durante esses anos, algumas atenções foram dirigidas para o uso dos primitivos equipamentos computacionais, limitados em alcance e sucesso. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 07)

Ainda segundo Loesch e Hein (2009, p. 07), os quatro maiores obstáculos para resolver problemas de PL foram enfrentados em 1952 e durante os dois ou três anos posteriores.

- Achar uma solução básica inicial, ponto de partida do algoritmo;
- resolver o problema de guardar a situação de degeneração;
- reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas requeridas sem causar limitações de uso;
- manter precisão numérica suficiente para a obtenção de resultados significativos.

Foi prontamente reconhecido que achar uma solução básica viável inicial era o mesmo problema que achar uma solução ótima partindo daquela. Problemas de degeneração e semi degeneração foram amplamente discutidos em vários trabalhos publicados na época, e as dificuldades ocasionais foram resolvidas. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 07)

Desde 1957, todos os aspectos da PL foram desenvolvidos em ritmo veloz. Técnicas de decomposição foram estudadas desde 1953, porém tais técnicas eram na época impraticáveis ou ineficientes. Com a publicação, em 1959, do algoritmo Dantzig-Wolfe, o interesse por elas cresceu muito. Por volta de 1963, os desenvolvimentos se voltaram para os programas computacionais e considerações sistêmicas, especialmente as técnicas algébricas. Grandes passos também foram dados para identificar novas aplicações da PL. (LOESCH & HEIN, 2009, p. 07)

4.1.1 Problemas de otimização e problemas de Programação Linear

Segundo Ramalhete, “Os problemas de otimização são problemas de extremos de funções de variáveis sobre certo domínio normalmente definido por um conjunto de restrições às variáveis.” (RAMALHETE et al., 1984, v.1, p.02)

Alguns destes problemas tiveram origem na física e na geometria, tendo sido tratados na análise matemática clássica, nomeadamente no cálculo diferencial e no cálculo das variações, a partir do séc. XVII. Muitos desses resultados foram posteriormente aplicados com sucesso à engenharia e à teoria econômica, em particular à teoria da produção e do consumidor (RAMALHETE et al., 1984, v.1, p.02).

Na década de quarenta assiste-se ao surgimento de uma classe particular de problemas de otimização nos campos da organização e gestão econômica. Esta classe de problemas é designada por Programação Matemática e abrange a análise e estudo de sistemas de forma a determinar o programa de ação mais adequado à persecução de certo objetivo, tendo em conta as restrições que limitam os seus comportamentos (RAMALHETE et al., 1984, v.1, p.03).

Conforme Ramalhete et al. (1984, v.01, p.03) Matematicamente, o problema de Programação Matemática consiste em determinar os valores de n variáveis, $x_1, x_2, ..., x_n$, que tornam máximo ou mínimo o valor de uma função

$$f\,(x_1, x_2, ..., x_n),$$

dadas$m$ restrições ou condições,

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i \quad (i = 1,2,...,m),$$

e estando as variáveis sujeitas às condições de não negatividade,

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n)$$

Caso particular de grande importância é o da PL, em que as funções $f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(i = 1,2,...,m)$, são lineares. Trata-se da subclasse de problemas de otimização mais largamente utilizados em áreas tão diversas como a física, engenharia e administração (RAMALHETE et al., 1984, v.01, p.03).

Segundo Ramalhete et al. (1984, v.01, p.03):

> Uma situação típica é a do planejamento de uma unidade indústria em que se pretende utilizar os recursos existentes (homens, materiais, equipamentos, etc.) na produção de certos bens, em quantidade e qualidades necessárias, de forma a tornar máximo o seu lucro ou mínimos os seus custos totais.

4.1.2 Modelo geral de problemas de Programação Linear

Segundo Loesch e Hein (2009, p.11) todo problema de PL pode ser descrito por meio de uma função objetivo e de um conjunto de restrições, todas lineares. Assim, temos o seguinte modelo genérico.

$\{Max, Min\}\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
sujeito a
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{=, \leq, \geq\} b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{=, \leq, \geq\} b_2$
....
$A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{=, \leq, \geq\} b_m$
$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

No modelo matemático mostrado anteriormente, deve-se interpretar:

$x_1, x_2, ..., x_n$= conjunto de variáveis estruturais do problema;
$c_1, c_2, ..., c_n$= coeficientes da função objetivo;
a_{ij} e b_j = coeficientes das restrições. Os coeficientes b_i da mão direita serão considerados não negativos, uma exigência imposta pela teoria do método Simplex;

- a representação $\{=, \leq, \geq\}$ significa a presença de um dessas três relações em cada restrição;

- a função objetivo expressa a meta que se deseja atender. Essa meta ou será de maximização (Max Z = ...) ou de minimização (Min Z = ...).

As restrições expressam limites a serem respeitados. O algoritmo de resolução (como o Simplex) procura a solução ótima no espaço de soluções compatíveis com o problema de PL, a saber, o espaço de pontos cujos componentes são valores das variáveis que atendem ao conjunto de restrições. Cada restrição poderá ser uma igualdade (=) ou uma desigualdade não-estrita (≤ ou ≥). (LOESC & HEIN, 2009, p. 11)

As últimas restrições de não-negatividade das variáveis constituem condições necessárias à aplicação do algoritmo Simplex de resolução de problemas de PL. Embora normalmente isso ocorra em decorrência da natureza da variável dentro do modelo, pode haver simulações em que variáveis não irrestritas, isto é, podem assumir qualquer valor real. É o caso, por exemplo, quando a variável representa um saldo bancário que eventualmente pode ser negativo. Nesses casos, existe um artifício: substituir cada variável irrestrita pela diferença de duas outras em que a restrição de não-negatividade se aplica. (LOESC & HEIN, 2009, p. 11)

Na PL, todas as variáveis devem ser quantidades reais. No caso de um problema de planejamento da produção em uma indústria discreta (automobilística, por exemplo), algumas das variáveis (se não todas) deverão representar quantidades a serem produzidas, necessariamente quantidades inteiras. Nesse caso, a formulação matemática do problema é expressa pelas mesmas equações, com a condição adicional de que algumas, ou todas, as variáveis sejam inteiras. Para a solução de tal classe de problemas utilizam-se algoritmos de programação inteira e mista. (LOESC & HEIN, 2009, p. 12)

4.1.3 Hipóteses do modelo de Programação Linear

Segundo Ramalhete et al. (1984, v.01, p. 21), o modelo de PL não se aplica a todos os casos e situações. A sua aplicação está condicionada pela verificação de alguns postulados ou hipóteses que seguidamente se explicitam.

Estas hipóteses são:

H1 – Proporcionalidade:

Em cada atividade, as quantidades de bens que entram e saem são sempre proporcionais ao nível da mesma, isto é, se, por exemplo, for duplicado o nível de uma atividade, ter-se-ão de duplicar todos os "*inputs*" (recursos utilizados) sendo duplicados todos os "*outputs*" (produtos).

Assim, o funcionamento da atividade j ao nível x_j será dado por:

$$x_jP_j = x_j[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{Mj}]' = [x_ja_{1j}, x_ja_{2j}, \ldots, x_ja_{Mj}]'$$

H2 – Divisibilidade e não negatividade:

O nível de uma atividade pode assumir qualquer valor positivo de dado intervalo, o que equivale a supor que os bens são perfeitamente divisíveis, isto é, susceptíveis de várias em quantidades infinitesimais.

H3 – Aditividade:

Dadas N atividades, o resultado do emprego conjunto das mesmas é a sua adição, isto é, não existem economias ou não economias (externas) pelo fato de se substituir N atividades pela atividade soma das mesmas.

Conjugado esta hipótese com H1, tem-se uma nova atividade resultante da combinação das atividades, por exemplo, P_r e P_s aos níveis x_r e x_s:

$$\begin{aligned} x_rP_r + x_sP_s &= [x_ra_{1r}, \ldots, x_ra_{Mr}]' + [x_sa_{1s}, \ldots, x_sa_{Ms}]' \\ &= [x_ra_{1r} + x_sa_{1s}, \ldots, x_ra_{Mr} + x_sa_{Ms}]' \end{aligned}$$

H4 – Linearidade da função objetivo:

Cada atividade contribui para o objetivo econômico perseguido pelo sistema (por exemplo, cada atividade pode ter, e normalmente tem associado certo lucro ou certo custo), Esta hipótese indica que essa contribuição para a função econômica é proporcional ao nível da atividade. A contribuição total é a soma das contribuições de todas as atividades.

Segundo Ramalhete et al. (1984, v.01, p.22), as hipóteses H1 e H3 traduzem a linearidade das atividades, e atendendo a H4 pode-se concluir que se está em presença de um modelo linear.

Embora a verificação destas hipóteses pareça reduzir consideravelmente o campo de aplicações da PL, a experiência tem revelado que inúmeras situações reais podem ser adequadamente descritas por modelos lineares. Mesmo que tal não seja verificado aproximadamente, existem técnicas que têm permitido converter com sucesso essas situações em outras equivalentes e susceptíveis de tratamento linear (RAMALHETE et al., 1984, v.01, p.22).

4.1.4 Representações gráficas de problemas de Programação Linear

Ramalhete et al. (1984, v.1, p. 11) cita que quando inicia o estudo de PL revela-se de grande utilidade a representação gráfica de problemas simples. Apesar destas representações só serem possíveis quando não estão envolvidas mais de três variáveis, e particularmente simples quando se trata de duas variáveis, estas permitem pôr em evidência propriedades importantes dos problemas de PL, bem como a natureza das suas soluções.

Lachtermacher (2009, p.21) apresenta a resolução gráfica do seguinte problema de Programação Linear:

Max $Z = 5x_1 + 2x_2$

sujeito a:

$x_1 \leq 3$ (a)

$x_2 \leq 4$ (b)

$x_1 + 2x_2 \leq 9$ (c)

$x_1, x_2 \geq 0$ (d)

Para resolvê-lo graficamente, o primeiro passo é estabelecer os dois eixos que irão representar as quantidades de x_1 e x_2. O passo seguinte é encontrar o conjunto de soluções viáveis do problema. Para tal, pode-se utilizar a representação gráfica imposta por cada uma das restrições, ou seja, determinar qual subárea do plano x_1 X x_2 seria aceita por cada restrição. Algumas dessas restrições são de fácil interpretação. As restrições (a), (b) e (d) impõem o conjunto de soluções viáveis representado na Figura 5 (LACHTERMACHER, 2009).

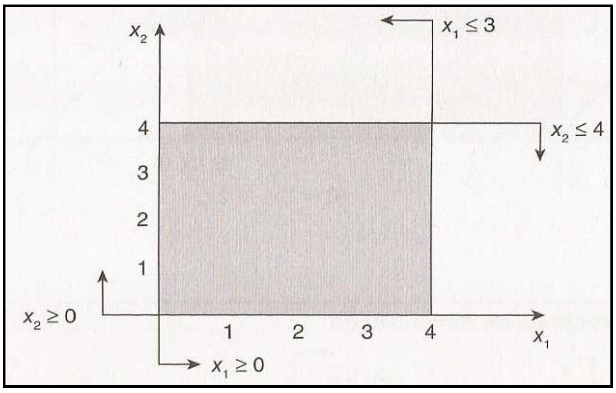


Figura 5 - Representação gráfica do conjunto de soluções viáveis para (a), (b) e (d)
Fonte: LACHTERMACHER, 2009, p. 21

A restrição (c) não pode ser representada imediatamente. Para que se possa fazê-lo, deve-se lembrar da representação de uma reta em R^2. Se x_1 for considerada a variável independente e x_2 a variável dependente (x_2 sendo uma função de x_1), a equação de uma reta é dada por $x_2 = ax_1 + b$, onde a é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear. Como há uma inequação do tipo menor ou igual, todos os pontos abaixo e sobre a reta satisfazem a restrição. Portanto, pode-se analiticamente definir:

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_2 \leq 9 - x_1$$

$$x_2 \leq \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

Graficamente, representa-se o conjunto de soluções viáveis por meio da Figura 6 (LACHTERMACHER, 2009).

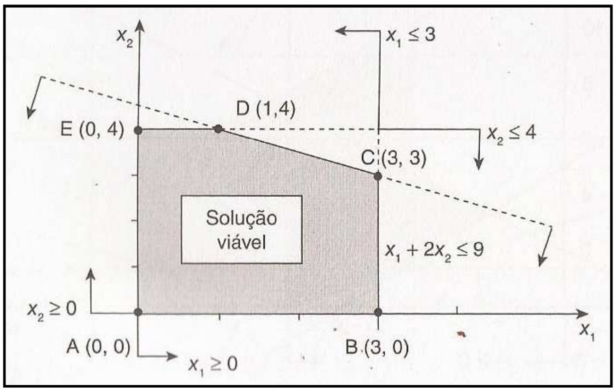


Figura 6 - Representação gráfica do conjunto de soluções viáveis do problema.
Fonte: LACHTERMACHER, 2009, p. 21

Um procedimento simples, porém não muito eficiente, consiste em atribuir valores a Z, tomando a função-objetivo uma equação de uma reta. Por um processo de tentativa e erro, chega-se ao valor ótimo verificando a existência de pontos da reta que fazem parte do conjunto de soluções viáveis. Ao encontrar o maior valor de Z possível, encontra-se o valor máximo para a função-objetivo sob esse conjunto de restrições. Esse procedimento pode ser representado como mostrado na Figura 7 que é um caso de maximização, mas também pode ser aplicado o mesmo método para problemas de minimização. Na figura 7, o máximo valor de Z é igual a 21, em uma solução ótima de $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$ (LACHTERMACHER, 2009).

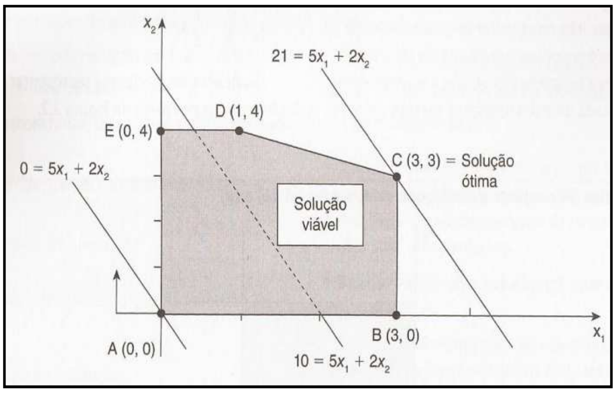


Figura 7 - Procedimento de procura da solução ótima
Fonte: LACHTERMACHER, 2009, p. 22

Essa análise também pode ser realizada via gradiente, nesse caso o vetor aponta para onde a função cresce.

4.1.5 Método Simplex

Segundo Ramalhete et al. :

> O problema de Programação Linear na forma estandardizada consiste, do ponto de vista matemático, [...] em determinar valores não negativos para um conjunto de variáveis que satisfaçam um sistema de equações lineares e maximizem (ou minimizem) uma função linear. (RAMALHETE et al., 1984, v.1, p. 166)

Para Ramalhete et al. (1984, v.1, p.166): “Distingue-se entre o método do Simplex, que operar a partir do problema de PL na forma estandardizada, e o algoritmo do Simplex, que constitui a sub-rotina principal do método e que se aplica quando se dispõe de uma forma canônica no sistema de equações.”

O método Simplex consiste em analisar os vértices da região factível, movendo-se de um vértice a outro adjacente melhor até que o critério de otimalidade seja satisfeito. Este método consiste em três fases: adoção de uma solução básica factível inicial, iterações e testes de otimalidade.

Adota-se como solução básica factível inicial o vértice da região factível onde as variáveis de folga/excesso são variáveis básicas, ou seja, são positivas, e as variáveis originais do problema de Programação Linear são variáveis não básicas, ou seja, são tomadas nulas.

A iteração consiste na movimentação a partir de um vértice em direção a outro vértice adjacente melhor, quantas vezes forem necessárias, ou seja, até que não exista outro vértice adjacente melhor, obtendo-se a solução ótima.

Sendo assim, é necessário converter uma variável não básica em uma variável básica, chamada variável básica de entrada e, simultaneamente, converter uma variável básica em uma variável não básica, chamada variável básica de saída.

O teste de otimalidade consiste em verificar se um vértice é ou não ótimo, ou seja, se existe ou não existe um vértice adjacente melhor. Caso não exista, o vértice em questão é ótimo.

4.1.6 Algoritmo Simplex

O método Simplex baseia-se na construção de tabelas, chamadas tabelas Simplex.

Considere o modelo na forma padrão de um problema genérico de minimização:

Minimizar $f(x_1, x_2, ..., x_n) = - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$

Restrições:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0.$

Primeiramente, deve-se construir uma tabela Simplex inicial, a partir da forma padrão do modelo do problema, composta pela matriz dos coeficientes, pelo vetor de custos e pelo vetor dos termos independentes (vetor de recursos), adotando, como já mencionado, a solução básica admissível inicial como sendo o vértice da região factível onde as variáveis de folga/excesso são variáveis básicas e as variáveis originais do problema são variáveis não básicas (Tabela 1).

x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	b
$-c_1$	...	$-c_n$	0	...	0	f
a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0	8
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	7
a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1	3

Tabela 1 - Tabela Simplex inicial de um problema genérico de minimização.

Em seguida, deve-se fazer o teste de otimalidade, analisando os coeficientes da função objetivo, ou seja, o vetor de custos. Se existir um ou mais coeficientes com valor negativo, a solução básica factível em questão não é ótima, pois ao entrarem na base, as variáveis multiplicadas por estes coeficientes diminuem o valor da função objetivo. Sendo assim, a variável multiplicada pelo coeficiente mais negativo deve entrar na base. Se não existir coeficientes com valor negativo, a solução básica factível em questão é ótima.

Deve-se também analisar a coluna k do quadro $(\overline{A}_k)$ se $(\overline{A}_{ik}) \leq 0 \forall$ i, então o problema tem solução ótima infinita. Neste caso, não há candidato a sair da base, pois não há limitação.

Decidida a variável não básica que deve ser convertida em variável básica, deve-se decidir a variável básica que deve ser convertida em variável não básica. Deve-se fazer a seguinte análise: $\overline{x}_t = \frac{\overline{b}_t}{\overline{a}_{tk}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ik}}, \overline{a}_{ik} > 0\right\}$, sendo $\overline{x}_k$ a variável básica de entrada e $\overline{x}_t$ a variável básica de saída.

O próximo passo é atualizar a tabela Simplex escalonando-a de forma que a coluna que deve entrar na base substitua a coluna que deve sair da base na tabela Simplex anterior, com o novo pivô na mesma posição.

Encontra-se, a seguir, o modelo matemático e a resolução do problema que se refere a uma mineradora e sua frota, objetivando-se demonstrar o método Simplex.

Uma mineradora pretende renovar sua frota através da aquisição de dois tipos de veículos: Caterpillar 793d, cuja capacidade de carga é 200 toneladas e cujo preço é 10 milhões de reais e T 282 B Liebherr, cuja capacidade de carga é 120 toneladas e cujo preço é 8 milhões de reais. Deseja-se maximizar a capacidade de carga da frota de forma que o aumento da capacidade de carga seja de, no mínimo, 1200 toneladas, que o custo total seja de no máximo 120 milhões de reais, e que o número de veículos adquiridos, de cada um desses tipos, seja no máximo 8.

Modelando matematicamente o problema obtém-se.

Maximizar $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 120x_2$

Restrições:

$x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 8$

$200x_1 + 120x_2 \geq 1200$

$10x_1 + 8x_2 \leq 120.$

Reescrevendo o modelo acima na forma padrão obtém-se:

Minimizar $- f(x_1, x_2) = - 200x_1 - 120x_2$

Restrições:

$x_1 + x_3 = 8$

$x_2 + x_4 = 8$

$200x_1 + 120x_2 - x_5 = 1200$

$10x_1 + 8x_2 + x_6 = 120.$

As variáveis x_3, x_4 e x_6 são variáveis de folga e a variável x_5 é uma variável de excesso.

Constrói-se uma tabela, a partir da forma padrão do modelo do problema, composta pela matriz dos coeficientes, pelo vetor de custos e pelo vetor dos termos independentes (Tabela 2).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
- 200	-120	0	0	0	0	- f
1	0	1	0	0	0	8
0	1	0	1	0	0	8
200	120	0	0	- 1	0	1200
10	8	0	0	0	1	120

Tabela 2 - Tabela da matriz dos coeficientes, do vetor de custos e do vetor dos termos independentes do problema da mineradora.

Basta multiplicar a linha $[200 \quad 120 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad | \quad 1200]$ desta tabela por - 1 para obter uma base inicial factível, construindo assim, a tabela Simplex inicial do problema (Tabela 3).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
- 200	-120	0	0	0	0	- f
1	0	1	0	0	0	8
0	1	0	1	0	0	8
- 200	- 120	0	0	1	0	- 1200
10	8	0	0	0	1	120

Tabela 3 - Tabela Simplex inicial do problema da mineradora.

É possível observar através desta tabela que B = [3 4 5 6] e N = [1 2]. Essa solução não é ótima, porque os coeficientes das variáveis x_1 e x_2 na função objetivo são negativos. Neste caso, x_1 deve entrar na base, pois entrando na base contribui mais significativamente, em relação à x_2, para a diminuição do valor de f, visto que o coeficiente de x_1,-200, é mais negativo que o coeficiente de x_2, -120. A seguir, encontra-se a análise feita para identificar a variável que deve sair da base para que x_1 entre.

$x_1 + x_3 = 8$	$x_4 = 8$	$- 200x_1 + x_5 = - 1200$	$10x_1 + x_6 = 120$
$x_3 = 8 - x_1$		$x_5 = - 1200 + 200x_1$	$x_6 = 120 - 10x_1$
$x_3 \geq 0$		$x_5 \geq 0$	$x_6 \geq 0$
$8 - x_1 \geq 0$		$- 1200 + 200x_1 \geq 0$	$120 - 10x_1 \geq 0$
$x_1 \leq 8$		$x_1 \geq 6$	$x_1 \leq 12$

Através dessa análise conclui-se que x_3 deve sair da base e sendo assim B = [1 4 5 6] e N = [3 2].

Constrói-se uma segunda tabela Simplex, através do escalonamento da tabela Simplex inicial, com o objetivo de fazer com que a coluna de x_1 da nova tabela seja igual à coluna de x_3 da tabela anterior (Tabela 4).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	- 120	200	0	0	0	- f + 1600
1	0	1	0	0	0	8
0	1	0	1	0	0	8
0	- 120	200	0	1	0	400
0	8	- 10	0	0	1	40

Tabela 4 - Tabela Simplex do problema da mineradora, após a primeira iteração.

Esta solução ainda não é ótima; x_2 deve entrar na base, uma vez que o coeficiente de x_2 na função objetivo é negativo e, consequentemente, entrando na base o valor de f diminui. A seguir encontra-se a análise feita para identificar a variável que deve sair da base para que x_2 entre.

$x_1 = 8$	$x_2 + x_4 = 8$	$- 120\, x_2 + x_5 = 400$	$8x_2 + x_6 = 40$
	$x_4 = 8 - x_2$	$x_5 = 400 + 120x_2$	$x_6 = 40 - 8x_2$
	$x_4 \geq 0$	$x_5 \geq 0$	$x_6 \geq 0$
	$8 - x_2 \geq 0$	$400 + 120x_2 \geq 0$	$40 - 8x_2 \geq 0$
	$x_2 \leq 8$	$x_2 \leq -10/5$	$x_2 \leq 5$

Através dessa análise, conclui-se que x_6 deve sair da base e sendo assim $B = [1 \quad 4 \quad 5 \quad 2]$ e $N = [3 \quad 6]$.

Constrói-se uma terceira tabela Simplex, através do escalonamento da segunda tabela Simplex, com o objetivo de fazer com que a coluna de x_2 da nova tabela seja igual à coluna de x_6 da tabela anterior (Tabela 5)).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	0	200	0	0	15	- f + 2200
1	0	1	0	0	0	8
0	0	5/4	1	0	- 1/8	3
0	0	50	0	1	15	1000
0	1	- 5/4	0	0	1/8	5

Tabela 5 - Tabela Simplex ótima do problema da mineradora.

Esta solução é ótima, uma vez que não existem coeficientes negativos relativos à função objetivo.

Conclui-se então que $x_1^* = 8$, $x_2^* = 5$ e $f(x^*) = 2200$.

4.2 A EMPRESA DO ESTUDO DE CASO

Conforme relatório Anual 2014 , disponível em Disponível em: <http://www.vale.com /PT/investors/Qua rterly-results-reports/20F/20FDocs/Vale%2020-F%202014_p_novo.pdf>. Acesso em 24 de julho de 2015 a Vale é uma das maiores companhias de metais e mineração do mundo e a maior das Américas, com base na capitalização de mercado. É a maior produtora mundial de minério de ferro e pelotas de minério de ferro e o maior produtor mundial de níquel. Também produz minério de manganês, ferroligas, carvão metalúrgico e térmico, cobre, metais do grupo da platina, ouro, prata, cobalto, potássio, fosfatados e outros fertilizantes. Para sustentar a estratégia de crescimento, a Vale participa da exploração mineral em seis países em todo o mundo. Opera um grande sistema de logística no Brasil e em outras regiões do mundo, incluindo ferrovias, terminais marítimos e portos, que estão integrados às operações de mineração. Além disso, tem um portfólio de ativos de frete marítimo, estações de transferência flutuantes e centros de distribuição para apoiar a distribuição de minério de ferro no mundo todo. A Vale também possui investimentos nos setores de energia e siderurgia, diretamente e por meio de coligadas e joint ventures.

A Vale Fertilizantes é produtora de rocha fosfática, fertilizantes fosfatados (P), fosfatado bicálcico (DCP), superfosfatado triplo (TSP) e superfosfatado simples (SSP) e fertilizantes nitrogenados (N). É a maior produtora de nutrientes agrícolas à base de fosfatado e nitrogênio no Brasil.

Conforme demonstra a figura 8, aVale Fertilizantes opera as seguintes minas de rocha fosfática através de concessões por tempo indeterminado: Catalão, no estado de Goiás, Tapira, Patos de Minas e Araxá, todas no estado de Minas Gerais, e Cajati, no estado de São Paulo, no Brasil. Além disso, a Vale Fertilizantes tem nove plantas de processamento para a produção de nutrientes à base de fosfatado e nitrogênio, localizadas em Catalão, Goiás; Araxá, Patos de Minas e Uberaba, Minas Gerais; Guará, Cajati e três plantas em Cubatão, São Paulo. Desde 2010, opera a mina de rocha fosfática Bayóvar, no Peru, com capacidade nominal de 3,9 milhões de tonelada por ano (Mtpa), através de uma concessão por período indefinido.

Os produtos à base de fosfatado são vendidos principalmente para a indústria misturadora de fertilizantes. Em 2014, as vendas representaram cerca de 27% do total de fosfatado vendido no Brasil, e considerando-se as importações representa aproximadamente 58% do fornecimento total. No segmento de alta concentração, a produção representou 86% da produção total no Brasil, com produtos como MAP e TSP. No segmento de nutrientes com baixa concentração de fosfatado, a produção representou 71% da produção total no Brasil com produtos como SSP.

Figura 8 - Unidades da vale Fertilizantes
Fonte: VALE, Apresentação Exposibram 2013.

O setor de fertilizantes é dividido em três grupos importantes de nutrientes: potássio, fosfatado e nitrogênio. Os recursos de potássio ao redor do mundo são limitados, com Canadá, Rússia e Bielorrússia sendo os fornecedores mais importantes, cada um dos quais possuindo poucos produtores. O setor apresenta um alto nível de investimento e um longo tempo necessário para a maturação do projeto.

Além disso, o segmento de potássio é altamente concentrado em 4 produtores principais, que detêm 83% da capacidade total de produção mundial. Enquanto o potássio é um recurso escasso, o fosfatado está mais disponível, mas os grandes exportadores estão localizados no norte da África (Marrocos, Argélia e Tunísia) e nos Estados Unidos. Os cinco principais países produtores de rocha fosfática (China, Marrocos, Estados Unidos, Rússia e Jordânia) representam 77% da produção global em 2014, da qual cerca de 11% são exportados. No entanto, produtos de maior valor agregado, como MAP e DAP, são normalmente comercializados ao invés de rocha fosfática, devido à eficiência de custo.

Ainda de acordo com o relatório anual da Vale (VALE, 2014) o Brasil é um dos maiores mercados de agronegócios do mundo devido à sua grande produção, exportação e consumo de grãos e biocombustíveis. É o quarto maior consumidor de fertilizantes do mundo e um dos maiores importadores de potássio, fosfatados, ácido fosfórico e ureia. O Brasil importa 95% do potássio que consome, sendo importado aproximadamente 9Mtpa de KCl (cloreto de potássio) em 2014, de produtores bielorrussos, canadenses, russos, alemães, chilenos e israelenses, em ordem decrescente, representando um aumento de 14% em relação a 2013. Em termos de consumo global, China, Estados Unidos, Brasil e Índia representam 61% do total, sendo que somente o Brasil representa 15% desse total. Os projetos de fertilizantes da Vale são altamente competitivos em termos de custo e logística para suprir o mercado brasileiro.

4.3MACRO FLUXO DE PRODUÇÃO

Na produção de nutrientes para fertilizantes, o macro fluxo de produção é esquematizado conforme demonstra a figura 9.Para o desenvolvimento do trabalho proposto, o foco foi no nutriente Fósforo (P) especificamente na produção da matéria prima intermediária, ácido fosfórico (H_3PO_4),que é o principal produto para fabricação de fertilizantes denominados de alta concentração.

Na figura 10, destaca-se o macro fluxo da cadeia de produção utilizando como matéria-prima a rocha fosfática que será utilizada para produção de ácido fosfórico.

O processo de produção utilizado no estudo inicia-se nas minas dos Complexos Minerais de Araxá (CMA), Tapira (CMT) e Catalão (CMC). A rocha extraída dessas minas é processada nas usinas de concentração localizadas nas mesmas unidades. O concentrado produzido é destinado para as unidades de produção de fertilizantes e para produção de ácido fosfórico na unidade de Uberaba (CIU). Na tabela 6 são demonstradas as capacidades produtivas.

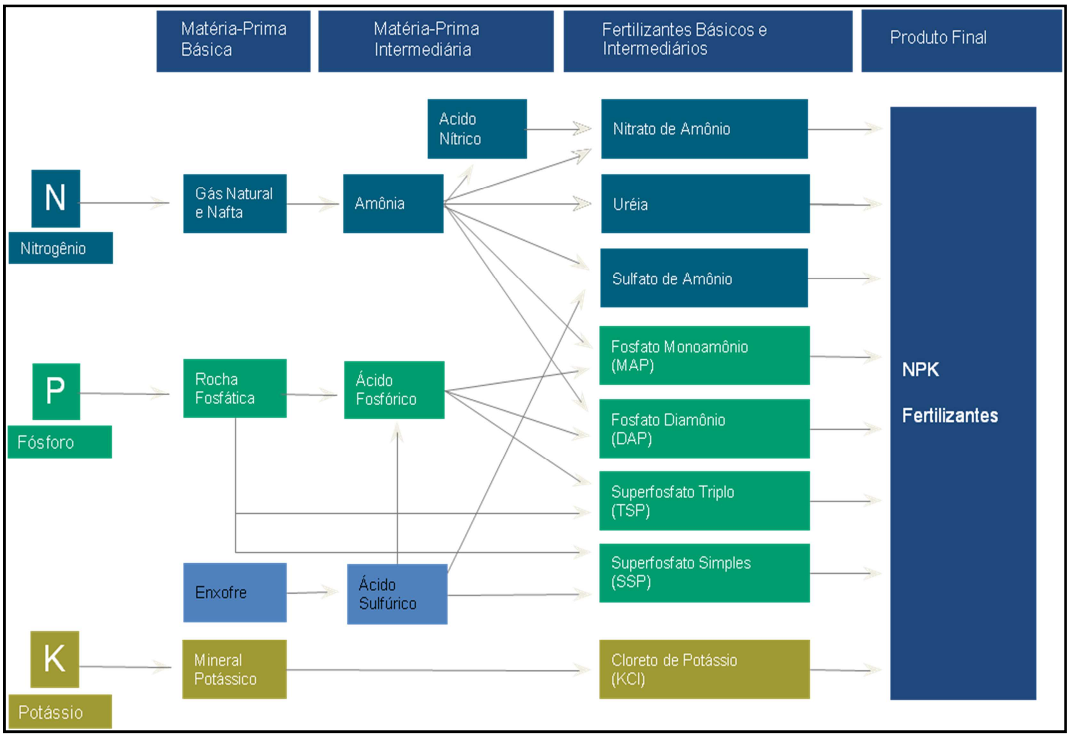


Figura 9 - Macro fluxo de produção de fertilizantes
Fonte: Apresentação Institucional da Vale Fertilizantes (2015)

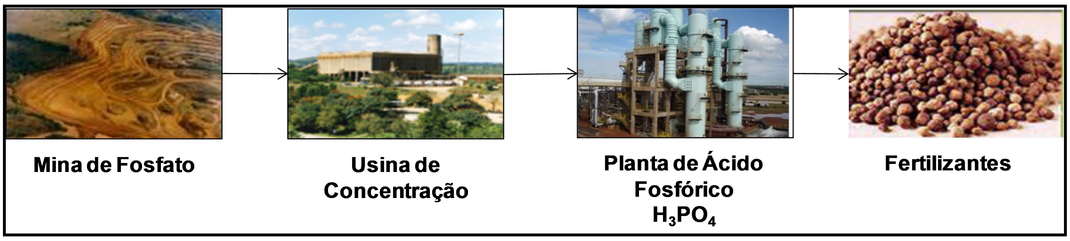


Figura 10 - Macro fluxo de produção.
Fonte: Elaborado pelo autor.

[redacted]

Tabela 6–Capacidades produtivas
Fonte: Site da Vale Fertilizantes S.A

4.4 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A produção de ácido fosfórico (H_3PO_4) requer elementos básicos do concentrado fosfático conforme especificada na tabela7.

ELEMENTO	PADRÃO
P_2O_5	>= 34%
Contaminantes (Fe_2O_3 + Al_2O_3)	<= 3%
Granulometria # 325 mm	<= 20%

Tabela 7 – Padrão de qualidade do concentrado
Fonte: Relatório interno modificado pelo autor.

Os elementos básicos são provenientes de três usinas, com composições conforme especificado na tabela 8.

	USINA DE CONCENTRADO		
ELEMENTO	ARAXÁ	CATALÃO	TAPIRA
P2O5	36.0%	34.0%	33.5%
Contaminantes (Fe2O3 + Al2O3)	2.6%	3.0%	2,8%
Granulometria # 325 mm	10%	35%	20%

Tabela 8 – Caracterização do concentrado das usinas.
Fonte: Relatórios internos modificados pelo autor.

Os custos do concentrado das usinas são diferentes e estão especificados na tabela 9, os valores são fictícios para preservar as informações da empresa.

USINA	CUSTO R$/t
Araxá	352,00
Catalão	188,00
Tapira	179,00

Tabela 9 – Custo do concentrado.
Fonte: Relatórios internos modificado pelo autor.

5 RESULTADOS E SIMULAÇÕES

O principal objetivo do modelo, considerando características econômicas, é minimizar o custo da produção, ou seja, utilizar a melhor mistura factível de concentrado fosfático para produção de ácido fosfórico (H_3PO_4), que depende de fatores como:

- percentual mínimo de teor de fósforo contido (P_2O_5),
- percentual máximo de contaminante, no caso ferro (Fe_2O_3) e alumínio (Al_2O_3), e
- granulometria máxima de 20% de sólido retido na malha # 325 mm.

Para esse modelamento, as variáveis de decisão serão:

- $x_1$igual a fração de tonelada de concentrado proveniente da usinade Araxá;
- x_2 igual afração de tonelada de concentrado proveniente da usina de Catalão; e
- $x_3$igual a fração de tonelada de concentrado proveniente da usina de Tapira.

Nesse caso o modelo na forma canônica é:

$$\text{Minimizar } z = 352x_1 + 188x_2 + 179x_3 \qquad \text{(Custo)}$$

Sujeito a:

$$
\begin{array}{llllll}
36.0x_1 & + 34.0x_2 & + 33.5x_3 & \geq 34.0 & & (P_2O_5) \\
2.6x_1 & + 3.0x_2 & + 2.8x_3 & \leq 3.0 & & \text{(Contaminantes)} \\
10x_1 & + 35x_2 & + 20x_3 & \leq 20 & & \text{(Granulometria)} \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & = 1 & & \text{(Balanço)} \\
x_1, x_2, x_3 & \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

5.1 PROGRAMAÇÃO DO PROBLEMA NO LINGO

A resolução do problema poderia ser realizado por diversos métodos matemáticos, no entanto será demonstrada através do *software* LINGO que é utilizado por muitos matemáticos e engenheiros para resolução de problemas de Programação Linear.

Para a entrada de dados para o LINGO foi utilizado o algoritmo Simplex na forma padrão. Esse software permite também a resolução de problemas de programação inteira mista. No problema de produção, a minimização do custo depende do teor de fosfato do concentrado, seus contaminantes e da granulometria. As variáveis de decisão podem assumir valores não inteiros visto que o resultado será um percentual da melhor mistura das rochas para produção de ácido fosfórico.

5.1.1 Função Objetivo

A linguagem de modelagem do LINGO permite representar a função objetivo de forma bastantesimples e intuitiva. Na figura 11 demonstra a forma de declarar a função objetivo do cenário 1 no programa, nota-se que é muito semelhante com a forma canônica modelada do problema.

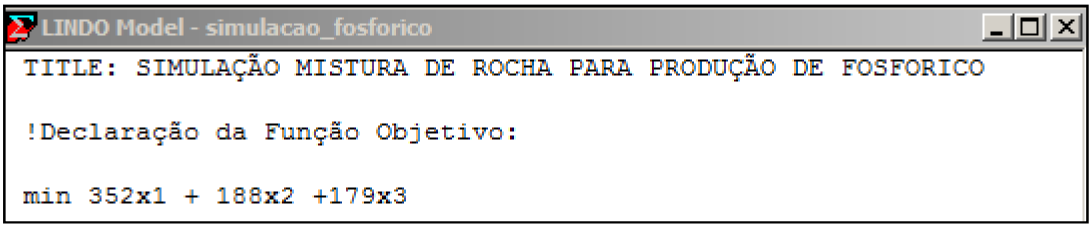


Figura 11 - Função Objetiva
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.2 Restrições

Assim como na função objetivo, utiliza-se a linguagem de modelagem do LINGO para representaras restrições do problema de forma simples e direta. Na figura 12 demonstra a forma de declarar as restrições

```
!Declaração da Restrições;

subject to

!Restrição do Teor de P2O5;
36x1 + 34x2 + 33.5x3 >= 34

!Restrição dos Contaminantes Fe + Al;
2.6x1 + 3.0x2 + 2.8x3 <= 3

!Restrição da Granulometria;
10x1 + 35x2 + 20x3 <= 20
```

Figura 12 – Declaração das restrições
Fonte: Elaborado pelo autor.

O *software* realizou 3 iterações para chegar a solução ótima, ou seja, ele passou por 3 vértices da região factível para encontrar o vértice ótimo.Como já foi dito anteriormente, as variáveis de decisão assumiram valores não inteiros.

Abaixo é mostrada a interface de resultados gerada pelo Software LINGO:

```
Solution Report - simulacao_fosforico

Global optimal solution found.
Objective value:                              210.5882
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             3


Model Title: : SIMULAÇÃO MISTURA DE ROCHA PARA PRODUÇÃO DE FOSFORICO

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1       0.1764706            0.000000
                           X2       0.1176471            0.000000
                           X3       0.7058824            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        210.5882           -1.000000
                            2        0.000000           -63.17647
                            3       0.2117647            0.000000
                            4        0.000000            1.505882
                            5        0.000000            1907.294
```

Figura 13 – Relatório do LINGO do cenário1
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores obtidos na interação representaram 17,65% de $x_1$que é a fração de tonelada de concentrado proveniente da usinade Araxá, 11,76% de x_2 que é afração de tonelada de concentrado proveniente da usina de Catalão e 70,59% de $x_3$que é a fração de tonelada de concentrado proveniente da usina de Tapira.

5.2 SOLUÇÃO GRÁFICA

OGnuploté um programa de linhas de comando que pode gerar gráficos de funções matemáticas em duas ou três dimensões, o qual pode ser executado na grande maioria dos computadores esistemas operacionais, produzindo saídas diretamente na tela ou em muitos formatos de arquivos gráficos, incluindo PNG, EPS, SVG e JPEG.

Utilizando o Gnuplot demonstrou-se a solução gráfica do problema simulado no LINGO, cujos gráficos encontram-se nas figuras 14, 15 e 16.

Para a obtenção da solução gráfica foi utilizadaa seguinte rotina:

```
setxrange [0:0.3]
setyrange [0:0.3]
setzrange [0.2:0.9]
f(x,y) = (34 - 36*x -34*y)/33.5
g(x,y) = (3 - 2.6*x - 3*y)/2.8
h(x,y) = (20 - 10*x - 35*y)/20
i(x,y) = 1 - x - y
splot  f(x,y), g(x,y), h(x,y), i(x,y)
```

Os gráficos representam a solução do problema no espaço tridimensional, considerando-se $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Cada restrição está representada por um plano e o ponto ótimo também está explicitado nas figuras.

As equações utilizadaspara as quatro restrições do problema foram:

$$z = \frac{34 - 36x - 34y}{33{,}5}$$

$$z = \frac{3 - 2{,}6x - 3y}{2{,}8}$$

$$z = \frac{20 - 10x - 35y}{20}$$

$$z = 1 - x - y$$

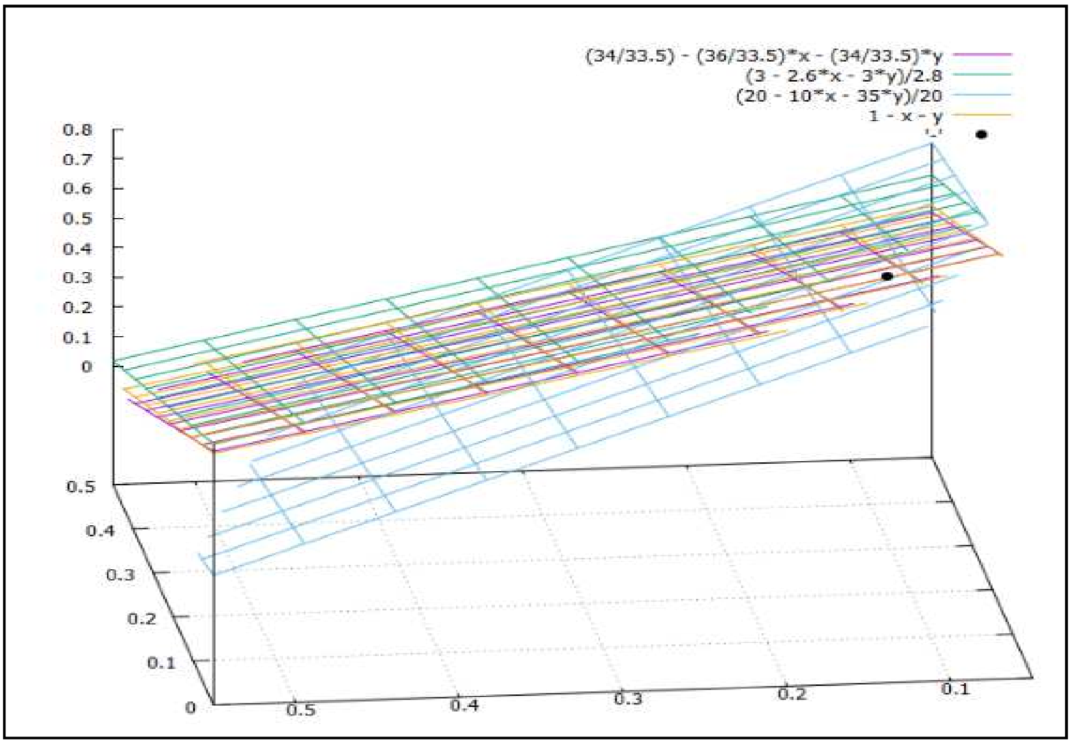


Figura 14 – Perspectiva 1
Fonte: Elaborado pelo autor.

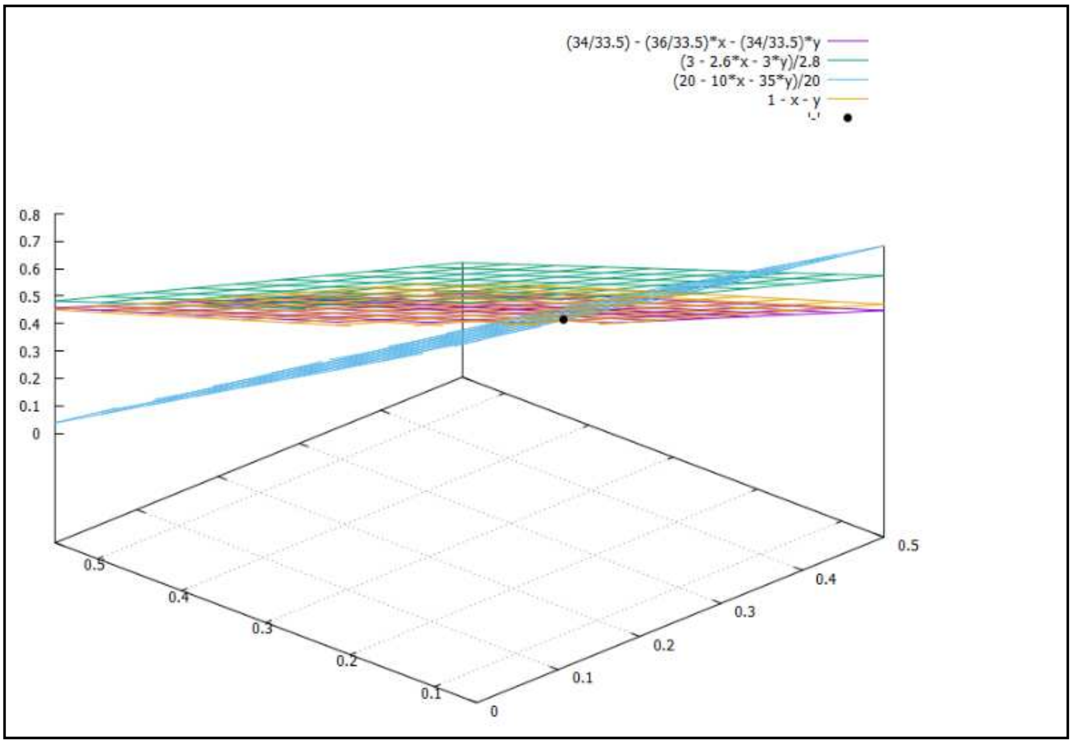


Figura 15 – Perspectiva 2
Fonte: Elaborado pelo autor.

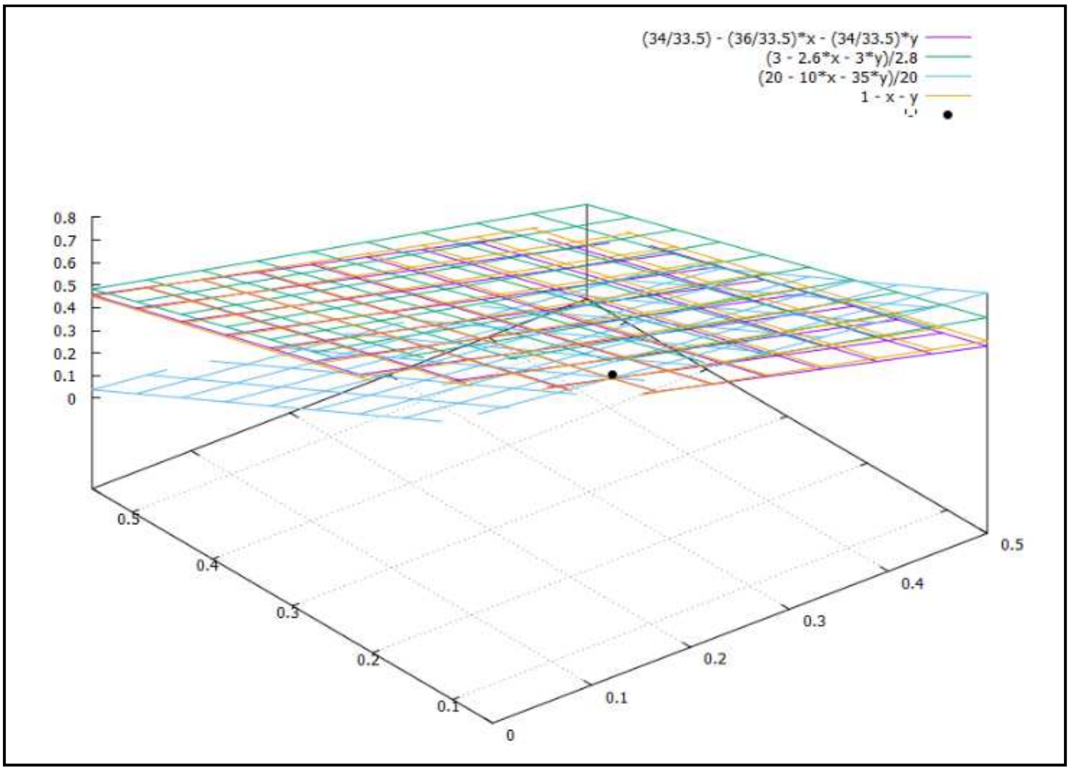


Figura 16 – Perspectiva 3
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos apresentam as perspectivas nos eixos X,Y e Z e a localização do ponto ótimo do problema. A intenção do gráfico é demonstração visual o qual não foi parametrizado para solução gráfica.

5.3 SIMULAÇÃO PARA OUTRO CENÁRIO

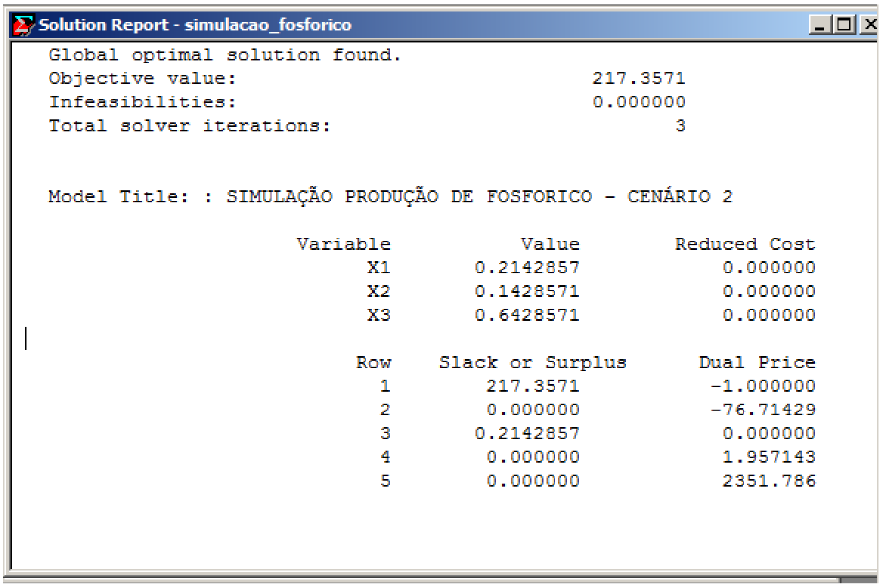
Simulando um segundo cenário, alterando para baixo meio ponto percentual (0.5%) o teor da rocha de Araxá, visualiza-se o impacto financeiro com a variação do custo da rocha.

O resultado é expressivo, visto que para produzir uma tonelada de ácido fosfórico consome em média três toneladas de concentrado. Considerando que a produção anual de ácido fosfórico é em torno oitocentas mil toneladas o consumo total de rocha é em torno de dois milhões e quatrocentas mil toneladas.

Na tabela 10 demonstra-se o impacto financeirocom a variação simulada no cenário 2 conforme figura 17.

Indice Técnico de Consumo	Unidade	Produção Ac. Fosfórico	Unidade	Consumo de Concentrado	Unidade	Custo Simulação Cenário 1 R$/t	Custo Simulação Cenário 2 R$/t	Variação	TOTAL R$
A		B		C= A*B		D	E	F= E-D	G=F*C
3	t/t	800.000	t/ano	2.400.000	t	210,58	217,35	6,77	16.248.000

Tabela 10 – Simulação do impacto na variação do custo da rocha
Fonte: Elaborado pelo autor.



```
Solution Report - simulacao_fosforico
Global optimal solution found.
Objective value:                              217.3571
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             3

Model Title: : SIMULAÇÃO PRODUÇÃO DE FOSFORICO - CENÁRIO 2

                   Variable           Value        Reduced Cost
                         X1       0.2142857            0.000000
                         X2       0.1428571            0.000000
                         X3       0.6428571            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        217.3571           -1.000000
                          2        0.000000           -76.71429
                          3       0.2142857            0.000000
                          4        0.000000            1.957143
                          5        0.000000            2351.786
```

Figura 17 -Relatório do LINGO do cenário1
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores obtidos na interação do Cenário 2, representaram 21,43% de $x_1$que é a fração de tonelada de concentrado proveniente da usinade Araxá, 14,28% de x_2 que é afração de tonelada de concentrado proveniente da usina de Catalão e 64,29% de $x_3$que é a fração de tonelada de concentrado proveniente da usina de Tapira.

O valor mínimo do custo de concentrado para produção de ácido fosfórico simulado pelo LINGO para o cenário 2 foi de 217,35 reais por tonelada.

6 CONCLUSÕES

O objetivo geral do trabalho que era o de aplicar um modelo de Programação Linear (PL) com uso do *software*LINGO para obter a otimizaçãode recursos de um processo da indústria de mineração foi desenvolvido e contou com aplicabilidade na prática.

Após a finalização desse estudo foi observada a importância da utilização da Programação Linear como ferramenta de suporte aos gestores tomadores de decisões, seja do ponto de vista sustentável das jazidas quanto do retorno financeiro dos investidores.

A questão sustentável está alicerçada ao aproveitamento otimizado do recurso para as gerações futuras, visto que é conhecido que as principais minas em operação no Brasil vêm reduzindo seus teores, ou seja, elas estão empobrecendo e com esse cenário o desafio da engenharia é produzir mais com menos.

Quando se analisa o resultado do cenário 1 simulado no trabalho versus o cenário 2, notou-se o impacto financeiro na atividade de mineração, uma vez que os volumes movimentados nessas atividades são significativos e esse fato pode ser fundamental na continuidade operacional da empresa.

O trabalho foi desenvolvido em uma parte do processo produtivo para fabricação de ácido fosfórico e o resultado foi satisfatório dado a simplicidade de utilização e agilidade de resposta do *software*, o que demonstra aplicabilidade prática da ferramenta.

As informações da empresa utilizadas neste trabalho foram alteradas para preservar e manter a confidencialidade do processo. Entretanto, as alterações foram propagadas de forma proporcional para não impactar nos resultados simulados.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDA, Associação Nacional para Difusão de Adubos, **Principais indicadores do setor de fertilizantes.** Disponível em: <http://www.anda.org.br/estatistica/Principais_Indicadores_2015. pdf>. Acesso em 24 de julho de 2015.

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa Operacional.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BUNGE. **Fascículo da cadeia de produção de fertilizantes.** São Paulo, 2009.

GARCIA, Marcelo. **Celeiro de um mundo cada vez maior.** Disponível em: <http://cienciahoje.uol.com.br/especiais/reuniao-anual-da-sbpc-2013/celeiro-de-um-mundo-cada-vez-maior>. Acesso em 17 de agosto de 2015.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional:** na tomada de decisões. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

LOESCH, Cláudio; HEIN, Nelson.**Pesquisa Operacional:** fundamentos e modelos. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

RAMALHETE, Manuel; GUERREIRO, Jorge; MAGALHÃES, Alípio.**Programação Linear.** Lisboa: McGraw-Hill de Portugual, Lda., 1984, v. 1.

RAMALHETE, Manuel; GUERREIRO, Jorge; MAGALHÃES, Alípio.**Programação Linear.** Lisboa: McGraw-Hill de Portugual, Lda., 1985, v. 2.

UNITED NATIONS, Departament of Economic and Social Affairs, **Population Division (2015)**. World Urbanization Prospects: The 2014 Revision, (ST/ESA/SER.A/366). Disponívelem: <http://esa.un.org/unpd/wup/FinalReport/WUP2014-Report.pdf>. Acesso em 24 de julho de 2015.

VALE FERTILIZANTES S.A, **Unidades em operação.** Disponível em: <http://www.valefertilizantes.com/valefertilizante/operacoes.asp>. Acesso em 25 de julho de 2015.

VALE S.A., **Relatório Anual 2014.** Disponível em: <http://www.vale.com/PT/investors/Quarterly-results-reports/20F/20FDocs/Vale%2020-F%202014_p_novo.pdf>. Acesso em 24 de julho de 2015.

VALE S.A., **Fertilizantes no Brasil:** Para um mundo mais bem nutrido. Exposibram 2013. Disponível em: <http://www.vale.com/PT/investors/Presentation-webcasts/Presentations/PresentationsDocs/EXPOSIBRAM%2013_DERD.pdf> . Acesso em 24 de julho de 2015.