

**Projeto de Controladores para Sistemas Multivariáveis
utilizando Alocação de Auto-Estrutura**

Autor: Leilane Marques Roberto Rodrigues

Orientador: Profa. Dra. Aline Fernanda Bianco

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me fazer forte e perseverante o bastante para superar às dificuldades.

Ao meu pai Antônio pela educação, pelo exemplo e pelo amor a mim depositado. À minha mãe Helena pelo exemplo de persistência e determinação que me fez alcançar meus objetivos e pelo amor incondicional.

Ao meu amado marido e melhor amigo Daniel pelo incentivo, o amor e a dedicação que sempre estiveram presentes.

Às minhas irmãs Nidialine e Greicilene que sempre estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos.

À Prof. Aline, minha orientadora, agradeço pelo apoio, paciência e persistência. Sua contribuição foi imprescindível para o fechamento de mais essa etapa.

À todos os meus amigos e colegas de curso, que contribuíram muito para a conclusão de mais essa etapa. A todos os mestres e demais funcionários do CEFET-MG, pelo apoio e amizade durante todo o curso.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
1.1	Importância do tema	6
2	OBJETIVOS	12
2.1.1	Objetivo Geral	12
2.1.2	Objetivos específicos	12
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
3.1	Autovalores e Autovetores:	13
3.1.1	- Autovalor e Autovetor de uma matriz:.....	14
3.2	- Sistemas Multivariáveis	16
3.2	- Conceito de Espaço de Estado.....	17
3.2.1	- Estado:	17
3.2.2	- Variáveis de Estado:.....	17
3.2.3	Vetor de estado:.....	17
3.2.4	Espaço de Estados:	18
3.2.5	- Equações no Espaço de Estados:	18
3.2.6	- Equivalências Espaço de Estados para Matriz Função de Transferência (MFT).....	19
3.3	- Equivalências entre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Matriz Função de Transferência (MFT)	20

3.4	Polos e Zeros de uma Matriz Função de Transferência (MFT).....	23
3.5	Forma de Smith Mc Millan	23
3.6	- Estabilidade:	25
3.7	- Controlabilidade e Observabilidade:	26
3.7.1	Controlabilidade:	26
3.7.2	Observabilidade:	27
3.7.3	- Extensão do conceito de controlabilidade e observabilidade para sistemas multivariáveis:	28
4	ESTABILIDADE VIA LYAPUNOV	30
4.1	- Método de análise de estabilidade de um sistema	30
4.1.1	Estabilidade Assintótica	30
4.1.2	Estabilidade Assintótica Global.....	31
4.1.3	Instabilidade.....	32
4.1.4	Classificação de Funções Escalares	32
4.1.5	- Classificação das Formas Quadráticas	33
4.1.6	- Métodos de Lyapunov	34
5	- PROJETO NO MODELO ESPAÇO DE ESTADOS	38
5.1	- Projeto por alocação de polos	38
5.2	- Método de projeto.....	38
5.3	- Formula de Ackermann.....	40

5.4	- Observadores de estado:.....	40
5.5	- Controlador baseado no observador	43
5.6	- Projeto de controladores para sistemas multivariáveis	44
5.7	- Projeto Observadores para sistemas Multivariáveis	46
5.8	- Procedimento alternativo para análise das propriedades do sistema	47
6	- ALOCAÇÃO DE AUTO – ESTRUTURA	48
6.1	Resposta do sistema dinâmico:	48
6.2	Atribuição de Auto-Estrutura	54
6.3	- Estabilizabilidade e Detectabilidade de Sistemas no Espaço de Estados .	57
6.3.1	- Decomposição canônica.....	58
7	SIMULAÇÃO DA ALOCAÇÃO DE AUTO – ESTRUTURA.....	60
8	CONCLUSÃO:.....	64
8.1	Sugestão para trabalhos futuros:	64
9	- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Descrição simplificada de um sistema de controle.....	7
Figura 2: Descrição simplificada de um sistema de controle em malha aberta.	8
Figura 3: Descrição simplificada de um sistema de controle em malha fechada.	8
Figura 4: Representação de um problema de sistema de controle.	9
Figura 5: Representação de estabilidade assintótica.	31
Figura 6: Representação de estabilidade assintótica global.....	31
Figura 7: Representação de instabilidade	32
Figura 8: Representação de um sistema realimentado.	54
Figura 9: Gráficos de saída do sistema.....	63

RESUMO

RODRIGUES, L. M. R. **PROJETO DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE AUTO-ESTRUTURA**. TCC. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG. Araxá. 2015.

Na engenharia comumente são encontrados sistemas com entradas e/ou saídas múltiplas, denominados sistemas Multivariáveis ou MIMO (do inglês *multiple-input multiple-output*). Técnicas de projeto de controladores para essa classe de sistemas requerem importantes avaliações estruturais, visando obtenção de desempenhos satisfatórios. Portanto, objetiva-se neste trabalho uma pesquisa bibliográfica de métodos para equacionar controladores para estes sistemas, apresentando diferentes tipos de modelamento e descrevendo sua motivação, definição, aplicação e solução dada em termo de equacionamentos. Posteriormente faz-se um estudo aprofundado do método via análise de Auto-Estrutura obtendo-se um controlador e analisando-o com o objetivo de verificar sua eficiência no equacionamento de controladores MIMO em comparativo com o método via equação de Lyapunov.

Palavras-chaves: projeto de controladores, sistemas Multivariáveis, análise de Auto-Estrutura, equação de Lyapunov.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Importância do tema

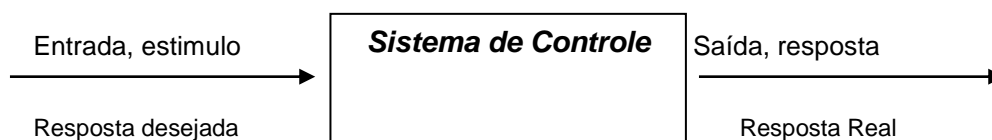
A engenharia diz respeito a capacidade de aplicar os conhecimentos científicos de forma prática a fim de produzir novas utilidades para o benefício da humanidade. Diz respeito aos engenheiros de sistema de controle compreender, aplicar e prever os segmentos à sua volta, denominados frequentemente de sistemas, com a intuito de dotar a sociedade de produtos mais confiáveis e versáteis, e sua produção mais simples e econômica.(BISHOP & DORF 2001).

O controle dos sistemas, aqui tratado como processo produtivo industrial, de modo automático em oposição ao manual é denominado automação. Na sociedade industrial moderna a automação é utilizada amplamente em diversas industrias tais como químicas, de energia elétrica, automobilística, siderúrgica, dentre outras. Para obter a automação de um sistema, é necessário ter uma visão global do processo a ser automatizado, e combinar esse conhecimento com os princípios de elétrica, mecânica, eletrônica e computação.

Dessa forma, os sistemas de controle, que são uma parte integrante da sociedade, consiste em subsistemas e processos (plantas) construídos com o objetivo de se obter uma saída com desempenho desejado, para uma entrada específica conhecida.

A figura 1 apresenta um sistema de controle em sua forma mais simples, em que a entrada corresponde a uma saída desejada.

Figura 1: Descrição simplificada de um sistema de controle.



Fonte: Elaboração Própria

Segundo Araújo (2007), o objetivo principal do estudo desses sistemas é resolver o que se costuma determinar como o problema de controle, mas, para que se possa apresentar uma formulação geral para esses, algumas definições são necessárias,:

Planta: É uma parte de um equipamento ou instalação industrial, um conjunto de itens que funcionam juntos, com finalidade de desempenhar uma determinada operação.

Processo: Trata-se de uma operação que avança progressivamente, caracterizada por um conjunto de mudanças graduais que se sucedem de modo alusivamente preciso, atingindo um determinado objetivo.

Sistema: É um conjunto de partes que estão conectadas ou relacionadas de tal maneira a formar um todo.

Sistema físico: É uma parte do sistema que foi demarcada para estudo.

Especificações de desempenho: São descrições do comportamento a ser apresentado pelo sistema físico, conforme solicitação do usuário.

Modelo: Consiste na representação de certas características dos sistemas físicos que são proeminentes para seu estudo.

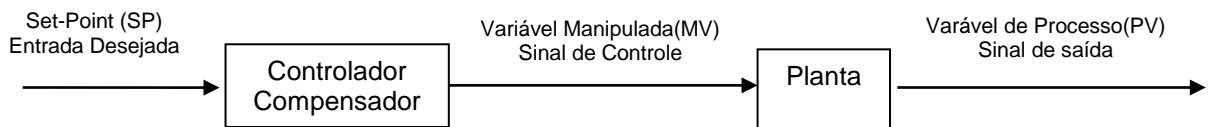
Controle: É a ação de fazer que um sistema físico atenda as especificações de desempenho determinadas anteriormente.

Controlador: Dispositivo utilizado para obtenção do controle do sistema físico.

Sistema de controle: Conjunto formado pelo sistema a ser controlado e o controlador.

Sistema de controle em malha aberta: Consiste em um sistema em que o sinal de saída não possui nenhuma influência sobre a entrada desejada. Uma representação genérica para esse sistema encontra-se na figura 2.

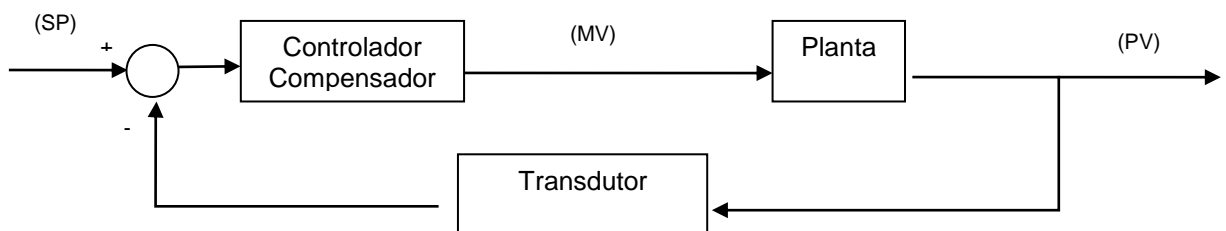
Figura 2: Descrição simplificada de um sistema de controle em malha aberta



Fonte:Elaboração Própria

Sistema de controle em malha fechada: Consiste em um sistema onde o sinal de saída influencia na entrada desejada. Uma representação para esse sistema encontra-se na figura 3.

Figura 3: Descrição simplificada de um sistema de controle em malha fechada.

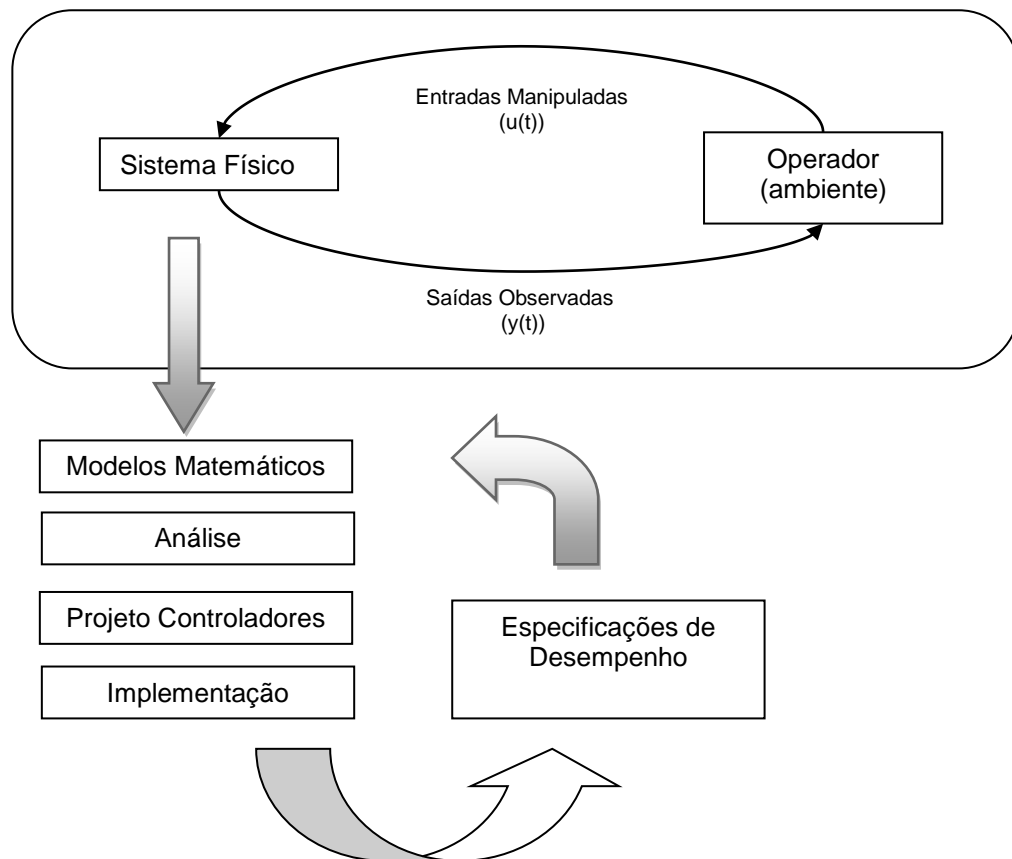


Fonte: Elaboração Própria

Com base nas definições apresentadas segue que um problema de controle cuja representação encontra-se na figura 4, consiste em definir uma forma de simular um dado sistema físico de modo que o seu desempenho atenda as especificações previamente determinadas.

Geralmente não é possível alterar a estrutura funcional de sistema, dessas forma as especificações são atingidas mediante o projeto e implementação de controladores (compensadores).

Figura 4: Representação de um problema de sistema de controle.



Fonte: Elaboração Própria

Para que essa implementação ocorra de maneira satisfatória e com resultados ótimos, ou seja, para que o controlador garanta a estabilidade desejada dos sistemas, é necessária uma formulação teórica sólida. Deste modo as teorias de controle que veem sendo desenvolvidas e aperfeiçoadas ao longo dos anos, apresentando um papel de suma importância na engenharia.

Em um breve histórico sobre o desenvolvimento dessas teorias, vale citar que o primeiro trabalho significativo de controle automático data do século XVIII, trata-se

do regulador centrífugo construído por James Watt para o controle de velocidade de uma máquina a vapor. Desde então, outros trabalhos importantes nos primeiros estágios do desenvolvimento da teoria de controle surgiram, como o de Minorsky em 1922, que trabalhou em controladores automáticos para pilotagem de embarcações e demonstrou como a estabilidade poderia ser determinada a partir de equações diferenciais que descrevem o sistema.

Durante a década de 1940, métodos de resposta em frequência (principalmente os métodos com base nos diagramas de Bode) tornaram possíveis aos engenheiros projetar sistemas de controle linear de malha fechada que satisfazem o desempenho requerido. Muitos sistemas de controle industrial das décadas de 1940 e 1950 usavam controladores PID no controle de pressão e temperatura etc. No início da década de 1940, Ziegler e Nichols criaram regras para o ajuste de controladores PID, no chamado método de Ziegler-Nichols. Do final da década de 1940 ao início da de 1950, o método do lugar das raízes, graças a Evans, foi plenamente desenvolvido. (OGATA 2011).

Os métodos citados brevemente no parágrafo anterior são a essência da teoria clássica de controle e conduziram a sistemas que são estáveis e satisfazem um conjunto de condições de desempenho relativamente arbitrárias.

Esses sistemas são, em geral, aceitáveis. Contudo, a tendência moderna dos sistemas de engenharia é aumentar a sua complexidade, principalmente em virtude da necessidade de realizar tarefas dinâmicas e de alta precisão. Sistemas complexos podem ter entradas e saídas múltiplas (sistemas multivariáveis) e ser variantes no tempo. Assim, a sua descrição passa a requerer um grande número de equações tornando o modelo complexo. Desse modo, a teoria clássica de controle torna-se insuficiente para os rigorosos requisitos relativos à precisão, eficiência e desempenho em diversas aplicações.

Em razão das necessidades desse novo contexto surge a teoria de controle moderno, com uma nova abordagem para a análise e o projeto de controladores de sistemas complexos que vem sendo desenvolvida desde aproximadamente 1960. Essa nova teoria tem como base o conceito de estado e a análise no domínio do

tempo, visando obtenção dos desempenhos satisfatórios para essa classe de sistemas.

Entretanto, a obtenção de controladores não é trivial e as técnicas de projeto requerem importantes avaliações estruturais. Por tudo isso, torna-se necessário um estudo aprofundado de técnicas de controle multivariável.

É claro que não se deve abandonar, repentinamente, décadas de conhecimento acumulado, mais sim procurar ampliá-lo substancialmente com novos conhecimentos já devidamente formalizados.

Assim, na busca de novos conhecimentos e com a finalidade de alcançar melhores resultados no universo da engenharia de controle moderno, apresenta-se a teoria de estabilidade de Lyapunov, que devidamente aplicada às técnicas de projeto de controladores tem servido de base para que muitos métodos, envolvendo estabilidade e desempenho, desenvolvam-se apresentando resultados extremamente satisfatórios.

Assim, objetiva-se com esse projeto apresentar um estudo aprofundado de caráter investigativo de forma a analisar a eficiência e o desempenho para equacionamento de controladores com base na teoria de controle moderno, por meio da análise de Auto-Estrutura, em comparativo ao método via equação de Lyapunov com a finalidade de verificar se o primeiro apresentará resultados altamente satisfatórios tal qual o segundo, amplamente difundido na literatura.

2 OBJETIVOS

2.1.1 Objetivo Geral

Investigar se o método para projeto por análise de Auto-Estrutura é tão eficiente no equacionamento de controladores para sistemas Multivariáveis quanto o método via equação de Lyapunov.

2.1.2 Objetivos específicos

- a) Apresentação os diferentes tipos de modelamento para sistemas MIMO: Definição, aplicação.
- b) Apresentação da técnica de alocação de polos pelo método via equação de Lyapunov;
- c) Apresentação de projetos para controladores no modelo espaço de estados.
- d) Apresentação um estudo aprofundado da técnica alocação de polos pelo método de Auto-Estrutura;
- e) Obtenção dos controladores utilizando a técnica de alocação por Auto-Estrutura para sistemas multivariáveis;
- f) Análise de desempenho dos controladores obtidos via simulação no software Matlab®.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão estudados conceitos preliminares referentes à teorias matemáticas, a fim de fundamentar e apresentar resultados e conceitos que serão altamente utilizados no decorrer do presente trabalho.

3.1 Autovalores e Autovetores:

Segundo Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1986), dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, objetiva-se saber quais vetores são levados em múltiplo de si mesmo; isto é, busca-se um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

O escalar λ será chamado de autovalor ou valor característico de T e o vetor \mathbf{v} um autovetor ou vetor característico de T .

Neste caso $T(\mathbf{v})$ será um vetor de mesma “direção” (pertencentes à mesma reta suporte) que \mathbf{v} . Como $\mathbf{v} = 0$ satisfaz a equação para todo λ , estaremos interessados em determinar vetores $\mathbf{v} \neq 0$ satisfazendo a condição acima.

Definição:

Seja: $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$, e $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, λ é um autovalor de T e \mathbf{v} um autovetor de T associado a λ .

Observe que λ pode ser um numero 0, embora \mathbf{v} não possa ser um vetor nulo. De um modo geral toda a transformação

$$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{v} \mapsto \alpha\mathbf{v}, \alpha \neq 0$$

tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0,0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(\mathbf{v})$ é sempre um vetor de mesma direção que \mathbf{v} .

Ainda mais se:

- i) $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.
- ii) $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.
- iii) $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.
- iv) $\alpha = 1$, T é a identidade.

Teorema:

Dada uma transformação $T: V \rightarrow V$ e um auto vetor \mathbf{v} associado a um autovalor λ , qualquer vetor $w = \alpha \mathbf{v}$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ .

O conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor λ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de V , isto é, $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}: T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ é subespaço de V .

O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}: T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor λ* .

3.1.1 - Autovalor e Autovetor de uma matriz:

Dada uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n , estaremos entendendo por autovalor e autovetor de \mathbf{A} autovalor e autovetor da transformação linear $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, associada a matriz \mathbf{A} em relação à base canônica, isto é, $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbf{R}^n$, são solução da equação $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$.

Aplicação:

Dada a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, tem-se

$$A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}e_1 \text{ e em geral,}$$

$Ae_i = a_{ii}e_i$. Então, esses vetores da base canônica de \mathbf{R}^n são autovetores para A , e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii} .

Polinômio característico:

Define-se polinômio característico de uma matriz, ou seja, da transformação linear $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ a ela associada. Podemos estender esse conceito para qualquer transformação linear, $T: V \rightarrow V$ partindo do seguinte argumento.

Argumento:

Seja β uma base de V , então seguem as equivalências:

$$Tv = \lambda v$$

$$[T]_{\beta}^{\beta}[v]_{\beta} = \lambda[v]_{\beta}$$

$$([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I)[v]_{\beta} = 0$$

$$\det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I) = 0$$

onde,

$$\det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I) = P(\lambda)$$

Observa-se que a última condição é dada por $P(\lambda) = 0$ onde $P(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Neste caso $P(\lambda)$ também será chamado polinômio característico da transformação T e suas raízes serão os autovalores de T . O fator fundamental nesta definição é sua independência da base β escolhida.

De fato, seja α uma outra base de V e $A = [T]_{\beta}^{\beta}$.

Então:

$$\det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) = \det (A[T]_{\beta}^{\beta} A^{-1} - \lambda A I A^{-1})$$

$$\det [A([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I) A^{-1}]$$

$$\det (A) \cdot \det ([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I) \cdot \det (A^{-1})$$

$$\det ([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I) = P(\lambda).$$

3.2 - Sistemas Multivariáveis

Em geral, sistemas Multivariáveis (do inglês MIMO *multiple input – multiple output*) são representados por variáveis de estado, ao invés de funções de transferência. Isso se deve ao fato das análises e projeto serem mais facilmente obtidos neste modelo.

Considere o sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, vetor de estado

$x(0)$ condições iniciais

$u(t) \in \mathbb{R}^{nu}$, entradas do sistema

$y(t) \in \mathbb{R}^{ny}$, saídas do sistema

A, B, C e D matrizes com dimensões apropriadas

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$

$C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$

$D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$

Se $n_u = n_y = 1$ o sistema é dito Monovariável (do inglês SISO – *single input – single output*).

A representação entrada (s) /saída (s) do sistema é dada através da Matriz Função de Transferência e não mais somente uma Função de Transferência.

3.2 - Conceito de Espaço de Estado

3.2.1 - Estado:

Conceito: “O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, tais que o conhecimento dessas variáveis em $t = t_0$, junto ao conhecimento da entrada para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$ ” (OGATA 2011).

3.2.2 - Variáveis de Estado:

Conceito: “As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que constituem o menor número de variáveis que são capazes de determinar o estado desse sistema dinâmico” (OGATA 2011).

3.2.3 Vetor de estado:

Conceito: “Um vetor de estados é aquele que determina univocamente o estado do sistema $\mathbf{x}(t)$ para qualquer instante $t \geq t_0$, uma vez que é dado o estado em $t = t_0$, e a entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$, é especificada” (OGATA 2011).

3.2.4 Espaço de Estados:

Conceito: “O espaço n-dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de x_1, x_2, \dots, x_n , onde x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis de estado. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados”(OGATA 2011).

3.2.5 - Equações no Espaço de Estados:

“A análise no espaço de estado envolvem três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de problemas dinâmicos: variáveis de entrada $u(t)$, variáveis de saída $y(t)$ e variáveis de estado $x(t)$ ”(OGATA 2011).

A equação de estado é um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem com n variáveis, onde as n variáveis a serem determinadas são as variáveis de estado.

Já a equação de saída é a equação algébrica que expressa às variáveis de saída de um sistema como combinações lineares das variáveis de estado e das entradas. Esta equação é utilizada para se calcular quaisquer outras variáveis do sistema.

A representação de dado sistema no espaço de estados não é única, mas o numero de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema no espaço de estados, denominada ordem do sistema.

Dessa forma, as equações no espaço de estados e dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

e a equação de saída é dada por:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Para $t \geq t_0$ e em condições iniciais, $x(t_0)$, onde:

A: matriz de estados

B: matriz de entrada

C: matriz de saída

D: matriz de transição direta

x : vetor de estados

\dot{x} : derivada do vetor de estado em relação ao tempo

y : vetor de saída

Se as matrizes A, B, C, D são funções do tempo, o sistema é dito variante no tempo. Caso contrário, ele é denominado invariante no tempo.

3.2.6 - Equivalências Espaço de Estados para Matriz Função de Transferência (MFT)

Seja a equação no espaço de estados com condições iniciais nulas

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de *Laplace* nas equações:

$$L\{x\} = X(s)$$

$$L\{u\} = U(s)$$

$$L\{y\} = Y(s)$$

Segue que:

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) - AX(s) = BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI - A)^{-1} \cdot (sI - A) \cdot X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s) & (I) \\ Y(s) = CX(s) & (II) \end{cases}$$

Substituindo I em II na equação, obtém-se:

$$Y(s) = C (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Portanto, a matriz função de transferência é dada por:

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

com dimensão $G(s)$ e $\mathbb{R}^{n_y \times n_u}$

Como $(sI - A)$ corresponde ao polinômio característico de $G(s)$, os autovalores de A correspondem às raízes do polinômio característico, ou seja, aos polos de $G(s)$.

3.3 - Equivalências entre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Matriz Função de Transferência (MFT)

Considere o sistema TITO (*two input/ two output*) modelo através das equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2 \dot{y}_1 - y_2 = 0,3 \dot{u}_1 + u_2 \\ \dot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 2,5 u_2 \end{cases}$$

Supondo condições iniciais nulas e aplicando-se a Transformada de *Laplace* obtém-se a Matriz Função de Transferência $G(s)$.

$$L \{y_1\} = Y_1(s)$$

$$L\{y_2\} = Y_2(s)$$

$$L\{u_1\} = U_1(s)$$

$$L\{u_2\} = U_2(s)$$

$$L[\ddot{y}_1 + 2 \dot{y}_1 - y_2 = 0,3 \dot{u}_1 + u_2]$$

$$s^2 Y_1(s) + 2s Y_1(s) - Y_2(s) = 0,3s U_1(s) + U_2(s)$$

$$Y_1(s) \cdot (s^2 + 2s) - Y_2(s) = U_1(s) \cdot (0,3s + 1)$$

$$L[\dot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 2,5 u_2]$$

$$s Y_1(s) + s^2 Y_2(s) = 2,5 U_2(s)$$

O sistema dessa forma fica assim representado:

$$\begin{bmatrix} s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2s & -1 \\ s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 s \\ Y_2 s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3s + 1 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 s \\ U_2 s \end{bmatrix}$$

onde:

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2s & -1 \\ s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1 s \\ Y_2 s \end{bmatrix}$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0,3s + 1 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix}$$

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_1 s \\ U_2 s \end{bmatrix}$$

A formulação acima representa a forma do modelo dinâmico em s e, em sistemas MIMO genéricos, e é dada por:

$$D(s) \cdot Y(s) = N(s) \cdot U(s)$$

onde D(s) e N(s) são matrizes polinomiais na variável s.

Assumindo $D(s)$ invertível segue, à princípio, que a saída pode ser expressa em função da entrada:

$$Y(s) = D^{-1} \cdot N(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot U(s)$$

A matriz $D^{-1}(s) \cdot N(s)$ é chamada Matriz Função de Transferência, onde cada elemento é um quociente de polinômios.

Desse modo, retomando o modelo:

$$\begin{bmatrix} Y_1 s \\ Y_2 s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 + 2s & -1 \\ s & s^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,3s + 1 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 s \\ U_2 s \end{bmatrix}$$

sendo que,

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2s & -1 \\ s & s^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + s} \cdot \begin{bmatrix} s^2 & 1 \\ -s & s^2 + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{1}{s^4 + 2s^3 + s} \\ \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{s + 2}{s^3 + 2s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} Y_1 s \\ Y_2 s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{1}{s^4 + 2s^3 + s} \\ \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{s + 2}{s^3 + 2s^2 + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3s + 1 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 s \\ U_2 s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 s \\ Y_2 s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,3s^2 + s}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{2,5}{s^4 + 2s^3 + 5} \\ \frac{-0,3s - 1}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{2,5s + 5}{s^3 + 2s^2 + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 s \\ U_2 s \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,3s^2 + s}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{2,5}{s^4 + 2s^3 + 5} \\ \frac{-0,3s - 1}{s^3 + 2s^2 + 1} & \frac{2,5s + 5}{s^3 + 2s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Neste exemplo têm-se $n_u = n_y = 2$, ou seja, duas entradas e duas saídas.

3.4 Polos e Zeros de uma Matriz Função de Transferência (MFT)

Os elementos da MFT são funções racionais na variável s . Para o caso SISO, uma função de transferência dada por:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

onde os polos e zeros são as raízes do numerador e denominador, respectivamente.

Para o caso MIMO, tal conceito é dado da seguinte maneira:

Dada $G(s)$ $n \times n$:

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$$

sendo que $N(s)$ é uma matriz polinomial e $d(s)$ é um polinômio. Vamos supor que $d(s)$ possui raízes da forma:

$$d(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)$$

Segue que p_i são os polos do sistema.

3.5 Forma de Smith Mc Millan

É uma formulação que permite determinar os polos e zeros de um sistema multivariável. Os zeros de sistemas MIMO são denominados zeros de transmissão e tem a propriedade de bloquear a transmissão, ou seja, fornecer saída zero em resposta a entradas pertinentes a determinadas classes específicas.

$$Y_{(s0)} = G_{(s0)} \cdot U_{(s0)} = 0$$

O nome zero de transmissão é porque se referem à transmitância do sistema.

Seja $G(s)$ uma matriz função de transferência de dimensão $N_y \times N_u$ (N_y saídas e N_u entradas). Considere $g_{ij}(s) = \frac{p_{ij}(s)}{q_{ij}(s)}$ o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de $G(s)$. Defina $d(s)$ o mmc de todos os denominadores $q_{ij}(s)$, $i = 1, \dots, l$ e $j = 1$.

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1nu} \\ g_{21} & & \ddots & \vdots \\ g_{ny1} & \dots & \dots & g_{nynu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}}{q_{11}} & \dots & \frac{p_{1nu}}{q_{1nu}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p_{ny1}}{q_{ny1}} & \vdots & \frac{p_{nynu}}{q_{nynu}} \end{bmatrix}$$

Para todo $q_{ij}(s)$ há um $\bar{d}_{ij}(s)$ tal que

$$d(s) = q_{ij}(s) \cdot \bar{d}_{ij}(s) \quad (\text{mmc})$$

Seja $N(s)$ uma matriz $N_y \times N_u$ tal que cada elemento N_{ij} é dado por:

$$g_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{d(s)}$$

$$n_{ij}(s) = d(s) \cdot q_{ij}(s)$$

$$n_{ij}(s) = q_{ij}(s) \cdot \bar{d}_{ij}(s) \cdot g_{ij}(s)$$

$$n_{ij}(s) = q_{ij}(s) \cdot \bar{d}_{ij}(s) \cdot \frac{p_{ij}(s)}{q_{ij}(s)} = \bar{d}_{ij}(s) \cdot p_{ij}(s)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_{11} & \dots & n_{1xnu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{yx1} & \dots & n_{nyxnu} \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz $P(s)$ $N_y \times N_u$, existem matrizes $U(s)$ e $V(s)$, respectivamente $N_y \times N_y$ e $N_u \times N_u$ tais que

$$\Lambda(s) = U(s) \cdot P(s) \cdot V(s)$$

sendo que Λ tem a forma :

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\Gamma(s)$ matriz diagonal de ordem r dada por:

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \lambda_{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{r(s)} \end{bmatrix}$$

Considere a matriz racional

$$G(s) = U(s).P(s).V(s) = U(s).\frac{N(s)}{d(s)}.V(s)$$

Temos que pela formula de Smith – Mc Millan

$$G(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda'_1(s)}{d(s)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\lambda'_r(s)}{d(s)} \end{bmatrix}$$

As raízes de $\lambda_{1(s)}$ na forma de Mc Millan são os zeros de transmissão de $G(s)$ e as raízes de $d(s)$ são os polos.

3.6 - Estabilidade:

Considere uma representação em variáveis de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}$$

Teorema: Um sistema é estável, se, quando $u(t) = 0$, para todo $x(0)$, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Observação: Se $u(t) = 0$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Colorário: Um sistema é estável, se, todos os autovalores da matriz A apresentam parte real negativa.

Observação: Os autovalores de A são as raízes do polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0$$

3.7 - Controlabilidade e Observabilidade:

“Um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito.

Um sistema será dito observável no instante $t(0)$ se, com o sistema no estado $x(t_0)$, for possível determinar esse estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito.” (OGATA 2011)

3.7.1 Controlabilidade:

Um sistema descrito pelo par (A, B) pode ser dito controlável se existir um controle u sem restrições que possa transferir qualquer estado inicial $x(0)$ para qualquer outra localização desejada $x(t)$.

Seja o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

É possível determinar se o sistema é controlável examinando-se a condição algébrica

$$\text{posto } [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

Para um sistema com uma única entrada e única saída, a matriz de controlabilidade C em termos de A e B ,

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Que é uma matriz $n \times n$. Portanto se o determinante de C for não nulo, o sistema é dito controlável.

3.7.2 Observabilidade:

Refere-se à capacidade de se estimar uma variável de estado. Deste modo, diz-se que um sistema pode ser observável se a saída possuir uma componente devida a cada uma das variáveis de estado.

Um sistema é observável se, e somente se, existir um tempo T finito tal que o estado inicial $x(0)$ possa ser determinado a partir do histórico de $y(t)$, dado o controle de $u(t)$.

Para o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

É possível determinar se o sistema é observável examinando-se a condição algébrica

$$\text{posto} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Para um sistema com uma única entrada e única saída, a matriz de observabilidade ϑ em termos de A e C ,

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Que é uma matriz $n \times n$. Portanto se o determinante de ϑ for não nulo, o sistema é dito observável.

3.7.3 - Extensão do conceito de controlabilidade e observabilidade para sistemas multivariáveis:

Os conceitos são os mesmos. O que muda é o dimensionamento das matrizes de controlabilidade e observabilidade, que são os critérios para verificação de tais propriedades.

Neste caso a Matriz de controlabilidade

$C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ tem posto linha completo.

sendo que

$$C \in \mathbb{R}^{n \times n \times m}$$

Aplicação:

Para o sistema com duas entradas e uma saída:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0]x \end{cases}$$

$$C = [B \ AB]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Observa-se que as duas linhas de C são iguais, logo são linearmente dependentes e, portanto, o sistema não é controlável.

Posto de $C = 1 < 2$

Considere agora, um sistema no espaço de estados com n_y saídas e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$.

O sistema é observável se a matriz

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ tem posto coluna pleno.}$$

Sendo que a dimensão da matriz é:

$$\vartheta \in \mathbb{R}^{np \times nxn}$$

Aplicação:

Para o sistema com duas entradas e duas saídas.

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Observa-se que as colunas são linearmente independentes, portanto o sistema é observável. Posto de $\vartheta = 2$, completo.

Conclui-se que:

Sistema Controlável → Possível fazer um Projeto de Controlador

Sistema Observável → Possível fazer um Projeto de Observador

Em termos de dimensões, segue que no caso MIMO os ganhos de controle e observação, K e L, respectivamente, obtidos via projeto têm as seguintes dimensões:

$$K \in \mathbb{R}^{n \times nxn},$$

$$L \in \mathbb{R}^{nxny}$$

como será visto na sequência do trabalho.

4 ESTABILIDADE VIA LYAPUNOV

4.1 - Método de análise de estabilidade de um sistema

O método de Lyapunov, de acordo com Maia (2012), faz parte da teoria de controle moderno e pode ser aplicado para sistemas lineares ou não lineares, variantes ou invariantes no tempo e ainda fornece-nos uma ideia do comportamento em estado transitório de um sistema.

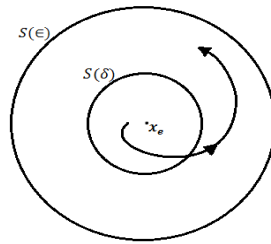
A estabilidade é normalmente o requisito mais importante para um sistema de controle, pois um sistema instável além de ser um sistema muito difícil ou impossível de ser controlado ele é potencialmente perigoso podendo, por exemplo, levar à explosão de uma caldeira ou a queda de um avião.

A análise de sistemas segundo Lyapunov baseia-se na evolução temporal da distância entre a trajetória $x(t)$ e o estado de equilíbrio x_e . Serão traçadas duas regiões $S(\delta)$ e $S(\varepsilon)$ que são regiões próximas ao ponto de equilíbrio onde $S(\delta)$ é a região traçada por pontos equidistantes do ponto de equilíbrio para um determinado $x \neq x_e$. Um estado de equilíbrio x_e é dito estável no sentido de Lyapunov se, correspondendo a cada $S(\varepsilon)$, há um $S(\delta)$ tal que trajetórias partindo de $S(\delta)$ não saem de $S(\varepsilon)$ quando t tende ao infinito. Temos maneiras de classificar a estabilidade de acordo com o comportamento do mesmo.

4.1.1 Estabilidade Assintótica

Um estado de equilíbrio x_e é dito assintoticamente estável se toda solução partindo de $S(\delta)$ converge, sem sair de $S(\varepsilon)$ para x_e quanto t tende ao infinito conforme a figura 5.

Figura 5: Representação de estabilidade assintótica.

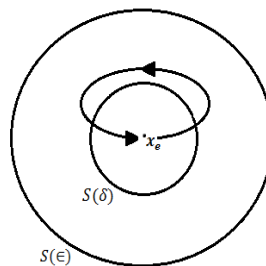


Fonte: “Análise de Estabilidade de Lyapunov” MAIA, Montes Claros, 2012(pg02)

4.1.2 Estabilidade Assintótica Global

Se a estabilidade assintótica vale para todos os estados (todos os pontos do espaço de estados) a partir dos quais se originam as trajetórias, o estado de equilíbrio é dito assintoticamente globalmente estável. Ou seja, um estado x_e é dito assintoticamente globalmente estável se toda solução converge quando o tempo tende ao infinito e ele é o único estado de equilíbrio em todo o espaço de estados conforme a figura 6.

Figura 6: Representação de estabilidade assintótica global

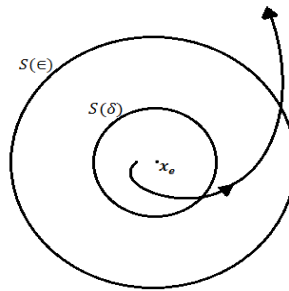


Fonte: “Análise de Estabilidade de Lyapunov” MAIA, Montes Claros 2012(pg02)

4.1.3 Instabilidade

Um estado de equilíbrio x_e é dito instável se para um número real $\varepsilon > 0$ sempre exista um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória partindo desse estado sempre abandona $S(\varepsilon)$, conforme a figura 7.

Figura 7: Representação de instabilidade



Fonte: “Análise de Estabilidade de Lyapunov” MAIA, Montes Claros 2012(pg02)

4.1.4 Classificação de Funções Escalares

A função de Lyapunov que será vista na sequência trata-se de uma função escalar. Para a análise da estabilidade de um sistema é necessário classificá-la quanto ao seu resultado independente de cada elemento. Podem ser classificadas como: Positiva Definida, Positiva Semi-Definida, Negativa Definida, Negativa Semi-Definida ou Indefinida.

Positiva Definida

Função escalar positiva definida é a função $V(x) > 0$ para todos os estados não nulos e $V(0) = 0$. Trata-se de uma função que, independente das entradas, sempre será positiva exceto na origem, onde será nula.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Positiva Semi-Definida

Função escalar positiva semi-definida é a função $V(x) \geq 0$ para todos os estados. Ela é uma escalar positiva, porém pode ser nula em locais diferentes da origem.

$$V(x) = (x_1 + x_2)^2$$

Negativa Definida

Função escalar negativa definida é a função na qual $-V(x)$ é dita positiva definida

$$V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$$

Negativa Semi-Definida

Função escalar negativa Semi-Definida é a função na qual $-V(x)$ é dita positiva Semi-Definida.

$$V(x) = -(x_1 + x_2)^2$$

Indefinida

Função escalar indefinida é a função $V(x)$ que pode assumir tanto valores positivos como negativos.

$$V(x) = x_1x_2 + x_2^2$$

4.1.5 - Classificação das Formas Quadráticas

As funções escalares podem ser escritas na forma quadrática. Isso em determinados casos fornece uma análise matemática mais simples e rápida, especialmente em casos que depara-se com escalares mais longas e complexas. Como ela é uma representação das funções escalares é possível determinar qual é a sua classificação.

A representação fica da seguinte maneira:

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x$$

$$V(x) = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Onde P é uma matriz Hermitiana (real e simétrica).

Para classificarmos uma matriz utiliza-se o critério de Sylvester que diz que para que a forma quadrática $V(x)$ seja positiva definida todos os menores principais sucessivos de P devem ter determinantes positivos, isto é:

$$P_{11} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} > 0$$

$V(x) = x^t P x$ é positiva semidefinida se P é singular e todos os menores principais são positivos. $V(x)$ é negativa definida se $-V(x)$ é positiva definida e negativa semi-definida se $-V(x)$ é positiva semi-definida.

4.1.6 - Métodos de Lyapunov

Primeiro Método de Lyapunov

Também conhecido como o Método Indireto ou Método da Linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não-linear através do seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos autovalores. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno do ponto de operação nominal.

Porém, esse método requer um trabalho maior, pois demanda a resolução das equações diferenciais do sistema o que pode ser complicado ou mesmo impossível de ser alcançado em determinados casos.

Segundo Método de Lyapunov

Também chamado de método direto de Lyapunov, não requer as soluções das equações diferenciais e baseia-se em um conceito bastante interessante que é o de dissipação de energia. Da teoria clássica da mecânica sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total (uma função definida positiva) for continuamente decrescente o que significa que a derivada em relação ao tempo seja definida negativa até que um ponto de equilíbrio seja alcançado. Sendo assim Lyapunov generalizou esse conceito onde, em todo sistema estável, a energia armazenada no sistema decresce com o passar do tempo. Para sistemas onde não se consegue uma análise prática Lyapunov introduziu uma função de energia fictícia que pode ser aplicada a qualquer análise.

No método direto de Lyapunov o comportamento do sinal de $V(x, t)$ e o de sua derivada temporal $V'(x, t) = dV(x, t)/dt$ fornecem informações sobre a estabilidade, estabilidade assintótica, ou instabilidade de um estado de equilíbrio sem que haja necessidade de se resolver diretamente as equações. Isto se aplica tanto para sistemas lineares quanto não lineares.

Portanto, a seguir o Método Direto será tratado em detrimento do Indireto por ser de abordagem mais simples e intuitiva.

Segundo Método de Lyapunov

Serão analisados inicialmente um sistema linear invariante no tempo. Considera-se o seguinte sistema não forçado:

$$\dot{x} = Ax$$

onde x é um de estado e A uma matriz constante $n \times n$ e não singular. Uma possível função de Lyapunov será adotada:

$$V(x) = x^t P x$$

A derivada de $V(x)$ ao longo de qualquer trajetória é:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x}$$

Substituindo \dot{x} por Ax , obtém-se:

$$\dot{V}(x) = (Ax)^t P x + x^t P A x$$

$$= x^t A^t P x + x^t P A x$$

$$= x^t (A^t P + P A) x$$

Como dito anteriormente a função de Lyapunov é uma analogia a uma função de energia onde, para um sistema estável, sua energia total é uma escalar Positiva Definida e sua variação ao longo do tempo é uma escalar Negativa Definida. Portanto é condição suficiente que P e $(A^t P + P A)$ que podemos definir como $-Q$ sejam positivas definidas. A fim de se estudar a estabilidade do sistema é conveniente determinar uma matriz Q e examinar a matriz P , pois a estabilidade do sistema não depende diretamente da matriz Q escolhida em particular contanto que ela seja positiva definida.

Considerações:

Ao aplicar esse teorema várias observações importantes são necessárias:

1ª Se $\dot{V}(x) = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x}$ não se anula em nenhum ponto da trajetória pode-se definir Q positiva;

2ª - Se escolhe-se uma matriz Q arbitrária positiva definida a resolução da equação matricial $Q = -(A^t P + P A)$ é uma condição necessária e suficiente P ser positiva definida;

3ª - O resultado final não depende da matriz Q escolhida em particular, contanto que ela seja positiva definida;

4ª - Ao se determinar se existe ou não uma matriz Hermitiana positiva definida P é conveniente escolher Q como I para simplificar os cálculos para determinar os elementos da matriz P .

5 - PROJETO NO MODELO ESPAÇO DE ESTADOS

5.1 - Projeto por alocação de polos

Neste método os polos em malha fechada são colocados nas posições desejadas, considerando-se que todas as variáveis sejam mensuráveis e que estejam disponíveis para realimentação.

Se o sistema for controlável, então os polos de malha fechada poderão ser alocados em qualquer posição desejada por meio de uma realimentação de estado, empregando uma matriz de ganho proporcional.

A realimentação é dada por:

$$u(t) = -kx(t)$$

sendo k a matriz de ganho.

O polinômio característico do sistema em malha aberta é dado por:

$$\emptyset(s) = \det(sI - A)$$

Já em malha fechada segue que:

$$\emptyset_{MF}(s) = \det(sI - (A - Bk)) = \det(sI - A + Bk)$$

5.2 - Método de projeto

Direto: Sabendo-se onde os polos desejados devem estar, basta fazer uma comparação entre o \emptyset_{des} e o \emptyset_{MF} , obtendo-se os elementos que compõe R .

Aplicação: Seja o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1]x \end{cases}$$

E os polos desejados: $s=-3$ e $s=-2$

i. Determinar polos em malha aberta:

$$\phi(s) = \det(sI - A)$$

$$\phi(s) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\phi(s) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 1 \Rightarrow s = +1 ; -1$$

ii. Determinar ϕ_{des} :

$$\phi_{des} = (s + 3)(s + 2) = s^2 + 5s + 6$$

iii. Determinar ϕ_{MF} :

$$k = [k_1 \quad k_2]_{1 \times 2}$$

$$\phi_{MF} = \det(sI - A + Bk)$$

$$\phi_{MF} = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]\right)$$

$$\phi_{MF} = s^2 + k_2s + k_1 - 1$$

iv. Determinar k:

$$\phi_{des} = \phi_{MF}$$

$$s^2 + 5s + 6 = s^2 + k_2s + k_1 - 1$$

$$\therefore k = [7 \quad 5]$$

5.3 - Formula de Ackermann

Nesta técnica, o ganho de realimentação k é determinado por:

$$k = [0 \ 0 \ \dots \ 0]C^{-1}\phi_{des}(A)$$

Sendo C a matriz de controlabilidade $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ e o ϕ_{des} o polinômio característico desejado substituído em A .

Aplicação: Seja o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1]x \end{cases}$$

$$\phi_{des} = s^2 + 5s + 6$$

$$C = [B \ AB]$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{des}A = A^2 + 5A + 6.I$$

$$\phi_{des}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{des}A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

5.4 - Observadores de estado:

Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Suponha que não consigamos acessar diretamente o estado $x(t)$. Precisamos, então, projetar um observador de estados $\tilde{x}(t)$ (estado observado ou estimado) de $x(t)$.

$$\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$$

O sistema associado ao observador é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \end{cases}$$

O erro de observação é a diferença entre o estado real e o observado (estimado) ou seja,

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

O objetivo deste projeto é levar o erro a zero, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

A dinâmica do erro é dado por:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t)$$

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (A\tilde{x}(t) + Bu(t))$$

$$\dot{e}(t) = Ax + Bu - A\tilde{x} - Bu$$

$$\dot{e} = Ax - A\tilde{x}$$

$$\dot{e} = A(x - \tilde{x})$$

$$\dot{e} = A \cdot e$$

cuja solução é:

$$e(t) = e(u) \cdot e^{AT}$$

Neste caso, o erro tende a zero, se e somente se, A for estável, ou seja, os autovalores de A tiverem parte real negativa. Além de que a presença de $e(0)$ faz

necessária a condição de observabilidade do sistema. Essas condições são muito fortes de serem atingidas. Assim, faz-se necessário modificar o modelo do observador de estados.

Se acrescentarmos um fator de correção com base na diferença entre o valor real da saída e o seu valor estimado, ou seja, comparando $Cx(t)$ com $C\tilde{x}(t)$ ponderado por um ganho L , tem-se o observador de estados.

$L \rightarrow$ matriz de correção de erro de estimação que deverá ser projetada

O modelo de observador é dado agora por:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}), y = C\tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + Ly - LC\tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly$$

E o erro dinâmico passa a ser dado por:

$$\dot{e}(t) = \dot{x} - \dot{\tilde{x}}$$

$$\dot{e}(t) = Ax + Bu - ((A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly)$$

$$\dot{e}(t) = Ax + Bu - (A - LC)\tilde{x} - Bu - Ly$$

$$\dot{e}(t) = Ax - (A - LC)\tilde{x} - LCx$$

$$\dot{e}(t) = (A - LC)x - (A - LC)\tilde{x}$$

$$\dot{e}(t) = (A - LC) - (x - \tilde{x})$$

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e$$

Cuja solução è:

$$e(t) = e(0).e^{(A-LC)t}$$

Se os autovalores de $(A-LC)$ forem alocados é possível controlar a taxa com que $e(t)$ tende a zero.

Teorema: Os autovalores de (A-LC) podem ser alocados arbitrariamente através da escolha de um ganho L, se e somente se, (A,L) for observável.

5.5 - Controlador baseado no observador

Para utilizar realimentação de estados como técnica de controle, os estados devem estar disponíveis. Contudo, quando estes não podem ser medidos, mostrou-se que é possível utilizar o observador de estados $\hat{x}(t)$.

Considere, então, o sinal de realimentação utilizando o estado observado dado por:

$$u = -k\tilde{x}$$

Assim, o sistema em espaço de estados passa a ser dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - Bk\tilde{x}$$

Somando-se e subtraindo-se o termo Bkx obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - Bk\tilde{x} + Bkx - Bkx$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - Bk)\tilde{x} - Bk(\tilde{x} - x)$$

sendo que o erro é dado por:

$$e = (\tilde{x} - x)$$

Uma forma de se analisar o sistema realimentado por estado observado (OGATA 2003), consiste em analisar um vetor aumentando $Xa = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$.

Assim, a equação dinâmica torna-se:

$$\dot{Xa} = Aa.Xa$$

$$\dot{e} = (A - LC).e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk & Bk \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \right)$$

$$\phi(s) = \det \begin{bmatrix} s - A + Bk & -Bk \\ 0 & s - A + LC \end{bmatrix}$$

onde k é o ganho do controlador e L é o ganho do observador.

Propriedade: Dada uma matriz bloco triangular

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

Então $\det(P) = \det(x) \cdot \det(z)$

Pela propriedade de determinantes, conclui-se que os autovalores do sistema realimentado por estado observado, constituem dois conjuntos distintos de autovalores, isto é, um conjunto de autovalores devido ao projeto do controlador e outro conjunto devido ao projeto do observador.

Assim, verifica-se o princípio da separação do projeto do controlador e do observador que podem ser elaborados de forma independente.

5.6 - Projeto de controladores para sistemas multivariáveis

Esse método propõe uma forma relativamente simples para projetar uma realimentação de estados que posicionem os autovalores em malha fechada.

O projeto para o caso multivariável é mais complexo e segue os seguintes procedimentos.

- i. Seja \tilde{A} uma matriz com os autovalores desejados em malha fechada, onde não existe autovalores comuns entre A e \tilde{A} .
- ii. Seja $K \in IR^{m \times n}$ (m entradas e n estados) tal que $(\tilde{A} e \tilde{K})$ é observável.

iii. Determine P, solução da equação de Lyapunov.

$$AP - P\tilde{A} = B\tilde{K}$$

iv. Se P é singular, selecione outra matriz \tilde{K} . Se P é singular $K = \tilde{K}P^{-1}$.

$$\lambda(A) = \lambda(A - BK)$$

Aplicação: Dado o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [2 \quad 1]x \end{aligned}$$

Autovalores desejados em malha fechada:

$$s = -1 \text{ e } s = -2, \text{ com } u = -Kx$$

$$m = 2 \text{ e } n = 2$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \lambda(\tilde{A}) \neq \lambda(A) \\ & \quad \lambda(\tilde{A}) \neq 1 \\ \text{ii)} \quad \tilde{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \vartheta &= \begin{bmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}\tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -4 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \text{ observável} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad AP - P\tilde{A} &= B\tilde{K} \\ P &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2 \\ 3b = 2 \Rightarrow b = 2/3 \\ 2c = 3 \Rightarrow c = 3/2 \\ 3d = 4 \Rightarrow d = 4/3 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 3/2 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\det P = -\frac{2}{6}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{aligned} K &= \tilde{K}P^{-1} \\ K &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.7 - Projeto Observadores para sistemas Multivariáveis

É um procedimento análogo ao executado para o projeto do controlador dado pelos seguintes passos:

Seja (A, C) observável. O projeto segue os seguintes procedimentos.

- i. Seja uma matriz F , tal que os autovalores de F sejam os desejados e $\lambda(F) \neq \lambda(A)$.
- ii. Seja \tilde{L} uma matriz qualquer tal que (F, \tilde{L}) sejam controlável.
- iii. Encontre P que satisfaça $PA - FP = LC$.
- iv. Se P é singular, escolha outro L caso contrário $L = P^{-1}\tilde{L}$

$$\lambda(F) = \lambda(A - LC)$$

Aplicação: Dado o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Autovalores desejados em malha fechada

$$s = -2 \text{ e } s = -3$$

$$\begin{aligned} \text{i) } F &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \text{ii) } \tilde{L} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$C = [\tilde{L} \quad F\tilde{L}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ controlável}$$

$$F\tilde{L} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii) } PA - FP = \tilde{L}C$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a = 2 \Rightarrow a = 2/5 \\ 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 6c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 4d = 2 \Rightarrow d = 1/2 \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv) } L = P^{-1}\tilde{L}$$

$$L = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(F) = \lambda(A - LC)$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

5.8 - Procedimento alternativo para análise das propriedades do sistema

O Gramiano de Controlabilidade $P = P^T$ e o Gramiano de Observabilidade $Q = Q^T$ podem ser calculados como solução das seguintes equações de Lyapunov.

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

$$A^TQ + QA + C^TC = 0$$

O sistema é controlável se a matriz P , solução da equação de Lyapunov, é definida positiva ($P > 0$). De modo análogo, o sistema é observável se Q é definida positiva, $Q > 0$.

6 - ALOCAÇÃO DE AUTO – ESTRUTURA

A Análise de Auto Estrutura (AAE) teve origem nos estudos dos fenômenos observados em cordas oscilantes e da condução do som pelo ar, em que se verificou a necessidade de lidar-se com vários modos e frequências que ocorrem nestes sistemas.

Breve Histórico:

Segundo Kailath (1980), a alocação de autovalores foi a primeira aplicação do método de espaço de estado em um sistemas lineares. Um trabalho de grande relevância foi desenvolvido por Wonham (1967), o qual estabelecia que os autovalores de malha fechada de qualquer sistema controlável podem ser arbitrariamente alocados através de realimentação de estado. Podem-se considerar os resultados apresentados por Moore (1976), como muito importantes no estudo da problemática da alocação completa de AE. Ele propõe em reconhecimento da liberdade oferecida, além das especificações de projeto, pela realimentação de estados em sistemas multivariáveis quando os autovalores são distintos; esta liberdade refere-se a escolha de auto- valores.

6.1 Resposta do sistema dinâmico:

Primeiramente, se expressa a equação de estado em termos de autovalores associados.

Dado o sistema linear invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Onde, $x \in IR^n$, $u \in IR^m$, $A \in IR^{n \times n}$ uma matriz que representa a dinâmica do sistema, $B \in IR^{n \times m}$ uma matriz que representa a ponderação do controle, $C \in IR^n$ uma matriz que representa a saída.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$L(\dot{x} = Ax + Bu)$$

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

Obtém-se a solução no domínio da frequência:

$$x(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}Bu(s)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$L^{-1}\{[sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}Bu(s)\}$$

$$L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}Bu(s)\}$$

sendo que,

$$L^{-1}[sI - A]^{-1} = e^{At}$$

Obtém-se a solução no domínio do tempo:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Substituindo essa equação em $y = Cx$ tem-se a saída do sistema dada por:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Como A é uma matriz que representa a dinâmica do sistema os espectros dos autovalores de $\sigma(A)$ é o conjunto das raízes da equação característica dada por:

$$Q(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Quando todos autovalores da matriz A no modelo espaço de estados são distintos, existe uma matriz modal T, tal que a igualdade $TA = AT$ é satisfeita. Dessa forma, obtém-se uma matriz diagonal Λ , de tal forma que os elementos da diagonal são os autovalores da matriz A, assim:

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

As colunas da matriz T são os autovetores v_i , que estão associados aos autovalores λ_i , e satisfazem a equação:

$$[\lambda I - A]v_i = 0$$

Aplicação: Seja a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1º passo:

Determinar os autovalores de A:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$\det = \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 4) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = 2$$

2º Passo:

Determinar os autovetores de A:

Para $\lambda_1 = 3$:

$$[\lambda I - A] \cdot v = 0$$

$$\left(3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2a - b = 0$$

$$2a = b \text{ ou } a = \frac{b}{2}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$ de modo análogo:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3º Passo:

Determinar a matriz de autovetores T e sua inversa T^{-1} :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4º Passo:

Encontrar a matriz diagonal:

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal, cujos elementos que compõe a diagonal são os autovalores 3 e 2 de A. Para voltar à matriz A, basta pré-multiplicar Λ por T e o pós-multiplicar por T^{-1} , obtendo-se:

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

Série de McLaurin de $f(x) = e^x$

A expansão é dada por:

$$f(x) = f(0) \cdot \frac{x^0}{0!} + \dot{f}(0) \frac{x^1}{1!} + \ddot{f}(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^n(0) \frac{x^n}{n!}$$

$$e(x) = e^0 \cdot \frac{x^0}{0!} + e^0 \frac{x^1}{1!} + e^0 \frac{x^2}{2!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Como na solução da equação de estados do sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x = x(0) \cdot e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B(\tau) d\tau$$

Segue que o termo e^{At} pode ser escrito através dos autovalores de A, ou seja

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

Para calcular exponencial de uma matriz através da expansão da série de McLaurin, basta considerar:

$$e^{At} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{At} = I + P\Lambda P^{-1} + \frac{(P\Lambda P^{-1})^2}{2!} + \frac{(P\Lambda P^{-1})^3}{3!}$$

$$e^{At} = I + P\Lambda P^{-1} + \frac{P\Lambda^2 P^{-1}}{2!} + \frac{P\Lambda^3 P^{-1}}{3!}$$

$$e^{At} = I + P\Lambda P^{-1} + \frac{P\Lambda^2 t^2 P^{-1}}{2!} + \frac{P\Lambda^3 t^3 P^{-1}}{3!}$$

$$e^{At} = P \left(I + \Lambda t + \frac{(\Lambda t)^2}{2!} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} \right) P^{-1}$$

Onde,

$$\left(I + \Lambda t + \frac{(\Lambda t)^2}{2!} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} \right) = e^{\Lambda t}$$

Portanto:

$$e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$$

Expandindo a equação obtém-se:

$$e^{At} = [v_1 v_2 \dots v_n]_{1 \times n} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_n^T \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = v_1 e^{\lambda_1 t} \omega_1^T + v_2 e^{\lambda_2 t} \omega_2^T + \dots + v_n e^{\lambda_n t} \omega_n^T$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} \omega_i^T$$

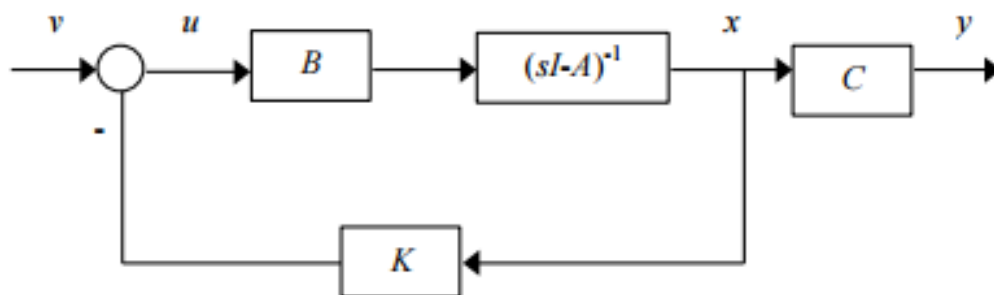
Sendo λ_i o i – ésimo autovalor do sistema, v_i a i – ésima coluna de T (i – ésimo autovalor à direita), e ω_i^T a i – ésima linha de T^{-1} (i – ésimo autovetor à esquerda).

6.2 Atribuição de Auto-Estrutura

Diferente do problema de posicionamento de polos, onde apenas os autovalores desejados são selecionados, a atribuição de uma auto-estrutura ao sistema realimentado atribui autovalores ao sistema em malha fechada.

Equacionar controladores associados a sistemas multivariáveis contínuos no tempo, resume-se a obtenção de um ganho K de realimentação, tal que o polinômio característico do sistema realimentado (como vemos na figura 8) tenha as raízes desejadas com parte real negativa. Dessa forma, a estabilidade do sistema é alcançada.

Figura 8: Representação de um sistema realimentado.



Fonte: Elaboração Própria

A existência do ganho K só é garantida se o par (A,B) for controlável, ou seja, se para qualquer estado inicial $x(0)$ e para qualquer estado final $x(1)$, existir uma entrada $u(t)$ que transfere o estado de $x(0)$ para $x(1)$ em tempo finito $t \in [0,1]$.

O problema é selecionar K de forma que o autovalor λ_1 e o autovetor v_i desejados sejam atribuídos ao sistema realimentado.

Alocação de Auto-Estrutura

Considere um sistema multivariável controlável e seja, $u = -kx$ realimentação de estados.

Substituindo na equação de estados segue que:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = Ax - Bkx$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

A realimentação, neste caso, tem por objetivo alocar o conjunto de autovalores e autovetores de forma a fornecer a resposta desejada.

$$\sigma(A - BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$v(A - BK) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Os autovalores e autovetores devem satisfazer

$$(A - BK)v = \lambda v$$

$$\lambda v - (A - BK)v = 0$$

$$\lambda v - Av + BKv = 0$$

$$[\lambda I - A]v + BKv = 0$$

$$[\lambda I - A \quad B] \begin{bmatrix} v \\ Kv \end{bmatrix}$$

Definindo $q = Kv$

$$[\lambda I - A \quad B] \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} = 0$$

Para satisfazer a equação, $\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}$ deve estar no espaço nulo de $[\lambda I - A \quad B]$.

Assim, se $q = Kv$

$$[q_1 \quad q_2 \quad q_n] = [K_{v1} \quad K_{v2} \quad \dots \quad K_n]$$

Para que q e v definidas de acordo com projeto proposto se $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$ a equação pode ser reescrita como

$$[\lambda_i - A \quad B] \begin{bmatrix} v_i \\ q_i \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_i v_i - A v_i + B q_i = 0$$

$$\Lambda V - AV + BQ = 0$$

que é denominada Equação de Sylvester.

Se λ e v são fornecidos, a equação possui Q somente de incógnita e $K=QV^{-1}$ pois ($q=Kv$).

Aplicação: Para que o sistema instável na forma de espaço de estados seguinte:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

Tenha os autovalores alocados em:

$$s = -2 \text{ e } s = -3 \text{ com } v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Segue que:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = KV$$

$$Q = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta V - Av + BQ = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} K_1 = 2 \\ K_2 = 1 \\ K_3 = 2 \\ K_4 = 4 \end{cases}$$

Assim o ganho realimentado que torna o sistema estável é:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

6.3 - Estabilizabilidade e Detectabilidade de Sistemas no Espaço de Estados

As propriedades de estabilizabilidade e detectabilidade são mais fracas se comparadas às de controlabilidade e observabilidade. Isto é, há sistemas não controláveis e/ou não observáveis que podem ser estabilizados via projeto.

Definição: O sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

É estabilizável se existe uma matriz K, tal que A-BK é estável, com u=-Kx.

Definição alternativa: O sistema é estabilizável quando os modos não controláveis são estáveis.

Definição: O sistema é detectável se existir um ganho L tal que A-LC é estável.

Definição Alternativa: O sistema é detectável se os modos não observáveis são estáveis.

Proposição: O par (A,B) é estabilizável se e só se (A^T, B^T) é detectável.

Definição: Se M e estável, então M^T é também.

Portanto,

$(A-BK)$ é estável.

$(A-BK)^T$ é estável.

$(A^T-K^TB^T)$ é estável.

6.3.1 - Decomposição canônica

Considere um sistema de dimensões n com $\text{posto}(C) = n_1 < n$ (não controlável) e forma a matriz

$$P^{-1} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{n-1} \ q_n]$$

cujas n_1 primeiras colunas são quaisquer n_i colunas linearmente independentes de C e as demais são escolhidas arbitrariamente.

A transformação de equivalência

$$\bar{x} = P^{-1} \cdot x$$

$$x = P \cdot \bar{x}$$

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1} \cdot \dot{x}$$

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1} \cdot (Ax + Bu)$$

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}Ax + P^{-1}Bu$$

$$\dot{\bar{x}} = P^{-1}AP \cdot \bar{x} + P^{-1}Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$y = C P \bar{x} + Du$$

decompõe o sistema na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{nc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\bar{C}_c \quad \bar{C}_{nc}] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix} + Du$$

$A_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ e $A_{nc} \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times (n-n_1)}$

Neste caso, basta analisar se os autovalores de A_{nc} têm parte real negativa para garantir que o sistema é estabilizável.

Considere-se um sistema de ordem n com posto $(\vartheta) = n_2 < n$ e forme a matriz $n \times n$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dot{P}_{n_2} \\ \dot{P}_n \end{bmatrix}$$

Cujas n_2 primeiras linhas são quaisquer n_2 linhas *l.i* de ϑ e as demais são escolhidas arbitrariamente, de modo que P seja não singular.

Então, toma-se $\bar{x} = P^{-1}x$ transforma o sistema em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{no} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{no} \end{bmatrix} u$$

$$y = [\bar{C}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{bmatrix} + Du$$

$A_o \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ e $A_{no} \in \mathbb{R}^{(n-n_2) \times (n-n_2)}$

Neste caso, basta analisar se os autovalores de A_{no} têm parte real negativa para garantir que o sistema é detectável.

7 SIMULAÇÃO DA ALOCAÇÃO DE AUTO – ESTRUTURA

Como descrito nos capítulos anteriores, os resultados desse projeto de controladores relacionam-se a determinação de um ganho de realimentação que estabiliza o sistema em malha fechada. Tais resultados são simulados no software Matlab®, a fim de mostrar o desempenho dos controladores obtidos.

Para visualizar tal projeto, um sistema instável na forma espaço de estados é proposto e o ganho é determinado via alocação de auto - estrutura, como segue.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

As raízes do sistema em malha aberta, $\emptyset\lambda = \lambda I - A$, são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, o que gera instabilidade. Objetivando alcançar a estabilidade, propõe-se que, em malha fechada, o sistema tenha os seus autovalores e autovetores alocados respectivamente em $s = -2$ e $s = -3$; com autovetores $v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ e $v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Assim, obtém-se:

Simulação 01:

Rotina Matlab:

```
% ANÁLISE DE AUTO ESTRUTURA
```

```
A = [0 1; 2 1];           %Sistema Original
B = [1 0; 0 1];
J = [-2 0; 0 -3];       %Matriz autovalores desejados
v1a=1; v1b= 0; v2a=0; v2b=1;
V = [ v1a v1b ; v2a v2b]; %Matriz autovetores desejados
```

```

syms k11 k12 k21 k22          %Cálculo da Matriz Ganho K realimentação
K = [k11 k12; k21 k22];
Q = K*V;
G = A*V-V*J-B*Q;             %Equação de Sylvester
[k11,k12,k21,k22] = solve (G);
K = [k11 k12; k21 k22]      %Resultados
Areal = A-B*K
eig(Areal)

```

```

Trial>> AutoEstrutura

```

```

K =
[ 2, 1]
[ 2, 4]
Areal =
[ -2,  0]
[  0, -3]
ans =
-3
-2

```

Aplicando a realimentação ao sistema obtém-se:

Simulação 02:

Rotina Matlab:

```
% PROGRAMA PARA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS NO MATLAB

clear all;

A = [0 1; 2 1]; %Sistema Original

B = [1 0; 0 1];

C = [1 0];

d = 0;

K = [2 1; 2 4]; %Matriz Ganho K de realimentação

Aa = [A-B*K]; %Matriz Dinâmica Realimentada

t = 0:0.01:5; %Tempo de simulação

u = [0*t; 0*t]; %Sinal de entrada nulo

x0 = [1 1]'; %Condições Iniciais

[Y1,X1] = lsim(A,B,C,d,u,t,x0); %Simula o sistema sem realimentação

[Y,X] = lsim(Aa,B,C,d,u,t,x0); %Simula o sistema com realimentação

figure;plot(t,Y1,'r','linewidth',2)

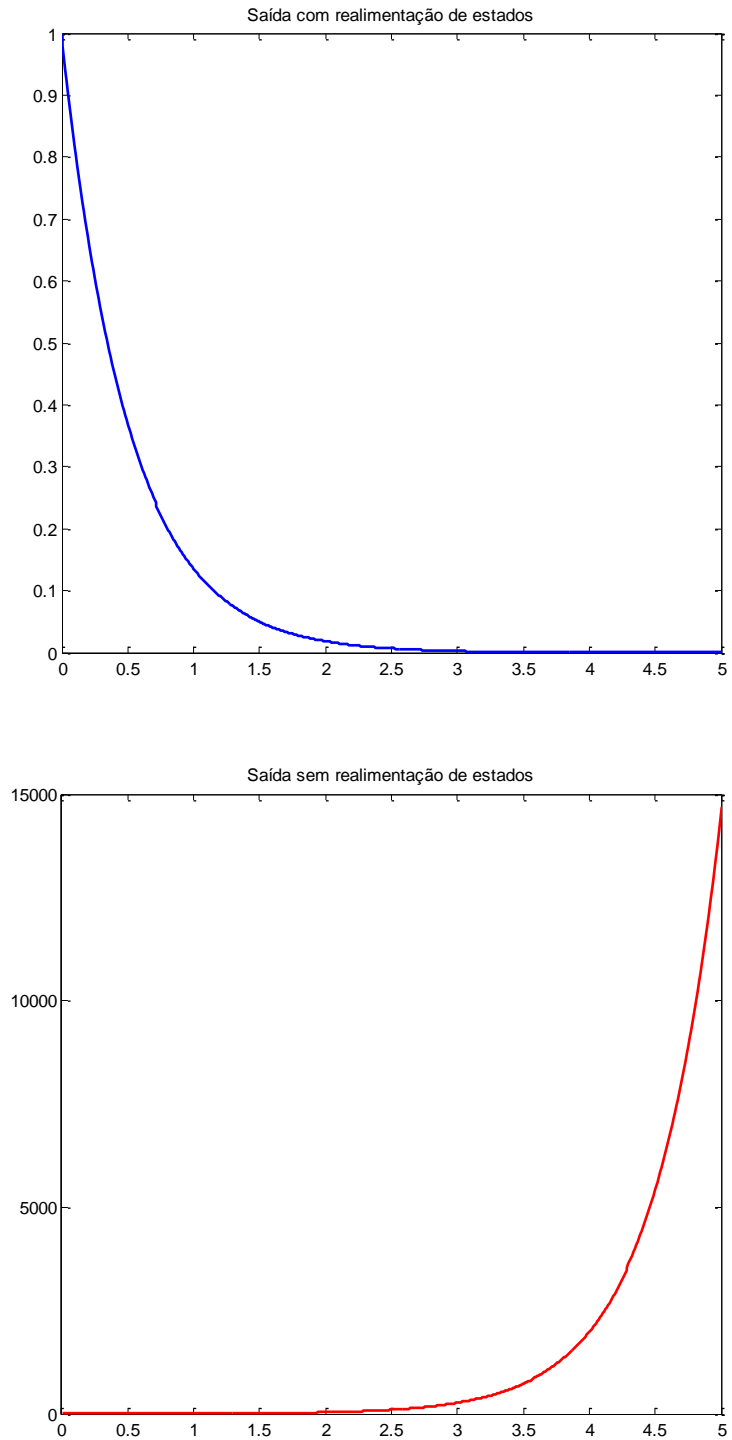
title('Saída sem realimentação de estados')

figure;plot(t,Y,'b','linewidth',2)

title('Saída com realimentação de estados')
```

e, portanto, cada variável de estado é multiplicada por um ganho e realimentada para o terminal de entrada, modificando -se assim, a dinâmica do sistema. Dessa forma os estados são estabilizados conforme observa-se na figura 9.

Figura 9: Gráficos de saída do sistema.



Fonte: Elaboração Própria

8 CONCLUSÃO:

No desenvolvimento do trabalho demonstrou-se a importância de determinar a estabilidade de sistemas Multivariáveis e que esta, como já era o esperado, não é uma tarefa fácil.

Discutiu-se primeiramente o Método de Lyapunov, conseguindo-se avaliar a estabilidade de um sistema qualitativamente, sem resolução das equações diferenciais, por meio dos projetos de controladores no espaço de estados. Esta técnica é amplamente difundida na literatura.

Posteriormente, por meio do estudo aprofundado sobre a técnica de alocação por Auto - Estrutura, demonstrou-se claramente as relações entre os autovalores e autovetores, condições iniciais e entrada na composição da resposta temporal do sistema. Verificou-se, pela simulação com auxílio do software Matlab®, que este método devidamente aplicado às técnicas de projeto de controladores no espaço de estados, apresenta resultados extremamente satisfatórios em termos de estabilidade e desempenho.

Dessa forma comprovou-se que este trabalho cumpriu seu objetivo quanto a proposta inicial, indo ao encontro a hipótese de que o método para projeto por análise de Auto-Estrutura é realmente tão eficiente no equacionamento de controladores para sistemas Multivariáveis quanto o método via equação de Lyapunov, além de alocar além dos autovalores ou autovetores desejados.

8.1 Sugestão para trabalhos futuros:

Como perspectivas futuras sugere-se a aplicação desses método de projeto de controladores para sistemas Multivariáveis utilizando alocação de Auto-Estrutura em sistemas práticos. Essa atitude visa contribuir tanto para os docentes quanto para os

discentes do curso de Engenharia de Automação Industrial do CEFET/MG no processo de ensino e aprendizagem, através da aplicabilidade dos conceitos teóricos.

9 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BISHOP, Robert H.; DORF, Richard C. **Sistemas de Controle Modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3. Ed. São Paulo: Harbra, 1986.

FERREIRA, Carlos C. T. **Alocação de Auto-Estrutura utilizando controle robusto LQG/LQR e computação evolutiva**. São Luis: UFM, 2004.

KAILATH, Thomas. **Linear Systems**. 1.ed. NJ: Prentice Hall, 1980.

MOORE, B. C. **On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed-Loop Eigenvalue Assignment**. Vol.AC-21. IEEE Transaction on Automatic Control, 1976.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

WONHAM, W. M. **On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear System**. Vol. AC-12. IEEE Transaction on Automatic Control, 1967.

MAIA, Renato D. **Análise de Estabilidade de Lyapunov**. Montes Claros: FACIT, 2012.

ARAÚJO, Fábio M. U. **Sistemas de Controle**. Natal: UFRN, 2007.