

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Sabrina Carneiro de Oliveira

**MODELOS NÃO LINEARES DE OTIMIZAÇÃO E APLICAÇÕES**

Araxá - MG

2015

**SABRINA CARNEIRO DE OLIVEIRA**

**MODELOS NÃO LINEARES DE OTIMIZAÇÃO E APLICAÇÕES**

Monografia de conclusão de curso apresentada ao Curso de Bacharelado em Engenharia de Automação Industrial do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito para a conclusão do curso.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup>(a) . Dra. Aline Fernanda Bianco

Araxá - MG

2015

Sabrina Carneiro de Oliveira

## **MODELOS NÃO LINEARES DE OTIMIZAÇÃO E APLICAÇÕES**

Monografia de conclusão de curso apresentada ao Curso de Bacharelado em Engenharia de Automação Industrial do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito para a conclusão do curso.

Data de aprovação: \_\_\_\_/ \_\_\_\_/ \_\_\_\_

Banca Examinadora:

---

Aline Fernanda Bianco – Doutora – CEFET-MG/Araxá - Orientadora

---

Alessandra Ribeiro da Silva – Mestre – CEFET-MG/Araxá

---

Aline Mara Oliveira – Especialista - Uniaraxá

Araxá - MG

2015

Dedico este trabalho a Deus que iluminou o meu caminho, dando-me coragem e força e ao meu filho Yuri por existir. Sua alegria e esperança me acompanharam sempre ao longo de minha jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter-me dado saúde e força para superar as dificuldades. Em especial agradecimento à minha orientadora e amiga, professora Dra. Aline Fernanda Bianco, pela orientação, confiança, paciência e incentivo, que tornaram possível a conclusão deste TCC.

A este Centro Educacional – CEFET-MG, pelo ambiente amigável e criativo que proporciona.

Ao corpo docente, direção e administração, especialmente ao nosso diretor Dr. Henrique Avelar, e sua esposa Iris pela amizade, confiança e por suas contribuições valiosas ao longo de meus estudos.

Aos meus amigos e colegas de classe, pela amizade, alegria e companheirismo.

Aos meus pais Lena e Paulo, aos meus irmãos Fabrício e Juninho, por sempre acreditarem em mim, dando-me carinho e apoio incondicional.

Ao meu filho Yuri pelo amor, compreensão e confiança que me fizeram sempre ir adiante.

Ao meu noivo Tiago, pelo companheirismo, solidariedade, carinho e apoio constantes.

Desejo apresentar meu carinhoso agradecimento à equipe da empresa DBR – Engenharia, com quem aprendi muito de prática e o dia a dia do trabalho.

A todos que fizeram parte da minha formação, meu muito obrigada!

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor,  
mas lutei para que o melhor fosse feito. Não  
sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não  
sou o que era antes” (Martim Luther King)

## RESUMO

Este projeto apresenta sistemas multivariáveis que necessitam de projetos de controle baseados em Métodos de Otimização Não Linear. Para isso, utilizaram-se equacionamentos obtidos a partir da aplicação de métodos não lineares, tais como: Multiplicadores de Lagrange, Funções Penalidade e Mínimos Quadrados. Estes métodos podem ser aplicados em modelos complexos, buscando a obtenção de um controle ótimo que, comparado aos controladores no espaço de estados, possuem uma resposta mais eficiente. Isso ocorre pelo fato de que sistemas em engenharia têm natureza complicada, devido, por exemplo, a má calibração de equipamentos, incerteza nos modelos etc.

**Palavras-chaves:** Modelos não Lineares de Otimização, equacionamento de controladores, espaço de estados, sistemas multivariáveis.

## ABSTRACT

This project presents multivariable systems that require control projects based on nonlinear optimization methods. For this purpose, balances obtained from the application of nonlinear methods, such as Lagrange multipliers, Penalty Functions and Least Squares were used. These methods can be applied to complex models, in order to obtain an optimal control that, compared to drivers in the state space, have a more efficient response. This happens due to the fact that engineering systems have a complicated nature due to, for example, poor equipment calibration, uncertainty in the models etc.

**Keywords:** Nonlinear optimization models, equating of controllers, state space, multivariable systems.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Exemplo de conjuntos convexos e não convexos.....	46
Figura 2: Exemplo de funções côncavas e Convexas.....	47
Figura 3: Exemplo de mínimos local e global.....	49
Figura 4: Convexidade e a derivada primeira. ....	52
Figura 5: Mínimo Global e mínimo Local. ....	54
Figura 6: Derivada no ponto .....	57
Figura 7: Função Quasiconvexa.....	61
Figura 8: Interpretação Geométrica do Problema .....	69
Figura 9: Sistema Teste .....	88
Figura 10: Gráficos obtidos com o programa: .....	113

## LISTA DE SIGLAS

<b>MIMO</b>	<b><i>Multiple Input, Multiple Output</i></b>
<b>SISO</b>	<b><i>Single Input, Single Output</i></b>
<b>LQ</b>	<b>Linear Quadrático</b>
<b>RLQ</b>	<b>Regulador Linear Quadrático</b>
<b>RLG</b>	<b>Regulador Linear Quadrático Gaussiano</b>
<b>MMQ</b>	<b>Método dos Mínimos Quadrados</b>
<b>s.a</b>	<b>Sujeito a</b>

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2. TEORIA DE CONTROLE MODERNO .....</b>	<b>15</b>
2.1 Introdução .....	15
2.2 Análise no espaço de estado .....	15
2.3 Representação no Espaço de Estados .....	16
2.4 Propriedades de sistemas em espaço de estados .....	18
2.4.1 Controlabilidade .....	18
2.4.2 Observabilidade .....	20
2.5 Projeto de controladores e observadores no espaço de estados .....	22
2.5.1 Método via Equação de Lyapunov .....	22
2.5.2 Projeto Observadores de Estados para Sistemas Multivariáveis .....	26
2.5.3 Decomposição Canônica .....	26
2.5.4 Atribuição de Auto Estrutura .....	39
<b>3. MODELOS NÃO LINEARES DE OTIMIZAÇÃO .....</b>	<b>44</b>
3.1 Positividade .....	44
3.2 Convexidade .....	46
3.2.1 Conjunto Convexo .....	46
3.2.2 Interpretação geométrica de funções convexas e côncavas .....	47
3.2.4 Continuidade de uma função convexa .....	48
3.2.5 Mínimos e Máximos de Funções Convexas .....	49
3.3 Continuidade .....	50
3.4 Funções Convexas Diferenciáveis .....	51
3.5 Modalidade .....	53
3.6 Condições de Otimalidade .....	53
3.6.1 Condições de Otimalidade sem Restrições .....	54
3.6.2 Condições Necessárias de Ótimo Irrestrito .....	55
3.6.3 Condição Suficiente de Ótimo Irrestrito .....	55
3.6.4 Otimização com Restrições de Igualdade .....	57
3.6.5 Representação do Plano Tangente .....	57

3.6.6 Sensibilidade.....	58
3.6.7 Otimização com Restrições de Desigualdade.....	59
3.7 Otimização Irrestrita.....	59
3.7.1 Métodos de Busca Unidimensional sem Utilizar Derivadas .....	60
3.7.2 Funções Quasiconvexas.....	60
3.7.3 Método da Busca Dicotômica .....	61
3.7.4 Método da Razão Áurea.....	61
3.7.5 Método de Busca de Fibonacci .....	62
3.8 Métodos de Busca Unidimensional sem Utilizar Derivadas .....	63
3.8.1 Método da Bisseção .....	63
3.8.2 Método de Newton .....	64
3.9 Busca Multidimensional .....	65
3.9.1 Método do Passo de Maior Descida (Método do Gradiente).....	65
3.9.2 Método de Newton .....	65
<b>4. MÉTODOS APLICADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR .....</b>	<b>67</b>
4.1 Otimização com Restrições de Igualdade.....	67
4.1.1 Multiplicadores de Lagrange.....	67
4.1.2 Interpretação Geométrica.....	68
4.2 Problema Geral de Controle Ótimo – Caso Contínuo.....	71
4.3 FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO.....	72
4.4 Condições Necessárias de Otimalidade: Formulário de solução para o problema genérico de controle ótimo. ....	73
4.5 Otimização Restrita com Restrições de Desigualdade .....	74
4.5.1 Funções Penalidade.....	74
<b>5 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO .....</b>	<b>93</b>
5.1 Controle Ótimo .....	93
5.2 Método dos Mínimos Quadrados .....	96
5.2.1 Propriedades sobre derivadas matriciais .....	97
5.3 Vantagens do índice desempenho quadrático .....	99
5.4 RLQ Para Horizonte De Tempo Infinito.....	99
5.5 RLQ Para Horizonte de Tempo Finito.....	106
5.6 Solução do problema de Regulador Linear Quadrático ótimo com o software Matlab® .....	109
<b>6. CONCLUSÃO .....</b>	<b>114</b>

<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>115</b>
---	------------

## 1 INTRODUÇÃO

Controle Multivariável é um ramo da teoria de controle que lida com representação do modelo da planta contendo várias entradas e saídas. Controladores projetados utilizando o controle multivariável, estão aptos a realizar projetos para sistemas mais complexos, considerando-se, por exemplo, a classe de controladores que garantem um bom desempenho mesmo na presença de perturbações paramétricas, denominado, controle robusto.

A robustez pode ser na presença de incertezas, na estabilidade ou no desempenho. O modelo de um processo é sempre inexato em relação ao sistema físico real devido à: mudanças de parâmetros, dinâmica não modelada, retardos não incluídos no modelo, mudanças de ponto de operação, ruídos no sensor, perturbações imprevisíveis.

Um objetivo recorrente em diversos problemas é a busca pela melhor solução, o que pode consumir muito tempo e recursos. Por isto, foram desenvolvidos vários modelos não lineares de otimização que aplicados ao equacionamento dos controladores facilitam esta tarefa. Os modelos não lineares de otimização são compostos de diversos métodos de soluções, tais como Multiplicadores de Lagrange, que são usados para transformar problemas de otimização sob-restrições em problemas irrestritos.

As restrições são adicionadas à função objetivo via um vetor de multiplicadores no primeiro método e via um parâmetro de penalidade de maneira a penalizar qualquer violação das restrições no Método das Funções Penalidade. Além destes há o método de Barreira, onde se soma termos à função objetivo que são insignificantes quando a variável a ser otimizada está no interior da região factível, mas se aproximam de infinito quando o ponto se aproxima da borda, e outros.

A partir desses modelos e métodos é possível equacionar controladores no modelo espaço de estados. A abordagem de espaço de estados consiste em determinar um conjunto de equações diferenciais arranjadas em formas matriciais que descrevem a dinâmica do sistema.

Já com respeito aos métodos de otimização não lineares, é necessário para um melhor entendimento o conhecimento e verificação de propriedades tais como

convexidade, dualidade, modalidade, dentre outras para garantia de existência de solução e unicidade, em determinados casos.

No entanto, um questionamento que existe é quais métodos resolvem essa classe de problemas de controle multivariável, garantindo a obtenção de um resultado ótimo, próximo ao esperado teoricamente.

Neste trabalho, o interesse é fazer o equacionamento dos controladores no espaço de estados, a partir dos métodos de multiplicadores de Lagrange, Funções Penalidade e Mínimos Quadrados.

Sequências de entradas de controle ótimas são obtidas no equacionamento de controladores, garantindo um bom desempenho mesmo com sistemas representados de maneira mais complexa.

Com a aplicação desses métodos não lineares para controle, espera-se obter um equacionamento adequado, o qual aplicado a um processo genérico garanta o melhor resultado possível em comparação a outros métodos existentes.

Para a simulação dos controladores obtidos será utilizado o software Matlab®. Tais simulações mostram a eficiência dos resultados e a viabilidade destas novas técnicas de projeto.

## **2. TEORIA DE CONTROLE MODERNO**

### **2.1 Introdução**

Neste capítulo será apresentado um estudo das propriedades e análise de sistemas no espaço de estados, através da sua representação, conceitos e critérios para verificação, tais como: estabilidade, controlabilidade e observabilidade.

Serão apresentadas técnicas de projetos de controladores no espaço de estados para sistemas multivariáveis via equação de Lyapunov e Análise de Auto Estrutura. Além disso, será mostrado como decompor canonicamente um sistema através de uma dada transformação de equivalência, o que garante viabilidade de projeto utilizando-se propriedades mais fracas dos sistemas, quais sejam, estabilizabilidade e detectabilidade.

### **2.2 Análise no espaço de estado**

Um sistema de controle moderno pode ter várias entradas e saídas, o que torna os sistemas complexos. Para analisar esses tipos de sistemas, é necessário reduzir a complexidade das expressões matemáticas e recorrer a computadores para o processamento na análise. A abordagem em espaço de estados é a mais apropriada para essa finalidade.

Conforme Ogata (2010,p.595), a teoria de controle moderno é baseada na descrição de um sistema de equações em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, as quais podem ser combinadas em uma equação vetorial – matricial de primeira ordem, simplificando a representação matemática do sistema de equações.

No projeto de sistemas de controle existem duas abordagens: a análise no domínio da frequência e a análise no domínio do tempo.

A análise no domínio da frequência, conforme Nise (2000,p.91), é baseada na transformação de uma equação diferencial em uma função de transferência, gerando um modelo matemático que relaciona a saída com a entrada do sistema de forma direta.

Uma desvantagem com relação a essa análise é que as aplicações são limitadas, ou seja, só podem ser usados sistemas lineares e invariantes no tempo ou



sistemas que podem ser aproximados a essas características. A vantagem dessa abordagem é que fornece informação rápida sobre estabilidade e reposta transitória.

A análise no domínio do tempo ou no espaço de estados constitui um método unificado de modelagem, análise e projeto de um grande número de sistemas. Essa abordagem pode ser usada para representar sistemas não lineares, dotados de folga, saturação e zona morta; podem manipular sistemas de condições iniciais não nulas e possuem sistemas com múltiplas entradas e/ou múltiplas saídas denominados multivariáveis.

### 2.3 Representação no Espaço de Estados

O *espaço de estados* é definido como o espaço  $n$ -dimensional no qual as componentes do vetor de estado representam os eixos coordenados. (D'AZZO e HOUPIS, 1984)

No modelamento em espaço há vários elementos que necessitam definições:

**Variável de sistema:** Qualquer variável que responda a uma entrada ou a condições iniciais em um sistema.

**Variáveis de estado:** é a menor quantidade de funções  $x(t)$  capaz de determinar o estado do sistema, sendo que os estados são variáveis calculadas no tempo em que o conhecimento de  $x$  em  $t_0(x(t_0))$  juntamente com a entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$  determina o comportamento do sistema para  $t \geq t_0$ .

**Vetor de estados:** é aquele composto pelas variáveis de estado e determina a dimensão do sistema.

**Espaço de estados:** é o espaço  $n$ -dimensional onde os eixos são as variáveis de estado.

**Equações de estados:** conjunto de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, com  $n$  variáveis que são as variáveis de estado.

**Equação de saída:** é a equação que expressa as variáveis de saída como combinações das variáveis de estado e das entradas.

Em um sistema contínuo no tempo, a equação de estados é definida por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

Se o sistema for discreto no tempo a equação torna-se:

$$x(K+1) = Ax(K) + Bu(K) \quad (2)$$

As matrizes A e B são tomadas constantes, o que garante que o sistema é invariante no tempo. Caso sejam compostas por funções, isto é,  $A = A(t)$  e  $B = B(t)$ , o sistema é dito variante no tempo.

No modelo espaço de estados, as equações variáveis de entrada são representadas por  $u(t)$ , as de saída são representadas por  $y(t)$  (ou  $z(t)$ ) e as de estados são representadas por  $x(t)$ .

Se o sistema tem uma entrada e uma saída, é chamado monovariável (do inglês SISO- *Single Input, Single Output*). Já se o sistema tem múltiplas entradas e /ou saídas, ele é dito multivariável (do inglês MIMO – *Multiple Input, Multiple Output*).

Descrição em equação de estados de um sistema com  $n$  estados e  $n_u$  entradas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

E a equação de saída é dada por:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4)$$

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : matriz de sistema

$B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ : matriz de entrada

$C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ : matriz de saída

$D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ : matriz de transmissão direta

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ : vetor de estado

$\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ : derivada do vetor de estados em relação ao tempo

$y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ : vetor resposta, ou seja, saída do sistema

$u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ : vetor de entrada ou de controle do sistema

Se  $n_u = n_y = 1$ , o sistema é monovariável.

Em geral, nos modelos conhecidos na literatura,  $D$  é tomada como sendo uma matriz nula. Esta representação fornece o conhecimento completo de todas as variáveis do sistema em qualquer instante de tempo  $t \geq t_0$ .

Os componentes do vetor de estados devem ser linearmente independentes e o número mínimo de variáveis de estados necessário é igual à ordem da equação diferencial que descreve o sistema. Outra forma de saber a que ordem o sistema pertence é contar o número de elementos armazenadores de energia independentes existentes no sistema. O número desses elementos é igual à ordem da equação diferencial e ao número de variáveis de estado.

## 2.4 Propriedades de sistemas em espaço de estados

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman e têm papel fundamental no projeto de sistemas de controle no espaço de estados. As condições de controlabilidade e observabilidade podem dizer sobre a existência de uma solução completa para o problema de projeto do sistema de controle. A solução poderá existir ou não. Portanto é necessário conhecer as condições nas quais o sistema é controlável e observável.

A seguir, serão determinadas as condições de controlabilidade e observabilidade.

### 2.4.1 Controlabilidade

Se for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um sistema de um valor inicial desejado para um estado final desejado, o sistema é dito controlável; em caso contrário, o sistema é não controlável. (NISE, 2002)

Considere as equações:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{6}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{7}$$

O par  $(A, B)$  referente ao sistema (6) é controlável se, para todo estado inicial  $x(t_0) = x_0$  e todo estado final  $x_1 = x_1(t_0)$ , existe uma entrada que leva  $x_0$  a  $x_1$  em  $t \in [t_0, t_1]$ .

Critério: O sistema é controlável se a matriz de controlabilidade  $\xi$  definida por:

$$\xi = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (8)$$

tiver posto linha pleno, ou seja, os vetores  $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$  devem ser linearmente independentes.

Segue dimensionamento:

$$\xi \in \mathbb{R}^{n \times n n_u}$$

$$\xi = [n \times n_u \quad n \times n_u \quad \dots \quad n \times n_u]_{n \times n n_u}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$$

$$AB \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$$

$$A^2B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$$

⋮

$$A^n B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$$

**Exemplo:** Dado o sistema abaixo, determinar se ele é controlável.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Aparentemente parece o sistema é não controlável por causa do zero no vetor B.

A matriz de controlabilidade é dada por:

$$\xi = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

O posto de  $\xi$  é igual ao número de linhas linearmente independentes. O posto pode ser determinado através da submatriz quadrada de maior ordem que seja não singular. O determinante de  $\xi = -1$ . Como o determinante é não nulo, a matriz 3x3 é não singular, e o posto de  $\xi$  é 3.

Conclui-se, então, que o sistema é controlável, uma vez que o posto de  $\xi$  é igual à ordem do sistema.

#### 2.4.2 Observabilidade

O sistema é observável se existe um instante  $t_1 > t_0$  tal que para qualquer condição inicial  $x(t_0)$  o conhecimento da entrada  $u[t_0, t_1]$  e  $y[t_0, t_1]$  é suficiente para determinar  $x(t_0)$ . Segundo Ogata (2010,p.623) o sistema será observável se cada transição de estado afetar cada elemento do vetor de saída.

Critério: se o sistema é observável, então a matriz de Observabilidade  $\varphi$  tem posto coluna pleno.

$$\varphi = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Dimensionamento:

$$\varphi \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} n_y \times n \\ n_y \times n \\ n_y \times n \\ n_y \times n \end{bmatrix}_{n \text{ vezes}}$$

$$C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$$

$$CA \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$$

$$CA^2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$$

$$\vdots$$

$$CA^{n-1} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$$

Determinante  $\varphi \neq 0$  é posto coluna pleno.

**Exemplo:** Determinar se o sistema é observável:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx$$

$$y = [0 \ 5 \ 1]x$$

A matriz de observabilidade  $\varphi$  é:

$$\varphi = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 5 \ 1]$$

$$CA = [0 \ 5 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [-4 \ -3 \ 3]$$

$$CA^2 = [0 \ 5 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = [-4 \ -3 \ 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [-12 \ -13 \ -9]$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \\ -12 & -13 & -9 \end{bmatrix}$$

Como o determinante de  $\varphi$  é igual a -344,  $\varphi$  tem posto total igual a 3.

Conclusão: O sistema é, portanto, observável.

Observação: Nem sempre a matriz de observabilidade será quadrada. Para estes casos, é necessário analisar o posto coluna, utilizando a mesma técnica realizada para a análise de controlabilidade, através da submatriz quadrada de maior ordem que seja não singular.

## 2.5 Projeto de controladores e observadores no espaço de estados

Existem vários tipos de projeto no modelo espaço de estados, quais sejam: alocação de polos em malha fechada, observadores de estados, regulador linear quadrático ótimo e sistemas de controle robusto, sendo que cada um destes se aplica a um determinado objetivo do projetista a partir da formulação do modelo.

O método alocação de polos é semelhante ao método lugar das raízes, porém nele alocam-se todos os polos em malha fechada nas posições desejadas, enquanto no método lugar das raízes alocam-se somente polos dominantes.

### 2.5.1 Método via Equação de Lyapunov

Segundo D'Azzo (1984) e Houpis (1984) esse método requer a determinação dos autovalores a partir das equações linearizadas em torno de um ponto de equilíbrio.

**Por exemplo:** Considere uma região  $\epsilon$  no espaço de estados envolvendo um ponto de equilíbrio  $x_0$ . Este ponto de equilíbrio será estável desde que exista uma região  $\delta(\epsilon)$  contida em  $\epsilon$ , tal que toda trajetória começando na região  $\delta$  não saia da região  $\epsilon$ . De acordo com essa definição não é necessário que a trajetória tenda para o ponto de equilíbrio. É necessário apenas que a trajetória permaneça no interior da região  $\epsilon$ , o que permite uma oscilação contínua em torno do ponto de equilíbrio.

Este método propõe uma forma mais simples para projetar uma realimentação de estados que posiciona autovalores do sistema em malha fechada.

Para o caso MIMO o projeto é mais complexo do que para o caso SISO e segue alguns procedimentos baseados na equação de Lyapunov:

- a) Verifica-se se o sistema é controlável.
- b) Seja  $\tilde{A}$  uma matriz com os autovalores desejados em malha fechada, onde não existem autovalores comuns entre  $A$  e  $\tilde{A}$ .
- c) Seja  $\tilde{K}$  uma matriz qualquer tal que  $(\tilde{A}, \tilde{K})$  é observável.
- d) Determina-se a matriz  $P$ , solução da equação de Lyapunov (10).

$$AP - P\tilde{A} = B\tilde{K} \quad (10)$$

- e) Se  $P$  é singular, ou seja, se e somente se seu determinante for nulo, seleciona-se outra matriz  $\tilde{K}$ . Caso contrário, temos que  $P$  é invertível, e portanto, faz-se  $K = \tilde{K}P^{-1}$ .
- f) As matrizes  $\tilde{A}$  e  $(A - BK)$  tem os mesmos autovalores.

**Exemplo:** Considere o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Determine o ganho  $K$  tal que os autovalores em malha fechada sejam  $s = -1$  e  $s = -2$ .

Neste exemplo segue que o dimensionamento do ganho de realimentação  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e, caso fosse requerida,  $G(s) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ , que é a matriz função de transferência associada ao sistema.

De acordo com os procedimentos acima, seguem os passos:

- a) Verificação da controlabilidade:



$$\xi = [B \quad AB]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linhas são linearmente independentes ou não são múltiplas. Portanto, o par  $(A, B)$  é controlável.

b)  $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observação:  $A$  e  $\tilde{A}$  não possuem autovalores comuns.

c)  $\tilde{K}$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}\tilde{A} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

As colunas são linearmente independentes. Portanto, o sistema é observável.

d)  $P$  e  $K$

$$AP - P\tilde{A} = B\tilde{K}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & -2b \\ -c & -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+a & b+2b \\ c+c & d+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 0 \therefore \text{Invertível}$$

e)  $K = \tilde{K}P^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

f)  $\tilde{A}$  e  $(A - BK)$  têm os mesmos autovalores:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A - BK$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, o ganho  $K = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  faz a alocação em malha fechada do sistema em  $s = -1$  e  $s = -2$ .

### 2.5.2 Projeto Observadores de Estados para Sistemas Multivariáveis

O procedimento é análogo ao desenvolvido para o controlador e segue os seguintes passos:

- a) Verifica-se a observabilidade do par  $(A, C)$ .
- b) Seleciona-se uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que os autovalores de  $F$  coincidam com os autovalores (polos) desejados em malha fechada:  $\lambda(A) \neq \lambda(F)$ .
- c) Seleciona-se uma matriz  $\tilde{L}$ , tal que  $(F, \tilde{L})$  seja controlável.
- d) Encontra-se  $P$  que satisfaça a equação (11).

$$PA - FP = LC \quad (11)$$

- e) Se  $P$  for não singular, seguem (12) e (13):

$$L = P^{-1}\tilde{L} \quad (12)$$

$$\lambda(A - LC) = \lambda(F) \quad (13)$$

### 2.5.3 Decomposição Canônica

Há casos em que, mesmo o sistema não sendo controlável, é possível determinar um ganho de realimentação  $K$ , tal que se  $u = -Kx$  (entrada realimentada), tem-se  $(A - BK)$  com os polos desejados. Para esse novo tipo de projeto, faz-se necessário enfraquecer as propriedades de controlabilidade e observabilidade, através da definição de duas novas análises, quais sejam, estabilizabilidade e detectabilidade.

Considere o sistema no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (15)$$

Tem-se que (14) e (15) é estabilizável se existir uma matriz  $K$ , tal que  $A - BK$  seja estável quando

$$u = -Kx \quad (16)$$

- O sistema é estabilizável quando os autovalores não controláveis são estáveis.

Já o sistema é detectável se existir um ganho  $L$  tal que  $A - LC$  seja estável.

- O sistema é detectável quando os modos não observáveis são estáveis.

**Proposição:** O par  $(A, B)$  é estabilizável, se e somente se,  $(A^T, B^T)$  for detectável. E  $(A, C)$  é detectável, se e somente se,  $(A^T, C^T)$  for estabilizável.

Um critério pra garantir a estabilidade é verificar que os autovalores de  $A$  têm parte real negativa.

**Demonstração:**

- Se  $(A, B)$  é estabilizável, então existe  $K$  tal que  $A - BK$  seja estável.
- Mas se  $A - BK$  é estável, então  $(A - BK)^T$  também o é.
- Assim:

$$(A - BK)^T = (A^T - (BK)^T)$$

$$(A - BK)^T = (A^T - K^T B^T)$$

- E, portanto, o par ordenado  $(A^T, B^T)$  é detectável.

Analogamente:

- Se  $(A, C)$  é detectável, então existe  $L$  tal que  $A - LC$  seja estável.
- Mas se  $A - LC$  é estável, então  $(A - LC)^T$  também o é.
- Então:

$$(A - LC)^T = (A^T - (LC)^T)$$

$$(A - LC)^T = (A^T - L^T C^T)$$

- Assim, o par ordenado  $(A^T, C^T)$  é estabilizável.

### 2.5.3.1 Decomposição do sistema na forma controlável/não controlável

Considere um sistema no espaço de estados não controlável. Este sistema tem de dimensão  $n$  e o posto da matriz de controlabilidade é dado por:

$$\text{posto}(\xi) = n_1 < n \quad (17)$$

Forme a matriz  $n \times m$ .

$$P^{-1} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_{n-1} \ q_n] \quad (18)$$

Cujas primeiras  $n_1$  colunas são quaisquer  $n_1$  colunas linearmente independentes de  $\xi$  e as demais são escolhidas arbitrariamente.

A transformação de equivalência é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Px \\ \dot{\bar{x}} &= P(Ax + Bu) \\ \dot{\bar{x}} &= PAP^{-1}\bar{x} + PBu \end{aligned} \quad (19)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} x &= P^{-1}\bar{x} \\ y &= Cx \\ \bar{y} &= CP^{-1}\bar{x} \end{aligned} \quad (20)$$

Assim, segue que:

$$\bar{A} = PAP^{-1} \quad (21)$$

$$\bar{B} = PB \quad (22)$$

$$\bar{C} = CP^{-1} \quad (23)$$

De forma equivalente, ao definir:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= P^{-1}x \\ \dot{\bar{x}} &= P^{-1}(Ax + Bu) \\ \dot{\bar{x}} &= P^{-1}APx + P^{-1}Bu \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ \bar{y} &= CP\bar{x} \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto,

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad (26)$$

$$\bar{B} = P^{-1}B \quad (27)$$

$$\bar{C} = CP \quad (28)$$

A partir da transformação, obtém-se a seguinte decomposição do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (29)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix}$$

Com:

$$\bar{A}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$$

$$\bar{A}_{nc} \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times (n-n_1)}$$

$$\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n-n_1)}$$

$$\bar{B}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times nu}$$

$$\bar{B}_{nc} \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times nu}$$

$$\bar{C}_c \in \mathbb{R}^{np \times n_1}$$

$$\bar{C}_{nc} \in \mathbb{R}^{np \times (n-n_1)}$$

Para transformar um sistema multivariável em um subsistema na forma decomposta controlável/não controlável devem-se seguir os passos abaixo:

1º passo: Montar a matriz de controlabilidade (8) e extrair  $n_1$ .

2º passo: Montar  $P^{-1}$ . Para definir P, usa-se colunas da matriz de controlabilidade e coloca-se para facilitar vetores pertencentes à base canônica.

3º passo: Fazer a transformação de equivalência.

4º passo: Decompor o sistema e tirar a parte controlável dele.

5º passo: Verificar a estabilidade da parte não controlável do sistema decomposto. Ou seja, para saber se é estabilizável basta olhar os polos do  $\bar{A}_{nc}$ .

Exemplo: Determine o subsistema controlável a partir de:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1]x$$

Passo 1: Montar  $\xi$  e extrair  $n_1$ .

$$\xi = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_1$$

$$n = 3$$

$$n_1 = 2$$

$$\text{posto}(\xi) = 2 < 3$$

Passo 2: Montar  $P^{-1}$ .

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L_3 = (-1).L_2 + L_3$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Passo 3:** Fazer a transformação de equivalência.

$$\bar{A} = PAP^{-1}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = PB$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u$$

$$\bar{u} = \bar{C}_c \bar{x}_c$$

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$\bar{y} = [1 \quad 2] \bar{x}_c$$

**Passo 4:** Verificar a estabilidade da parte não controlável:

$$\bar{A}_{NC} = 1 > 0$$

$$\det(sI - A_{NC}) = 0$$

$$\det(s - 1) = 0$$

$$s = 1$$

Portanto o sistema não é estabilizável.

### 2.5.3.2 Decomposição do sistema na forma observável/não observável

Considere o sistema de ordem  $n$  com posto da matriz de observabilidade:

$\text{posto}(\varphi) = n_2 < n$  e forme a matriz  $n \times m$ .

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (30)$$

Cujas primeiras  $n_2$  colunas são quaisquer  $n_2$  colunas linearmente independentes de  $\varphi$  e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que  $P^{-1}$  seja não singular.

A transformação de equivalência (19) e (20) transforma o sistema em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ A_{21} & \bar{A}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ \bar{x}_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{no} \end{bmatrix} u \quad (31)$$

$$\bar{y} = [\bar{C}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{bmatrix}$$

Com:

$$\bar{A}_o \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

$$\bar{A}_{no} \in \mathbb{R}^{(n-n_2) \times (n-n_2)}$$

**Exemplo 1:** Determine o subsistema observável a partir de:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1]x$$

A matriz de observabilidade é dada por:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que:

$$CA = [1 \quad 1 \quad 1]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = [1 \quad 3 \quad 1]_{1 \times 3}$$

$$CA^2 = [1 \quad 3 \quad 1]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = [1 \quad 5 \quad 1]_{1 \times 3}$$

Monta-se a matriz:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, obtém-se:

$$\bar{A} = P^{-1}AP$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = P^{-1}B$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP$$

$$\bar{C} = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]$$

### Decomposição canônica no Matlab®

Os cálculos feitos para o exemplo anterior podem facilmente ser implementados no software Matlab® com os seguintes comandos:

**%Definição das matrizes que compõe o modelo**

**A = [1 1 0;0 1 0;0 1 1]**

**B = [0 1;1 0;0 1]**

**C = [1 1 1]**

**%verificação da propriedade de observabilidade**

**Obs = obsv(A,C)**

**%posto da matriz de observabilidade**

**n2 = rank(Obs)**

`%definição da matriz de transformação de equivalência`

`Pmenos = [1 1 1;1 3 1;1 0 0]`

`det(Pmenos) %verificar se a matriz é invertível`

`P = inv(Pmenos)`

`%sistema equivalente`

`Ab = Pmenos*A*P`

`Bb = Pmenos*B`

`Cb = C*P`

`%parte observável do sistema`

`Ao = Ab(1,1)`

`Bo = Bb(1,[1 2])`

`Co = Cb(1,1)`

`printsys(Ao,Bo,Co,[0 0])`

`syms s`

`%função de transferência da parte observável e do sistema que devem ser iguais`

`Go = Co*inv(s*eye(1)-Ao)*Bo`

`simplify(Go)`

`G = C*inv(s*eye(3)-A)*B`

`simplify(G)`

%parte não controlável do sistema

Ano = Ab([2 3],[2 3])

%autovalores da parte não observável

eig(Ano)

Ab

Ao

Ano

%rotina para determinar se o sistema é detectável

if eig(Ano)<0

    'o sistema é detectável'

else

    'o sistema não é detectável'

End

-----

**Resposta obtida pelo programa:**

A =

```

1  1  0
0  1  0
0  1  1

```

B =

```

0  1
1  0
0  1

```

C =

```

1  1  1

```

Obs =

1	1	1
1	3	1
1	5	1

n2 =

2

Pmenos =

1	1	1
1	3	1
1	0	0

ans =

-2

P =

0	0	1.0000
-0.5000	0.5000	0
1.5000	-0.5000	-1.0000

Ab =

0	1.0000	0
-1.0000	2.0000	0
-0.5000	0.5000	1.0000

Bb =

1	2
3	2
0	1

Cb =

1	0	0
---	---	---

Ao =

0

Bo =

1 2

Co =

1

a =

	x1
x1	0

b =

	u1	u2
x1	1.00000	2.00000

c =

	x1
y1	1.00000

d =

	u1	u2
y1	0	0

Go =

[ 1/s, 2/s]

ans =

[ 1/s, 2/s]

G =

[ 1/(s - 1) + 2/(s - 1)^2, 2/(s - 1)]

ans =

$$[(s + 1)/(s - 1)^2, 2/(s - 1)]$$

Ano =

$$\begin{array}{cc} 2.0000 & 0 \\ 0.5000 & 1.0000 \end{array}$$

ans =

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Ab =

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1.0000 & 0 \\ -1.0000 & 2.0000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 1.0000 \end{array}$$

Ao =

$$0$$

Ano =

$$\begin{array}{cc} 2.0000 & 0 \\ 0.5000 & 1.0000 \end{array}$$

ans =

o sistema não é detectável

### 2.5.4 Atribuição de Auto Estrutura

A atribuição de auto estrutura do sistema realimentado pode atribuir autovetores além dos autovalores. Esta é uma técnica de projeto para sistemas multivariáveis alternativa à apresentada utilizando-se Equação de Lyapunov (Seção 2.5.1 deste capítulo) verificar a seção.



Os autovalores e autovetores são escalares e vetores que satisfazem, respectivamente, a equação:

$$\begin{aligned}\lambda v &= Av \\ \lambda v - Av &= 0 \\ (\lambda I - A)v &= 0\end{aligned}\tag{32}$$

para  $v \neq 0$ .

No problema de auto estrutura, o objetivo é selecionar o ganho K de forma que o autovalor  $\lambda_i$  e o autovetor associados  $v_i$  desejados sejam atribuídos ao sistema em malha fechada.

Quando os autovalores da matriz A no modelo espaço de estados são distintos é possível obter uma matriz diagonal  $\Lambda$  de tal forma que os autovalores da matriz A são os elementos da diagonal da matriz  $\Lambda$ , com:

$$\begin{aligned}\Lambda &= T^{-1}AT \\ T\Lambda &= AT\end{aligned}\tag{33}$$

Observação: Para se encontrar a matriz A pré multiplica-se a matriz diagonal por T e pós multiplica-se por  $T^{-1}$ .

$$A = T\Lambda T^{-1}\tag{34}$$

Sendo as colunas de T os autovetores  $v_i$  associados aos autovalores  $\lambda_i$ , ou seja,

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]\tag{35}$$

#### 2.5.4.1 Alocação de Auto Estrutura

Considere um sistema multivariável no espaço de estados controlável e observável, e defina a realimentação de estados  $u = -Kx$ . Nesta técnica o objetivo é alocar os conjuntos de autovalores e autovetores de forma a fornecer a resposta desejada.

$$\begin{aligned}\tau(A - BK) &= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \\ V(A - BK) &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}\end{aligned}\quad (36)$$

Os autovalores e autovetores do sistema realimentado devem satisfazer a equação (37).

$$\begin{aligned}(A - BK)v &= \lambda v \\ Av - BKv &= \lambda v \\ Av - \lambda v - BKv &= 0\end{aligned}\quad (37)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \underbrace{A - \lambda I}_{\text{relacionado ao polinômio característico}} & \vdots - B \end{array} \right] \begin{bmatrix} v \\ Kv \end{bmatrix} = 0 \quad (38)$$

Definindo  $Q = kv_i$ , obtém-se:

$$\left[ A - \lambda I \mid \vdots - B \right] \begin{bmatrix} v \\ q_i \end{bmatrix} = 0 \quad (39)$$

Se  $J$  é a matriz diagonal:

$$J = \text{diag}\{\lambda_i\} \quad (40)$$

Segue a equação de Sylvester dada por:

$$AV - VJ = BQ \quad (41)$$

### Análise de Auto Estrutura no Matlab®

**%Definição das matrizes do sistema**

**A = [0 1 0; 0 0 1; 2 -3 4];**

**B = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];**

**%Matriz diagonal com os autovalores desejados**

**J = [-4 0 0; 0 -5 0; 0 0 -6];**

**%montagem dos autovetores**

$v1a=1$ ;  $v1b=0$ ;  $v1c=0$ ;  $v2a=0$ ;  $v2b=1$ ;  $v2c=0$ ;  $v3a=0$ ;  $v3b=0$ ;  $v3c=1$ ;

$V = [v1a \ v1b \ v1c; v2a \ v2b \ v2c; v3a \ v3b \ v3c]$ ;

**%definição das variáveis simbólicas**

syms k11 k12 k13 k21 k22 k23 k31 k32 k33

**%definição do ganho de realimentação**

$K = [k11 \ k12 \ k13; k21 \ k22 \ k23; k31 \ k32 \ k33]$ ;

$Q = K*V$ ;

**%equação de Sylvester**

$G = A*V - V*J - B*Q$ ;

$[k11, k12, k13, k21, k22, k23, k31, k32, k33] = \text{solve}(G)$ ;

$K = [k11 \ k12 \ k13; k21 \ k22 \ k23; k31 \ k32 \ k33]$

**%matriz realimentada com  $u=-Kx$**

$A_{real} = A - B*K$

**%autovalores da matriz realimentada**

$\text{eig}(A_{real})$

**Resposta obtida pelo programa:**

$K =$

$[4, 1, 0]$

$[0, 5, 1]$

$[2, -3, 10]$

Areal =

$[-4, 0, 0]$

$[0, -5, 0]$

$[0, 0, -6]$

ans =

-6

-5

-4

### 3. MODELOS NÃO LINEARES DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados problemas pertencentes à classe de otimização não linear e as propriedades necessárias em suas resoluções. Tais propriedades como, por exemplo, a convexidade de um funcional quadrático garantem a existência e unicidade de solução do problema, sem a necessidade de cálculos adicionais.

#### 3.1 Positividade

Dada uma matriz  $A$  simétrica, segue que a forma quadrática  $Q_A(x) = x^T Ax$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$ , pode ser definida de quatro formas:

a) **Definida positiva**

Uma matriz é definida positiva se a forma quadrática

$$Q_A(x) = x^T Ax > 0, \forall x \neq 0. \quad (42)$$

O teste para que  $A$  seja definida positiva é a verificação de que todos os autovalores de  $A$  sejam positivos.

**Exemplo:**  $x \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$Q_A(x)$  é definida positiva?

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$x^T Ax = (2x_1 + x_2)x_1 + (x_1 + 2x_2)x_2$$

$$x^T Ax = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Autovalores de A:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$\phi(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\phi(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\lambda) = (\lambda - 2)^2 - 1$$

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1$$

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda' = \frac{4+2}{2} = 3 > 0$$

$$\lambda'' = \frac{4-2}{2} = 1 > 0$$

b) **Semidefinida positiva**

$$Q_A = x^T Ax \geq 0, \forall x \neq 0 \quad (43)$$

Todos os autovalores de A são não negativos.

c) **Definida negativa**

$$x^T Ax < 0 \quad (44)$$

Todos os autovalores de A são negativos

d) **Semidefinida negativa**

$$x^T Ax \leq 0 \quad (45)$$

Todos os autovalores de A são não positivos.

**Importante:** Caso a matriz tenha autovalores positivos e negativos, ela é chamada de indefinida.

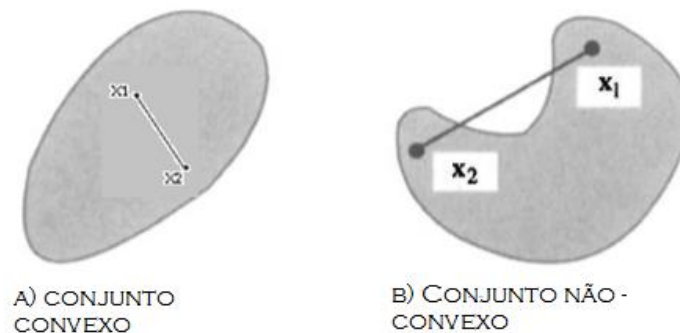
## 3.2 Convexidade

O conceito de convexidade é muito importante na teoria de otimização, porque com a hipótese de convexidade assumida, as condições necessárias de otimalidade passam a ser suficientes.

### 3.2.1 Conjunto Convexo

Seja  $\alpha \subset R^2$ ,  $\alpha$  é dito conjunto convexo se o segmento de reta que une dois pontos de  $\alpha$  está contido em  $\alpha$ , ou seja:

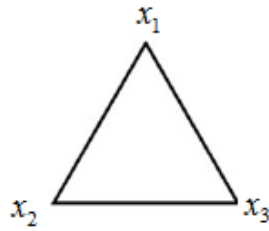
**Figura 1: Exemplo de conjuntos convexos e não convexos.**



**Fonte: BAZARAA et.al., 2006. p.41**

Seja  $C$  o conjunto de pontos obtidos com a combinação convexa dos pontos  $\{x_i\}$ . Então  $C$  é convexo.

### Exemplo:



$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

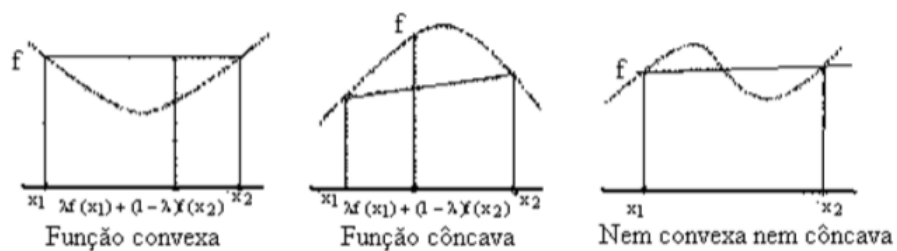
$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$$

Um conjunto é convexo se e somente se toda combinação convexa dos seus pontos pertence ao conjunto. A interseção de uma coleção arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo. A união dos conjuntos convexos, em geral, não é um conjunto convexo.

### 3.2.2 Interpretação geométrica de funções convexas e côncavas

Segundo BAZARAA et.al. (2006. p.98) Seja  $x_1$  e  $x_2$  dois pontos distintos no domínio de  $f$ , e considere o ponto  $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$  com  $\lambda \in (0,1)$ .  $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$  leva a um valor médio de  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , enquanto que  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$  fornece o valor de  $f$  no ponto  $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ . Portanto numa função convexa  $f$ , o valor de  $f$  em  $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$  é menor ou igual à altura da corda que liga os pontos  $[x_1, f(x_1)]$  e  $[x_2, f(x_2)]$ . Já numa função côncava, a corda está abaixo da função.

**Figura 2: Exemplo de funções côncavas e Convexas**





Fonte: BAZARAA et.al., 2006. p.99

Função côncava: único máximo

Função convexa: único mínimo

Pode-se definir a convexidade através da matriz Hessiana.

### 3.2.3 Matriz Hessiana

Dada uma função real de várias variáveis,  $f: R^n \rightarrow R$ , a matriz jacobiana (derivada) do gradiente (que é função vetorial) é denominada de matriz hessiana de  $f$ .

Assim,

$$Hf(x_1, \dots, x_n) = J \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (46)$$

A matriz hessiana sempre é uma matriz quadrada. O seu determinante é denominado de função hessiana e não pode ser confundido com a matriz hessiana.

Estudo da Hessiana:

- 1) Se  $H$  é definida positiva ( $H > 0$ ),  $f(x)$  é estritamente convexa e a solução global é única para o problema de minimização.
- 2) Se  $H$  é semidefinida positiva ( $H \geq 0$ ),  $f(x)$  é convexa e a solução global é única para o problema de minimização.
- 3) Se  $H$  é definida negativa ( $H < 0$ ),  $f(x)$  é estritamente côncava e a solução global é única para o problema de maximização.
- 4) Se  $H$  é semidefinida negativa ( $H \leq 0$ ),  $f(x)$  é côncava e a solução global é única para o problema de maximização.
- 5) Se  $H$  for indefinida, ela não é côncava, nem convexa, portanto não pode afirmar nada sobre a solução do problema de maximização e minimização.

### 3.2.4 Continuidade de uma função convexa

Se  $S$  é um conjunto convexo não vazio em  $E_n$  e seja  $f: S \rightarrow E_1$  convexo. Então  $f$  é contínuo no interior de  $S$ .

### 3.2.5 Mínimos e Máximos de Funções Convexas

Maximizar uma função côncava é similar a minimizar uma função convexa. O desenvolvimento será feito em cima da minimização de uma função convexa.

Seja:

$$f: E_n \rightarrow E_1$$

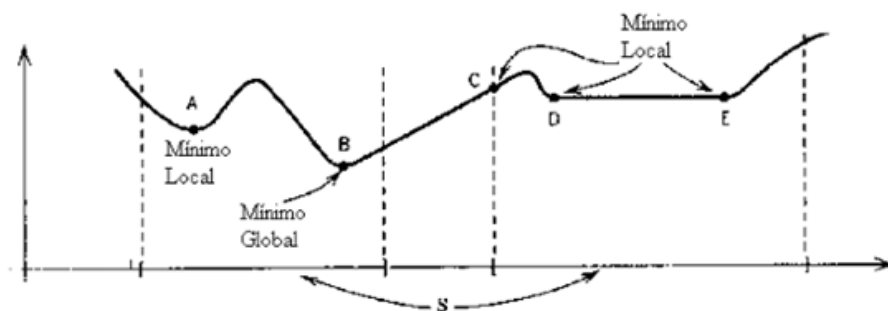
Considerar o problema de minimizar  $f(x)$  sujeito à  $x \in S$ . Um ponto  $x \in S$  é chamado um ponto factível do problema. Se  $\bar{x} \in S$  e  $f(x) \geq f(\bar{x})$  para todo  $x \in S$ , então  $\bar{x}$  é chamado de solução ótima, uma solução ótima global, ou simplesmente a solução do problema. Se  $\bar{x} \in S$  e se existir um número em torno de  $x$  tal que  $f(x) \geq f(\bar{x})$  para todo  $x \in S \cap \text{numero}(\bar{x})$ , então  $\bar{x}$  é chamado de solução ótima local.

Similar a isso se tem  $\bar{x} \in S$  e  $f(x) \geq f(\bar{x})$  para todo, para um  $\text{numero} > 0$ , então  $\bar{x}$  é chamado de uma solução ótima local estrita.

Por outro lado, se  $\bar{x} \in S$  é o único mínimo local  $S \cap \text{numero}(\bar{x})$ , para um  $\text{numero}(\bar{x})$  em torno de  $\bar{x}$ , então  $\bar{x}$  é chamado de uma solução ótima local isolada ou “strong”.

A Figura 3 ilustra exemplos de mínimos local e global para um problema de Minimização.

**Figura 3: Exemplo de mínimos local e global.**



Fonte: BAZARAA et.al., 2006. p.124

De acordo com BAZARAA et.al. (2006.p.125), seja  $S$  um conjunto convexo não vazio em  $E_n$ , e seja  $f : S \rightarrow E_1$  convexa em  $S$ .

A) Considere o problema de minimizar  $f(x)$  sujeito a  $\bar{x} \in S$ . Suponha que  $\bar{x} \in S$  seja uma solução ótima local do problema.

1. Então  $\bar{x}$  é uma solução ótima global.

2. Se  $\bar{x}$  é um mínimo local estrito, ou se  $f$  é estritamente convexa, então  $\bar{x}$  é a única solução global ótima, é também um mínimo local isolado.

B) Considere o problema de minimizar  $f(x)$  sujeito a  $\bar{x} \in S$  onde  $f$  é convexa e possui derivada de segunda ordem,  $S$  é um conjunto convexo, e suponha que exista uma solução ótima  $\bar{x}$ . Então o conjunto de soluções ótimas alternativas é caracterizado pelo conjunto:

$$S^* = \{x \in S : \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) \leq 0 \text{ e } \nabla f(x) = \nabla f(\bar{x})\} \quad (47)$$

➤ O conjunto  $S^*$  de soluções ótimas alternativas pode equivalentemente ser como:

$$S^* = \{x \in S : \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) = 0 \text{ e } \nabla f(x) = \nabla f(\bar{x})\} \quad (48)$$

➤ Suponha que  $f$  seja uma função quadrática dada  $f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t H x$  e que  $S$  seja um poliedro. Então,  $S^*$  é um conjunto poliedro dado por:

$$S^* = \{x \in S : c^t(x - \bar{x}) \leq 0, H(x - \bar{x}) = 0\} = \{x \in S : c^t(x - \bar{x}) = 0, H(x - \bar{x}) = 0\} \quad (49)$$

### 3.3 Continuidade

Em problemas de otimização, o ideal é que as funções e suas derivadas sejam contínuas, pois se não forem continuamente diferenciáveis, métodos que se utilizam de derivadas não podem ser empregados, uma vez que a derivada não é definida nos pontos de descontinuidade.

Uma função  $f$  é contínua em  $x_0$  se:

$f(x_0)$  existir

$\lim f(x)$  existir

$\lim f(x) = f(x_0)$

$x \rightarrow x_0$

Já uma função de  $n$  variáveis é contínua em

$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  se existir.

### 3.4 Funções Convexas Diferenciáveis

Segundo BAZARAA et.al.(2006, p.111):

1) Seja  $S$  um conjunto não vazio em  $E_n$ , e seja  $f: S \rightarrow E_1$ . Então  $f$  é dita diferenciável em  $\bar{x} \in \text{int } S$  se existe um vetor  $\nabla f(\bar{x})$ , chamado de vetor gradiente, e uma função  $\alpha: E_n \rightarrow E_1$  tal que:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}), \text{ para todo } \bar{x} \in S \quad (50)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$ . A função  $f$  é dita diferenciável no conjunto aberto  $S' \subseteq S$  se ela é diferenciável em todos os pontos de  $S'$ .

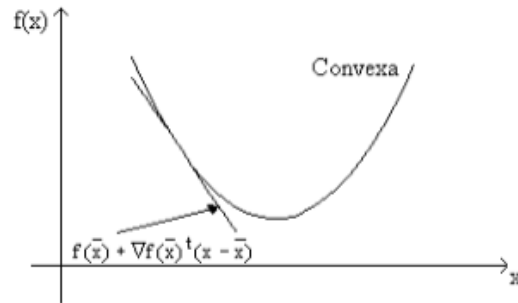
2) Seja  $S$  um conjunto convexo aberto e não vazio  $E_n$ , e seja  $f: S \rightarrow E_1$  diferenciável em  $S$ . Então  $f$  é convexa se e somente se para todo  $\bar{x} \in S$ , tenha-se:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}), \text{ para todo } x \in S. \quad (51)$$

Similarmente,  $f$  é estritamente convexa se e somente se para todo  $\bar{x} \in S$ , tenha-se:

$$f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}), \text{ para todo } x \in S \quad (52)$$

**Figura 4: Convexidade e a derivada primeira.**



**Fonte: Elaboração Própria**

O resultado acima conduz para uma importante observação. Se há um problema de otimização para minimizar  $f(x)$  sujeito a  $x \in X$ , onde  $f$  é uma função convexa, então, dado qualquer ponto  $\bar{x}$ , a função afim  $f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x})$  direciona  $f$  para o mínimo. Conseqüentemente, o mínimo de  $f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x})$  sobre  $X$  (ou sobre uma relação de  $X$ ) realiza o menor percurso em busca do ponto de ótimo dando a otimização do problema.

1) Seja  $S$  um conjunto convexo aberto e não vazio  $E_n$ , e seja  $f: S \rightarrow E_1$  diferenciável em  $S$ . Então  $f$  é convexo se e somente se para todo  $x_1, x_2 \in S$ , tenha-se:

$$[\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)]^t \cdot (x_2 - x_1) \geq 0 \quad (53)$$

Similarmente,  $f$  é estritamente convexa se e somente se para todo  $x_1, x_2 \in S$ , tenha-se:

$$[\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)]^t \cdot (x_2 - x_1) > 0 \quad (54)$$

### 3.5 Modalidade

Quando possível, uma função a ser minimizada ou maximizada deve ser unimodal, pois funções unimodais possuem um único extremo que é simultaneamente local e global.

Já as funções multimodais apresentam vários extremos locais, sendo que apenas um deles é o global.

### 3.6 Condições de Otimalidade

#### Definições preliminares

Considere o problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min f(x) & & (55) \\ x \in R^n \\ \text{sujeito à} \\ c_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

O termo  $\min f(x)$  é chamado de função objetivo e estabelece o critério de otimalidade (neste caso é uma minimização).

As restrições  $c_i(x) = 0$  são aquelas que o problema deve satisfazer.

Como  $i$  varia de 1 a  $m$ , segue que, neste caso há  $m$  restrições.

**Definição:** Se um ponto  $x^*$  satisfaz todas as restrições do problema, então ele é dito factível.

A região:

$R^f = \{x \in R^n / C_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}$  é denominada região factível e é o conjunto de todos os pontos factíveis.

### Problema Geral:

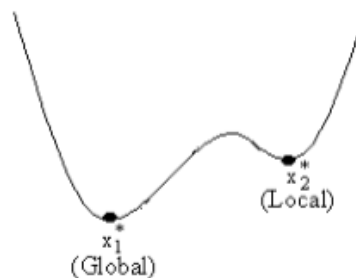
$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 & \text{s.a } h(x) = 0 \\
 & \quad g(x) \leq 0 \\
 & \quad x \in \alpha \\
 & f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\
 & h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \\
 & g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_p)
 \end{aligned} \tag{56}$$

- $h(x) = 0$  e  $g(x) \leq 0$  são restrições funcionais;  $x \in \alpha$  é uma restrição de conjunto. Se  $x$  satisfaz todas as restrições, então  $x$  é factível.
- Uma restrição  $g_i(x) \leq 0$  está ativa num ponto factível  $x$  se  $g_i(x) = 0$  e inativa se  $g_i(x) < 0$ .
- Direções factíveis, assim como as condições de otimalidade (local e global) do problema, são determinadas unicamente pelas restrições ativas.
- Condições para problemas com restrições de igualdade  $h(x) = 0$  são fundamentais.

#### 3.6.1 Condições de Otimalidade sem Restrições

Seja uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Um ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , é chamado mínimo local se existe um escalar  $\delta > 0 / f(x^*) \leq f(x) \forall \|x - x^*\| < \delta$ , e é chamado de mínimo global, se  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Figura 5: Mínimo Global e mínimo Local.**



**Fonte: Elaboração Própria**

### 3.6.2 Condições Necessárias de Ótimo Irrestrito

As condições necessárias para que  $x^*$  seja mínimo local da função  $f(x) \in C^2$  são:

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= 0 \\ d^T H(x^*) d &\geq 0, \forall d \in R^n\end{aligned}\tag{57}$$

### 3.6.3 Condição Suficiente de Ótimo Irrestrito

As condições suficientes para que  $x^*$  seja mínimo local da função  $f(x) \in C^2$ , são:

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= 0 \\ d^T H(x^*) d &> 0, \forall d \in R^n \mid d \neq 0\end{aligned}\tag{58}$$

Nota1: A condição de suficiência assegura mínimo local restrito  $f(x) > f(x^*)$ ,  $x$  em uma vizinhança.

Nota 2: Para máximos locais, basta inverter as desigualdades nas condições necessárias e suficientes.

#### **Exemplo 1:**

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_2$$

- 1ª Condição (Necessária):  $\nabla f(x_1, x_2) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\therefore x_1^* = 1, x_2^* = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

- 2ª Condição:  $H(f) > 0$



$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

$$a = 2 > 0; d = 2 > 0; ad - bc = 3 > 0$$

Do teorema de Sylvester tem-se que todos os menores determinantes da matriz H são positivos (matriz definida positiva).

$$\det H_{(1,1)} = 2 > 0$$

$$\det H_{(2,2)} = 3 > 0$$

Logo  $x_1^* = 1, x_2^* = 2$  é ponto de mínimo global restrito

### **Exemplo 2:**

Seja  $f(x) = x^T Ax + b^T x$ , onde a Hessiana de  $f(x)$  é:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Qual a condição de mínimo de  $f(x)$ ?

Pelo Teorema de Sylvester:

$$A_1 = 6 > 0$$

$$A_2 = 11 > 0 \quad \therefore \text{definida positiva}$$

$$A_3 = 48 - 2 - 4 = 42 > 0$$

$$\min x^T Ax + b^T x \Leftrightarrow (Ax^2 + bx)$$

Condição necessária:  $\nabla f(x^*) = 0$

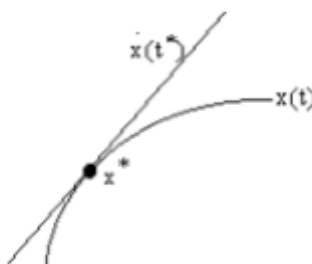
$$2Ax + b = 0 \Rightarrow x^* = \frac{1}{2} A^{-1}b$$

A matriz A sendo definida positiva garante que A é não singular.

### 3.6.4 Otimização com Restrições de Igualdade

Um conjunto com restrições de igualdade  $h(x) = 0$  define um subconjunto  $\mathfrak{R}^n$  chamado de hipersuperfície. O plano tangente à hipersuperfície  $S$  no ponto  $x^* \in S$  é definido como a coleção das derivadas de todas as curvas diferenciáveis que estão na hipersuperfície  $S$  e passem por  $x^*$ , isto é,  $x(t^*)$  onde  $t$  é tal que  $x(t^*) = x^*$ .

**Figura 6: Derivada no ponto**



**Fonte: Elaboração Própria**

### 3.6.5 Representação do Plano Tangente

Um ponto  $x^*$  satisfazendo as restrições  $h(x) = 0$  é chamado ponto regular (ponto candidato a ótimo) das restrições se os vetores gradientes  $\nabla h_1(x^*), \nabla h_2(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ , forem linearmente independentes.

Em um ponto regular  $x^*$  da hipersuperfície definida por  $h(x) = 0$  o plano tangente é dado por:

$$M = \{y / \nabla^T h(x^*)y = 0\} \quad (59)$$

$$\nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x^*) \\ \vdots \\ \nabla h_m(x^*) \end{bmatrix}$$

➤ Seja  $x^*$  um ponto regular das restrições  $h(x) = 0$  e um ponto extremo local (mínimo ou máximo) de  $f(x)$  sujeito a essa restrição. Então  $\forall y \in R^n$  satisfazendo

$\nabla h(x^*)y=0$  (gradiente das restrições) deve também satisfazer  $\nabla f(x^*)y=0$  (gradiente da função objetivo). Ou seja,  $\nabla h(x^*)$  é ortogonal ao plano tangente.

➤ Seja  $x^*$  um ponto regular das restrições  $h(x)=0$  e um ponto extremo local (mínimo ou máximo) de  $f(x)$  sujeito à restrição  $h(x)=0$ . Então existe um vetor  $\lambda \in R^n / \nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0$ . Onde  $\lambda$  é o vetor dos Multiplicadores de Lagrange (ver Capítulo 4)

### 3.6.6 Sensibilidade

$$\text{problema}(P) \begin{cases} \min f(x) = 0 \\ \text{sujeito a } h(x) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Onde:

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix} \quad (61)$$

Sejam  $f, h_i \in C^2$  e considere a família de problemas

$$\text{problema perturbado}(PP) \begin{cases} \min f(x) = 0 \\ \text{sujeito a } h(x) = c \end{cases} \quad (62)$$

Suponha que para  $c=0$  haja uma solução  $x^*$  que é ponto regular e que juntamente com o vetor multiplicador de Lagrange associado  $\lambda^{*T}$  satisfaz a condição de suficiência de 2º ordem. Então para qualquer  $c \in R^n$ , existe uma região contendo o zero e  $\exists$  uma função  $x^*(c)$  contínua em  $c / x^*(c)$  é mínimo local de (PP). Além disso:

$$\nabla_c f(x^*(c))|_{c=0} = -\lambda^{*T} \quad (63)$$

### 3.6.7 Otimização com Restrições de Desigualdade

Seja:

$$(P) \begin{cases} \min f(x) & x \in R^n \\ \text{sujeito a } g_i(x) \leq 0 & f_i, g_i \in C^1 \quad i = 1, 2, 3, L, n \end{cases} \quad (64)$$

#### 3.6.7.1 Restrições Ativas

Seja  $x^*$  uma solução factível de (P). Uma restrição  $g_i(x)$  é ativa em  $x^*$  se  $g_i(x^*) = 0$ . O conjunto dos índices das restrições ativas em  $x^*$  é representado por:

$$I(x^*) = \{i / g_i(x^*) = 0\} \quad (65)$$

### 3.7 Otimização Irrestrita

A busca unidimensional é muito importante em inúmeros algoritmos de solução para problemas de programação não linear. Muitos dos algoritmos de programação não linear seguem os seguintes passos:

1- Dado um ponto  $x_k$ , encontre a direção  $d_k$  e o passo  $\alpha_k$  de tamanho adequado, proporcionando um novo ponto  $x_{k+1}$ .

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (66)$$

2- O processo é repetido até encontrar a solução ótima do sistema.

O processo é repetido até se encontrar a solução ótima do problema. Portanto pode-se dizer que a busca do tamanho do passo  $\alpha_k$  torna-se um subproblema de minimizar  $f(x_k + \alpha d_k)$ , que é um problema de busca unidimensional em relação a variável  $\alpha$ . A minimização pode ser para todo  $\alpha \in R, \alpha > 0$  ou obedecendo a restrições como a de que  $x_k + \alpha_k d_k$  seja factível.

Observando o problema  $\theta(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ , pode-se verificar a possibilidade de se encontrar o mínimo através das técnicas de derivação e fazer  $\theta'(\alpha) = 0$ . Mas sabe-se que existem problemas em que  $f$  não é diferenciável. Outra questão a observar é que não se pode assegurar que  $\alpha$  satisfazendo  $\theta'(\alpha) = 0$  é um mínimo, o mesmo pode ser um ponto de máximo ou de inflexão. Por razões como estas se evita minimizar  $\theta$  aplicando técnicas de derivação, salvo casos especiais. O que nos faz é recorrer a técnicas numéricas de minimização da função  $\theta$ .

### 3.7.1 Métodos de Busca Unidimensional sem Utilizar Derivadas

Seja:

$$\min_{x \in R} f(x) \quad (67)$$

E  $f(x)$  tem um mínimo no intervalo  $[a^0, b^0]$ . O problema de busca unidimensional é desenvolver algoritmos para encontrar  $x^*$  tal que na  $n$ -ésima iteração tenha-se reduzido o intervalo  $[a^n, b^n]$  contendo  $x^*$ . O intervalo  $[a, b]$  é chamado de intervalo de incerteza.

### 3.7.2 Funções Quasiconvexas

Seja:

$$f : S \rightarrow E_1$$

Onde  $S$  é um conjunto convexo não vazio em  $E_n$ . Segundo Bazaraa et.al.(2006, p.135). A função  $S$  é dita quasiconvexa se, para todo  $x_1$  e  $x_2 \in S$ , a desigualdade (68) torna-se verdadeira:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \text{máximo}\{f(x_1), f(x_2)\} \text{ para todo } \lambda \in (0,1) \quad (68)$$

**Figura 7: Função Quasiconvexa**



Fonte: Bazaraa et.al.(2006, p.135)

### 3.7.3 Método da Busca Dicotômica

#### Algoritmo:

Minimização de uma função estritamente quasiconvexa  $\theta$  dentro do intervalo  $[a_1, b_1]$ .

#### **Passo de Inicialização**

1. Escolha  $\varepsilon > 0$  o valor da tolerância  $\eta > 0$ , e o intervalo de incertezas inicial  $[a_1, b_1]$ . Inicializar o contador de iterações,  $K = 1$  e em seguida ir para o passo principal.

#### **Passo Principal**

1- Se  $b_k - a_k < \eta$ , então pare; o mínimo foi alcançado. Caso contrário encontre o valor de  $\lambda_k$  e  $\mu_k$ , como definido em (69) e vá para o passo 2.

$$\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon \quad (69)$$

$$\mu_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$$

2- Se  $\theta(\lambda_k) < \theta(\mu_k)$ , então  $a_{k+1} = a_k$  e  $b_{k+1} = \mu_k$ . Caso contrário  $a_{k+1} = \lambda_k$  e  $b_{k+1} = b_k$ . Atualizar  $K = K + 1$  e retornar ao passo 1.

### 3.7.4 Método da Razão Áurea

Algoritmo:

Minimização de uma função estritamente quasiconvexa  $\theta$  dentro do intervalo  $[a_1, b_1]$ .

**Passo de Inicialização**

1. Escolha o valor de  $\varepsilon > 0$ , a tolerância  $\eta > 0$ , e o intervalo de incertezas inicial  $[a_1, b_1]$ . Encontrar os valores de  $\lambda_1 = a_1 + (1-\alpha)(b_1 - a_1)$  e  $\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$ . Calcular  $\theta(\lambda_1)$  e  $\theta(\mu_1)$ . Inicializar o contador de interações,  $K = 1$  e em seguida ir para o passo principal.

**Passo Principal**

1. Se  $b_k - a_k < \eta$ , então pare; o mínimo foi alcançado. Caso contrário, se  $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ , vá para o passo 2; e se  $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ , vá para o passo 3.

$$2. \quad a_{k+1} = \lambda_k, \quad b_{k+1} = b_k \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \mu_k, \quad \mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$$

$$3. \quad a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = \mu_k \quad \text{e} \quad \mu_{k+1} = \lambda_k, \quad \lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$$

**3.7.5 Método de Busca de Fibonacci**

De acordo com BAZARAA et.al.(2006. p.351), o método de Fibonacci é um procedimento de busca linear para minimização de funções estritamente quasiconvexa sobre um intervalo fechado  $[a, b]$ . Similar ao método da razão áurea, o método de Fibonacci precisa calcular o valor da função em dois pontos na primeira iteração e apenas um nas iterações subsequentes. A diferença do método de Fibonacci para o da razão áurea está no procedimento de redução do intervalo de incerteza, que aqui varia de iteração a iteração.

Algoritmo

Minimização de uma função estritamente quasiconvexa  $\theta$  dentro do intervalo  $[a_1, b_1]$ .

**Passo de Inicialização**

1. Escolha o valor da tolerância  $\eta > 0$ , a constante  $\varepsilon > 0$  e o intervalo de incertezas inicial  $[a_1, b_1]$ . Definir o número máximo de observações  $n$  que pode ser

encontrado tal que  $F_n > (b_1 - a_1)/\eta$ . Encontrar os valores de  $\lambda_1 = a_1 + (1 - F_{n-2}/F_n)(b_1 - a_1)$  e  $\mu_1 = a_1 + (F_{n-1}/F_n)(b_1 - a_1)$ . Calcular  $\theta(\lambda_1)$  e  $\theta(\mu_1)$ . Inicializar o contador de interações,  $K = 1$  e em seguida ir para o passo principal.

### Passo Principal

1. Se  $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ , vá para o passo 2; e se  $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ , vá para o passo 3.
2. Atualizar  $a_{k+1} = \lambda_k$  e  $b_{k+1} = b_k$ . Encontrar os novos valores de  $\lambda_{k+1} = \mu_k$  e  $\mu_{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-1}/F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$ . Se  $K = n - 2$  vá para o passo 5; caso contrário, calcular  $\theta(\mu_{k+1})$  e vá para o passo 4.
3. Atualizar  $a_{k+1} = a_k$  e  $b_{k+1} = \mu_k$ . Encontrar os novos valores de  $\mu_{k+1} = \lambda_k$  e  $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-2}/F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$ . Se  $K = n - 2$  vá para o passo 5; caso contrário, calcular  $\theta(\lambda_{k+1})$  e vá para o passo 4.
4.  $K = K + 1$  e volta para o passo 1.
5.  $\lambda_n = \lambda_{n-1}$  e  $\mu_n = \lambda_{n-1} + \varepsilon$ . Se  $\theta(\lambda_n) > \theta(\mu_n)$  então  $a_n = \lambda_n$  e  $b_n = b_{n-1}$ . Caso contrário se  $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ , então  $a_n = a_{n-1}$  e  $b_n = \lambda_n$ . Fim. O ponto ótimo está entre o intervalo  $[a, b]$ .

## 3.8 Métodos de Busca Unidimensional sem Utilizar Derivadas

### 3.8.1 Método da Bisseção

#### Algoritmo

Minimização de uma função estritamente quasiconvexa  $\theta$  dentro do intervalo  $[a_1, b_1]$ .

#### **Passo de Inicialização**

1. Escolha o valor da tolerância  $\eta > 0$ , e o intervalo de incertezas inicial  $[a_1, b_1]$ . Inicializar o contador de iterações,  $K = 1$  e em seguida ir para o passo principal.

#### **Passo Principal**



1. Encontrar um ponto médio  $\frac{1}{2}(a_k + b_k)$  e calcular  $\theta'(\lambda_k)$ . Se  $\theta'(\lambda_k) = 0$ , pare,  $\lambda_k$  é solução ótima. Caso contrário, vá para o passo 2 se  $\theta'(\lambda_k) > 0$ , e vá para o passo 3 se  $\theta'(\lambda_k) < 0$ .
2. Atualizar  $a_{k+1} = \lambda_k$  e  $b_{k+1} = b_k$ . Encontrar os novos valores de  $\lambda_{k+1} = \mu_k$  e  $\mu_{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-1} / F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$ . Se  $K = n - 2$  vá para o passo 5; caso contrário, calcular  $\theta(\mu_{k+1})$  e vá para o passo 4.
3. Atualizar  $a_{k+1} = a_k$  e  $b_{k+1} = \mu_k$ . Encontrar os novos valores de  $\mu_{k+1} = \lambda_k$  e  $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-2} / F_{n-k})(b_{k+1} - a_{k+1})$ . Se  $K = n - 2$  vá para o passo 5; caso contrário, calcular  $\theta(\lambda_{k+1})$  e vá para o passo 4.
4.  $K = K + 1$  e volta para o passo 1.
5.  $\lambda_n = \lambda_{n-1}$  e  $\mu_n = \lambda_{n-1} + \varepsilon$ . Se  $\theta(\lambda_n) > \theta(\mu_n)$  então  $a_n = \lambda_n$  e  $b_n = b_{n-1}$ . Caso contrário se  $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ , então  $a_n = a_{n-1}$  e  $b_n = \lambda_n$ . Fim. O ponto ótimo está entre o intervalo  $[a, b]$ .

### 3.8.2 Método de Newton

Baseado na aproximação quadrática da função  $\theta(\lambda)$  num dado ponto  $\lambda_k$ . A aproximação quadrática  $q$  é dada por: (BAZARAA et.al., 2006. p.359)

$$q(\lambda) = \theta(\lambda_k) + \theta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{1}{2}\theta''(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^2 \quad (70)$$

O ponto  $\lambda_{k+1}$  é o ponto em que  $q'(\lambda) = 0$ , ou seja,

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)} \quad (71)$$

O processo termina quando  $|\lambda - \lambda_k| < \varepsilon$  ou quando  $|\theta' \lambda_k| < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar pré-especificado.

Esse procedimento só é aplicado para funções que possuam derivada de segunda ordem.

Uma deficiência deste método é que ele não converge para um ponto estacionário com um ponto inicial arbitrário, ele exige que o ponto inicial esteja próximo da solução.

### 3.9 Busca Multidimensional

#### 3.9.1 Método do Passo de Maior Descida (Método do Gradiente)

É um dos mais fundamentais procedimentos de minimização de funções multivariáveis diferenciáveis. O vetor  $d$  é chamado de direção de descida de uma função  $f$  em  $x$  e se existe um  $\delta > 0$  tal que  $f(x + \lambda d) < f(x)$  para todo  $\lambda \in (0, \delta)$ . O método caminha na direção  $d$  com norma igual a 1 ( $\|d\|=1$ ).

#### 3.9.2 Método de Newton

É o procedimento em que o passo na direção de descida é pré-multiplicado pela inversa da matriz Hessiana. Essa operação é motivada pela melhor direção encontrada utilizando a aproximação quadrática de uma função do que a encontrada utilizando a aproximação linear da mesma. Considere a aproximação  $q$  dada no ponto  $x_k$ :

$$q(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)'(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)'H(x_k)(x - x_k) \quad (72)$$

Onde  $H(x_k)$  é a matriz Hessiana de em  $x_k$ . A condição necessária para um mínimo da aproximação quadrática  $q$  é que  $\nabla q(x) = 0$ , ou seja,  $\nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = 0$ . Assumindo que a matriz inversa de  $H(x_k)$  exista, o ponto seguinte  $x_{k+1}$  é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - H(x_k)^{-1}\nabla f(x_k) \quad (73)$$

Em alguns casos faz-se necessário a aplicação de um fator de correção ( $\alpha$ ) no tamanho do passo.

A equação reescrita é dada por:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha H(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) \quad (74)$$

Seja  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ , e que  $H(\bar{x})$  seja definida positiva no mínimo local  $\bar{x}$  e  $f$  possua continuamente derivada de segunda ordem, isto conduz a uma  $H(x_k)$  definida positiva nos pontos próximos a  $\bar{x}$  e, portanto, o ponto seguinte  $x_{k+1}$  é bem definido.

## 4. MÉTODOS APLICADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR

Neste capítulo serão apresentados métodos utilizados na obtenção dos valores ótimos dos problemas associados aos modelos não lineares de otimização restrita. Condições de otimalidade e obtenção do valor ótimo serão discutidos, bem como simulações e uma aplicação em sistemas elétricos de potência serão mostrados.

### 4.1 Otimização com Restrições de Igualdade

O objetivo é estudar problemas de otimização com restrição de igualdade dados na forma:

$$\min_x \{f(x) / C(x) = 0\} \quad (75)$$

ou

$$\min_x f(x)$$

s.a

$$C(x) = 0$$

(76)

$$\text{Com: } \begin{cases} x \in R^n \\ f(\cdot): R^n \rightarrow R \\ C(\cdot): R^n \rightarrow R^m, \text{ onde } C(x) = [C_1(x) \cdots C_m(x)]^T \end{cases}$$

Sistema com  $n + m$  equações e  $n + m$  incógnitas  $\rightarrow (x^*, \lambda^*)$ .

#### 4.1.1 Multiplicadores de Lagrange

Um dos mais importantes e empregados métodos de otimização restrita é o chamado método dos multiplicadores de Lagrange, que é um procedimento para a obtenção de pontos ótimos de um funcional diferenciável sujeito a restrições de igualdade.

Seja o problema:

$$\begin{aligned}
& \min f(x) \\
& x \in R^n \\
& \text{s.a} \\
& C_i(x) = 0
\end{aligned} \tag{77}$$

Se  $\exists x^*$  (x candidato a x ótimo) factível e  $f(x^*) \leq f(x), \forall x$ , então  $x^*$  é solução ótima do problema.

A função de Lagrange ou Lagrangeana é definida por:

$$\begin{aligned}
L(x, \lambda) &: R^n \times R^m \rightarrow R \\
L(x, \lambda) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \underbrace{\lambda_i C_i(x)}_{\text{restrição}} = f(x) + \lambda^T C(x)
\end{aligned} \tag{78}$$

sendo  $\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$  o vetor contendo os multiplicadores de Lagrange

Objetivo: Encontrar  $(x^*, \lambda^*)$  a partir de  $L(x, \lambda)$  fazendo-se  $\nabla L(x, \lambda) = 0$ .

#### 4.1.2 Interpretação Geométrica

Na solução ótima  $(x^*, \lambda^*)$ , o gradiente da função objetivo deve ser uma combinação linear dos gradientes das restrições:

$$\nabla_x f(x^*) = - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x C_i(x^*) \tag{79}$$

#### Exemplo 1:

Resolva o problema:

$$\min_u \frac{1}{2} \|u - z\|_2^2$$

Com  $u, z \in R^n$  e  $z$  uma constante.

### Solução do Problema:

1º Passo: Definir  $f(u)$

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u - z\|_2^2$$

$$f(u) = \frac{1}{2} (u - z)^T (u - z)$$

$$f(u) = \frac{1}{2} (u^T u - u^T z - z^T u + z^T z)$$

$$f(u) = \frac{1}{2} u^T u - u^T z + \frac{1}{2} z^T z$$

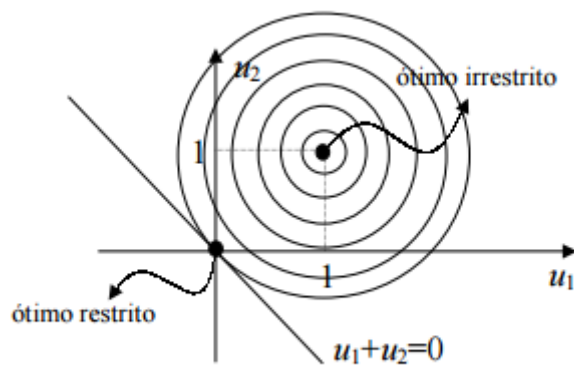
2º passo: Aplicando as condições de otimalidade.

$$\nabla_u f(u^*) = 0 \Rightarrow u^* - z = 0 \Rightarrow u^* = z$$

3º passo: Ponto de mínimo global ( $u^*$ )

$$\nabla^2 f(u^*) = I > 0$$

**Figura 8: Interpretação Geométrica do Problema**



**Fonte: Elaboração Própria**

Portanto:

$$u \in \mathbb{R}^2$$

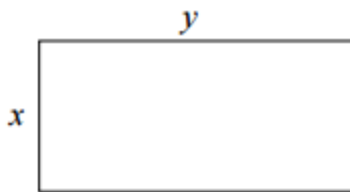
$$z = [1 \ 1]^T$$

$$A = [1 \ 1]$$

$$b = 0$$

### **Exemplo 2:**

Dentre todos os retângulos com perímetro  $p$  dado, determine aquele de área  $a$  máxima.



$$p = 2x + 2y$$

$$A = xy$$

### **Formulação matemática:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x,y} xy \\ s.a \\ 2x + 2y = p \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y} -xy \\ s.a \\ 2x + 2y = p \end{array} \right.$$

### **Solução:**

$$L(x, y, \lambda) = -xy + \lambda(2x + 2y - p)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_x L(x^*, y^*, \lambda^*) = -y^* + 2\lambda^* = 0 \Rightarrow y^* = 2\lambda^* \\ \nabla_y L(x^*, y^*, \lambda^*) = -x^* + 2\lambda^* = 0 \Rightarrow x^* = 2\lambda^* \end{array} \right\} \Rightarrow x^* = y^*$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, y^*, \lambda^*) = 2x^* + 2y^* - p = 0 \Rightarrow x^* = y^* = \frac{p}{4}$$

### **Formulação Matemática Alternativa:**

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = p \Rightarrow x = \frac{p}{2} - y \\ -xy = \left(-\frac{p}{2} + y\right)y = y^2 - \frac{p}{2}y \end{array} \right\} \min_y y^2 - \frac{p}{2}y, \text{ com } x = \frac{p}{2} - y$$

### **Condição Necessária de Otimalidade:**

$$f(y) = y^2 - \frac{p}{2}y \Rightarrow \frac{df(y^*)}{dy} = 2y^* - \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow y^* = \frac{p}{4} \Rightarrow x^* = \frac{p}{4}$$

Condição suficiente de Otimalidade:

$$\frac{d^2 f(y^*)}{dy} = 2 > 0 \Rightarrow y^* \text{ é mínimo global}$$

## 4.2 Problema Geral de Controle Ótimo – Caso Contínuo

Seja o seguinte sistema dinâmico (linear ou não-linear) variante no tempo:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = 0 \quad (80)$$

Onde  $x(t) \in R^n$  é o estado e  $u(t) \in R^m$  é a entrada de controle.

Associa-se a este sistema um índice de desempenho na forma:

$$J(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (81)$$

Onde:

$[t_0, t_f]$  é o horizonte de controle (intervalo de atuação do controle).

O termo  $\phi(x(t_f), t_f)$  é uma medida de avaliação associada ao estado final do sistema dinâmico.

O termo  $\int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$  é uma medida de avaliação associada à evolução do estado e do controle ao longo do horizonte de controle  $[t_0, t_f]$ .

Uma vez definido  $J(u(t))$  ou mais especificamente  $\phi(\cdot)$  e  $L(\cdot)$ , é possível descrever o problema de controle ótimo do sistema dinâmico na forma:

### Problema de controle ótimo

Dado  $x(t_0) = x_0$ , encontrar o sinal de controle  $u^*(t) \in U[t_0, t_f]$ , a ser aplicado durante o horizonte de controle, de modo a conduzir o estado do sistema dinâmico a uma trajetória  $x^*(t)$  que minimiza  $J(u(t))$ .



$U[t_0, t_f]$  representa o espaço dos possíveis sinais de controle que podem ser produzidos no horizonte de controle  $[t_0, t_f]$ .

$u(t)$  é a única informação que precisa ser definida para se especificar unicamente  $x(t)$  para  $t \in [t_0, t_f]$ . Portanto  $J(\cdot)$  depende apenas de  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

### 4.3 FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (82)$$

$$s.a \begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ u(t) \in U[t_0, t_f] \end{cases}$$

Ou,

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} J(u(t)) \quad (83)$$

$$s.a \begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ u(t) \in U[t_0, t_f] \end{cases}$$

Problema de otimização com restrição de igualdade (em espaços funcionais)  
 → multiplicadores de Lagrange → condições necessárias de otimalidade → cálculo variacional (cálculo diferencial aplicado a funções)

Como  $u(t)$  e  $x(t)$  não estão correlacionados de uma forma simples, não é possível obter explicitamente a variação de  $J(\cdot)$  em função de  $u(t)$ .

Um artifício para reverter isso é o índice de desempenho aumentado:

$$J_{aum}(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [L(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T (f(x(t), u(t), t) - \dot{x})] dt \quad (84)$$

Definindo a função hamiltoniana:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T (f(x(t), u(t), t)) \quad (85)$$

Que resulta em:

$$J_{aum}(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda(t)^T \dot{x}] dt \quad (86)$$

Onde:

$x(t)$  é o estado do sistema dinâmico.

$\lambda(t)$  é o co-estado do sistema dinâmico.

#### 4.4 Condições Necessárias de Otimalidade: Formulário de solução para o problema genérico de controle ótimo.

De acordo com a equação (84), pode-se definir:

Horizonte de controle:  $t[t_0, t_f]$

Variáveis de estado:  $x(t) \in R^n$

Entrada de controle:  $u(t) \in U[t_0, t_f]$  (se  $U$  é tal que admite qualquer função no intervalo  $[t_0, t_f]$ , então se tem atuação de controle irrestrita)

Função hamiltoniana:  $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T (f(x(t), u(t), t))$

Índice de desempenho aumentado:

$$J_{aum}(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda(t)^T \dot{x}] dt$$

Variáveis de co-estado:  $\lambda(t) \in R^n$

Equação de Estado:  $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

Equação de co-estado:  $\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\lambda} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \lambda$

Princípio do mínimo:  $\arg \min_{u(t) \in U} H(x(t), u(t), \lambda(t), t)$ , que se restringe a

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \lambda, \text{ caso não sejam violadas as restrições de atuação do controle.}$$

Condições de contorno:  $x(t_0) = x_0$

$\lambda_i(t_f)$  é livre se  $x_i(t_f)$  é fixo ( $i = 1, \dots, n$ )

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i(t_f)} \text{ se } x_i(t_f) \text{ é livre } (i = 1, \dots, n)$$

$H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f)$  é livre se  $t_f$  é fixo

$$H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} \text{ se } t_f \text{ é livre}$$

## 4.5 Otimização Restrita com Restrições de Desigualdade

Considere o problema restrito:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (87)$$

Para solucionar problemas deste tipo, a técnica consiste em transformá-lo em um problema irrestrito utilizando um método alternativo ao de Multiplicadores de Lagrange apresentado anteriormente neste capítulo. Para isso será utilizado o Método Funções Penalidade.

### 4.5.1 Funções Penalidade

De acordo com Bazaraa et. al. (2006,p470) a função penalidade é um procedimento para aproximação de problemas restritos por problemas irrestritos. As restrições são incorporadas à função objetivo via parâmetro  $\mu$  de penalização de maneira a penalizar qualquer violação das restrições.

Considere o problema de minimização restrita:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ R \in S \end{aligned} \quad (88)$$

Onde:

$f$  : Função contínua

$S$  : Conjunto de restrições

Objetivo: Substituir o problema restrito em problema irrestrito da forma:

$$\min_{x \in R^n} \{f(x) + \mu P(x)\} \quad (89)$$

Onde  $\mu > 0$  e  $P$  é uma função contínua tal que:

$$\begin{cases} P(x) = 0 & \forall x \in S \\ P(x) > 0 & x \in R^n \end{cases} \quad (90)$$

Onde:

$\mu$ : constante reativa positiva ou termo de penalização

$\mu P(x)$ : função penalidade

$P(x)$ : Termo incorporado para ter um problema irrestrito

#### Procedimento para resolução do problema:

- $u_k$  é uma sequência de números reais, tal que  $u_k > 0, u_{k+1} > u_k$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \infty$ .
- Defina para cada  $u_k$  a função  $q(x, u_k) = f(x) + u_k P(x)$  chamada de função auxiliar.
- Para cada  $K$  resolva  $\min\{q(x, u_k)\}$  obtendo-se  $x^*$ .
- $P(x)$  é composto pelas restrições do problema. Se  $h(x) = 0$  segue que  $P(x) = h^2(x)$  pois  $P(x) \geq 0$

Seja:

$$\begin{aligned} \min f(x) & \quad (91) \\ \text{s.a. } h(x) = 0 & \quad ; \text{com } x \in R^n \end{aligned}$$

Suponha que o problema acima possa ser representado pelo seguinte problema irrestrito, onde  $u > 0$  é um número grande:

$$\begin{aligned} \min f(x) + u \cdot h^2(x) & \quad (92) \\ \text{s.a. } x \in R^n & \end{aligned}$$

Pode-se verificar intuitivamente que a solução ótica do problema acima tem que ter  $h^2(x)$  muito próximo de zero, caso contrário tem-se uma enorme penalidade  $u \cdot h^2(x)$  inclusa.

Agora se considera o seguinte problema com uma simples restrição de desigualdade  $g(x) \leq 0$ :

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (93)$$

Fica claro que a forma  $\min f(x) + u \cdot g^2(x)$  não é apropriada, uma vez que estaria penalizando  $g(x)$  tanto para  $g(x) > 0$  quanto para  $g(x) < 0$ . E, no entanto, é desejável a aplicação da função penalidade somente se o ponto  $x$  não é factível, isto é,  $g(x) > 0$ .

Um conveniente problema irrestrito pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min f(x) + u \cdot [\max\{0, g(x)\}]^2 \\ x \in R^n \end{aligned} \quad (94)$$

De um modo geral, uma adequada função penalidade inclui uma penalidade positiva para os pontos infactíveis, e não penaliza os pontos factíveis. Sejam as restrições da forma  $g_i(x) \leq 0$  para  $i=1, \dots, m$  e  $h_i(x) = 0$  para  $i=1, \dots, l$ , então a função penalidade  $\alpha$  é definida como:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \phi[g_i(x)] + \sum_{i=1}^l \psi[h_i(x)] \quad (95)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são funções contínuas, satisfazendo:

$$\begin{aligned} \phi(y) = 0 \text{ se } y \leq 0 \text{ e } \phi(y) > 0 \text{ se } y > 0 \\ \psi(y) = 0 \text{ se } y = 0 \text{ e } \psi(y) > 0 \text{ se } y \neq 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Tipicamente,  $\phi$  e  $\psi$  são da forma:

$$\begin{aligned}\phi(y) &= [\max\{0, y\}]^p \\ \psi(y) &= |y|^p\end{aligned}\tag{97}$$

Onde  $p$  é inteiro e positivo. Assim:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=1}^l \psi[h_i(x)]^p\tag{98}$$

Obs.: a função  $f(x) + \mu \cdot \alpha(x)$  é chamada função auxiliar.

### **Algoritmo:**

#### **Inicialização:**

1- Estabelecer uma tolerância ( $\xi > 0$ ). Escolha um ponto inicial  $x_1$ , o parâmetro de penalidade  $u_1 > 0$ , e o fator de incremento da penalidade ( $\beta > 0$ ). Fazer  $k = 1$  e ir para o passo principal.

#### **Passo Principal:**

1- Resolva o problema iniciando com  $x_k$ , utilizando técnicas já conhecidas como Newton.

$$\begin{cases} \min f(x) + u_k \cdot \alpha(x) \\ x \in R^n \end{cases}$$

Agora se tem  $x_{k+1}$  como a próxima solução e então vá para o passo 2.

2- Se  $u_k \cdot \alpha(x_{k+1}) < \xi$ , pare, senão,  $u_{k+1} = \beta \cdot u_k$ . Faz-se  $K = K + 1$  e volta para passo 1.

Ou seja, escolha  $\varepsilon > 0, u_0 > 0, \beta > 1$  e  $x^0$ . Faça  $K = 0$ .

while  $u_k P(x^k) \geq \varepsilon$

$$x^{k+1} = \arg \min f(x) + c_k P(x) \quad (\text{pto inicial } x^k)$$

$$u_{k+1} = \beta u_k$$

$$K = K + 1$$

end

$$x^* = x^k$$

**Exemplo 1**

Considere o problema:

$$\begin{aligned} \min x \\ \text{s.a. } -x + 2 \leq 0 \end{aligned}$$

*Resolução:*

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, (-x+2)\}]^2 = \begin{cases} (-x+2)^2 & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Função auxiliar: } P(x) = x + u \cdot \begin{cases} (-x+2)^2 & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Aplicando as condições de otimalidade:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 1 + u \cdot \begin{cases} -2 \cdot (-x+2) & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = 0$$

Assim:

$$1 - 2 \cdot u \cdot (-x + 2) = 0$$

$$x = 2 - \frac{1}{2 \cdot u}, \text{ para } u \rightarrow \infty \Rightarrow x = 2$$

**Exemplo 2:**

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^2 \end{cases}$$

*Solução*

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 + u \cdot (x_1 + x_2 - 1)^2 \quad p/u > 0 \\ \text{s.a. } x_1, x_2 \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

A condição necessária e suficiente para a otimalidade:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2u(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_2} = 2x_2 + 2u(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

A solução  $x_1 = x_2 = \frac{u}{2u+1}$ , para  $u \rightarrow \infty \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ .

### **Exemplo 3**

$$\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

$$s.a. (x_1^2 - x_2) = 0$$

### **Resolução:**

#### **Função Penalidade no Matlab®**

Os cálculos feitos para o exemplo anterior podem ser implementados no software Matlab® com o seguinte programa:

```

clc;
clear all
format short
parar = 0;
inicial = 0;
tol = .001;
%----- Entrada de Dados -----%

tol = 10^-5;    %tolerância
X = [sym('x1');sym('x2')];%declaração das variáveis do problema (simbólica)
MI = [sym('mi1');sym('mi2');sym('mi3')];%apenas para as restrições de
desigualdade
x = [2;1];    %valor inicial
nvar = size(x); %numero de variáveis
fo = ((X(1)-2)^4)+((X(1)-2*X(2))^2); %função que se deseja minimizar
res(1,1) = X(1)^2-X(2);

```



```

nigual = 1;
ndesigual = 0;
mi0 = [.1];%valor inicial da penalidade
%-----

nres = size(res,1);

while parar==0
    f = fo;
    for k = 1:nres
        f = f + MI(k)*(res(k,1))^2;
    end
    disp('Funcao com penalidade: ');
    disp( f );
    disp('Substituindo pelos seguintes valores de mi: ');
    if inicial==0
        mi = [0;0;0];
    else
        for k = 1:nres
            if viola(k)~=0
                mi(k) = 10*mi0(k);
                mi0(k) = mi(k);
            end
        end
    end
    disp(mi')
    disp('O novo valor da funcao com penalidade: ');
    f = subs(f,{MI(1,1),MI(2,1),MI(3,1)},{mi(1,1),mi(2,1),mi(3,1)});
    disp( f )
    for k = 1:nvar
        gradfx(1,k) = diff(f,X(k)); %derivada da funcao penalidade em relação a
x(k)
    end
    disp('Derivada da Funcao Penalidade em relacao a x1, x2: ');

```

```

disp(['gradfx']);
[X1,X2] = solve(gradfx(1,2),gradfx(1,1));
size(X1,1);
X11 = double(X1(1));
X22 = double(X2(1));
disp('Valores candidatos a otimo (x1, x2):' );
disp(['X11,X22'])
disp('O novo valor da funcao objetivo (fo):' );
disp(subs(f,{X(1),X(2)},{X11,X22}))
%------ Verificação das condições -----
-%
viola = zeros(nres,1);
for k = 1:nres
    valorres(k,1) = subs(res(k,1),{X(1),X(2)},{X11,X22});
    if k==nigual
        if or(valorres(k,1)<-tol,valorres(k,1)>tol)
            disp('A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:')
            disp(k)
            viola(k,1) = k;
        end
    else
        if valorres(k,1)>tol
            disp('A seguinte restricao de desigualdade esta sendo violada:')
            disp(k)
            viola(k,1) = k;
        end
    end
end
aux = 0;
for k = 1:nres
    if viola(k)~=0
        aux = 1;
    end
end
end

```

```

inicial = inicial+1;
disp('Fim da iteracao ')
disp(inicial)
disp('-----')
if aux==0
    parar = 1;
    disp('                FIM')
end
end
%-----%
-----

```

### Resposta obtida pelo programa:

Funcao com penalidade:

$$(x1 - 2*x2)^2 + (x1 - 2)^4 + mi1*(x2 - x1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de mi:

0 0 0

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x1 - 2*x2)^2 + (x1 - 2)^4$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a x1, x2:

$$[2*x1 - 4*x2 + 4*(x1 - 2)^3, 8*x2 - 4*x1]$$

Valores candidatos a otimo (x1, x2):

2 1

O novo valor da funcao objetivo (fo):

0

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

1

Fim da iteracao

1

---

Funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + m_1(x_2 - x_1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de  $m_1$ :

1 0 0

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + (x_2 - x_1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a  $x_1, x_2$ :

$$[2x_1 - 4x_2 + 4(x_1 - 2)^3 - 4x_1(x_2 - x_1^2), -2x_1^2 - 4x_1 + 10x_2]$$

Valores candidatos a otimo ( $x_1, x_2$ ):

1.1687 0.7407

O novo valor da funcao objetivo ( $f_0$ ):

0.9662

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

1

Fim da iteracao

2

---

Funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + m_1(x_2 - x_1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de  $m_1$ :

10 0 0

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + 10(x_2 - x_1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a  $x_1, x_2$ :

$$[2x_1 - 4x_2 + 4(x_1 - 2)^3 - 40x_1(x_2 - x_1^2), -20x_1^2 - 4x_1 + 28x_2]$$

Valores candidatos a otimo  $(x_1, x_2)$ :

$$0.9906 \quad 0.8425$$

O novo valor da funcao objetivo (fo):

$$1.7129$$

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

1

Fim da iteracao

3

Funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + m_1(x_2 - x_1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de  $m_1$ :

$$100 \quad 0 \quad 0$$

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a  $x_1, x_2$ :

$$[2x_1 - 4x_2 + 4(x_1 - 2)^3 - 400x_1(x_2 - x_1^2), -200x_1^2 - 4x_1 + 208x_2]$$

Valores candidatos a otimo  $(x_1, x_2)$ :

$$0.9508 \quad 0.8875$$

O novo valor da funcao objetivo (fo):

1.9184

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

1

Fim da iteracao

4

Funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + m_1(x_2 - x_1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de mi:

1000      0      0

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + 1000(x_2 - x_1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a x1, x2:

$$[2x_1 - 4x_2 + 4(x_1 - 2)^3 - 4000x_1(x_2 - x_1^2), -2000x_1^2 - 4x_1 + 2008x_2]$$

Valores candidatos a otimo (x1, x2):

0.9461    0.8934

O novo valor da funcao objetivo (fo):

1.9433

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

1

Fim da iteracao

5

---

Funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + \mu_1(x_2 - x_1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de  $\mu_i$ :

$$10000 \quad 0 \quad 0$$

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + 10000(x_2 - x_1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a  $x_1, x_2$ :

$$[2x_1 - 4x_2 + 4(x_1 - 2)^3 - 40000x_1(x_2 - x_1^2), -20000x_1^2 - 4x_1 + 20008x_2]$$

Valores candidatos a otimo ( $x_1, x_2$ ):

$$0.9456 \quad 0.8941$$

O novo valor da funcao objetivo ( $f_0$ ):

$$1.9459$$

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

$$1$$

Fim da iteracao

$$6$$


---

Funcao com penalidade:

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^4 + \mu_1(x_2 - x_1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de  $\mu_i$ :

$$100000 \quad 0 \quad 0$$

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x1 - 2*x2)^2 + (x1 - 2)^4 + 100000*(x2 - x1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a x1, x2:

$$[2*x1 - 4*x2 + 4*(x1 - 2)^3 - 400000*x1*(x2 - x1^2), -200000*x1^2 - 4*x1 + 200008*x2]$$

Valores candidatos a otimo (x1, x2):

$$0.9456 \quad 0.8941$$

O novo valor da funcao objetivo (fo):

$$1.9462$$

A seguinte restricao de igualdade esta sendo violada:

$$1$$

Fim da iteracao

$$7$$

Funcao com penalidade:

$$(x1 - 2*x2)^2 + (x1 - 2)^4 + mi1*(x2 - x1^2)^2$$

Substituindo pelos seguintes valores de mi:

$$1000000 \quad 0 \quad 0$$

O novo valor da funcao com penalidade:

$$(x1 - 2*x2)^2 + (x1 - 2)^4 + 1000000*(x2 - x1^2)^2$$

Derivada da Funcao Penalidade em relacao a x1, x2:

$$[2*x1 - 4*x2 + 4*(x1 - 2)^3 - 4000000*x1*(x2 - x1^2), -2000000*x1^2 - 4*x1 + 2000008*x2]$$

Valores candidatos a otimo (x1, x2):



0.9456 0.8941

O novo valor da funcao objetivo (fo):

1.9462

Fim da iteracao

8

FIM

No próximo exemplo será considerado um sistema de transmissão de energia elétrica que mostra uma aplicação de modelos não lineares de otimização na Engenharia Elétrica.

#### **Exemplo 4**

Determine  $V_1$  e  $V_2$ , tais que as perdas na linha de transmissão sejam mínimas.

**Figura 9: Sistema Teste**



**Fonte: Elaboração Própria**

Onde  $\theta_1 = 0$ ;  $r = 0,2$ ;  $x = 1,0$ ;  $P_2^{esp} = -0,4$

Função a ser minimizada:

$$\begin{cases} \min g(V_1^2 + V_2^2 - 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\theta_2) \\ \text{s.a. } P_2 = V_2^2 \cdot 0,1923 + V_1 \cdot V_2 \cdot (-0,1923 \cdot \cos\theta_2 + 0,9615 \cdot \sin\theta_2) \\ 0,9 \leq V_1 \leq 1,1 \\ 0,9 \leq V_2 \leq 1,1 \end{cases}$$

$$\text{Ponto inicial: } \begin{cases} V_1 = V_2 = 1,0 \\ \theta_2 = 0 \text{ rad} \\ \xi = 10^{-3} \end{cases}$$

Determinar:  $V_1, V_2, \theta_2$

Para a resolução desse problema, foi realizada uma simulação no software **Matlab**<sup>®</sup>, após o desenvolvimento de uma rotina apropriada utilizando o método de funções penalidade.

A seguir, a listagem do programa e os resultados obtidos através da simulação:

```

clc; clear;
v1=1.15;
v2=1.15;
th2=0;
pesp=-0.4;
epon=0.001;
k=1;
u1=5; u2=5; u3=5; u4=2; u5=5;
beta=2;
flag='t';
fx=' 0.1923*(v1^2 + v2^2 - 2*v1*v2*cos(th2)) + 0.5*u1*(-0.4 - (0.1923*(v2^2) +
v1*v2*(-0.1923*cos(th2) + 0.9615*sin(th2))))^2 + 0.5*c1*u2*(v1-1.1)^2 +
0.5*c2*u3*(0.9-v1)^2 + 0.5*c3*u4*(v2-1.1)^2 + 0.5*c4*u5*(0.9-v2)^2';
dv1=diff(fx,'v1');
dv2=diff(fx,'v2');
dth2=diff(fx,'th2');
grad=[dv1;dv2;dth2];
h11=diff(dv1,'v1');
h12=diff(dv1,'v2');
h13=diff(dv1,'th2');
h21=diff(dv2,'v1');
h22=diff(dv2,'v2');
h23=diff(dv2,'th2');
h31=diff(dth2,'v1');
h32=diff(dth2,'v2');
h33=diff(dth2,'th2');
Hx=[h11,h12,h13;h21,h22,h23;h31,h32,h33];

```

```

disp('***** Valores iniciais *****');
v1
v2
parada=1;
clc
disp('          Método da Penalidade          ');
disp(' ');
disp(' Iteração      V1      V2      teta2      Perdas      ');
while abs(parada)>=epon
    if v1>1.1
        c1=1;
        c2=0;
        u2=beta*u2;
        u3=1;
    elseif v2<0.9
        c1=0;
        c2=1;
        u2=1;
        u3=beta*u3;
    else
        c1=0; c2=0;
    end
    if v2>1.1
        c3=1;
        c4=0;
        u4=beta*u4;
        u5=1;
    elseif v2<0.9
        c3=0;
        c4=1;
        u4=1;
        u5=beta*u5;
    else
        c3=0; c4=0;
    end
end

```

```

end
grad1=eval(grad);
Hx1=eval(Hx);
Hx1i=inv(Hx1);
delta=-(Hx1i*grad1);
v1=v1+delta(1);
v2=v2+delta(2);
th2=th2+delta(3);
parada=pep-(((v2^2)*0.1923+v1*v2*(-0.1923*cos(th2)+0.9615*sin(th2))));
perdas=0.1923*(v1^2 + v2^2 - 2*v1*v2*cos(th2));
u1=beta*u1;
disp(sprintf(' %d %0.5f %0.5f %0.5f %0.5f
',k,v1,v2,th2,perdas));
k=k+1;
end

```

---

### Resposta obtida pelo programa:

Método da Penalidade

Iteração	V1	V2	teta2	Perdas
1	1.17883	1.25274	-0.32280	0.03038
2	1.10181	1.09694	-0.35019	0.02822
3	1.10159	1.09604	-0.35668	0.02923
4	1.10081	1.09566	-0.36114	0.02993
5	1.10041	1.09504	-0.36351	0.03029
6	1.10020	1.09462	-0.36472	0.03047
7	1.10010	1.09439	-0.36533	0.03056

### 4.5.2 Penalização Exata

No método de penalidades, um mínimo local  $x^*$  é obtido apenas quando  $u \rightarrow \infty$ . Pode - se obter  $x^*$  com  $u$  finito se:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m |h_i(x)| + \sum_{j=1}^p \max\{0, g_j(x)\} \quad (99)$$

For utilizada.

Assumindo que  $x^*$  satisfaz as condições suficientes de 2ª ordem para mínimo local do problema restrito. Seja  $\lambda$  e  $\mu \geq 0$  os multiplicadores associados. Se  $u > \max_{ij} \{|\lambda_i|, \mu_j\}$ , então  $x^*$  é também um mínimo local do problema irrestrito.

## 5 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

O controle linear quadrático (LQ) surgiu aproximadamente em 1960 e é uma técnica pertencente à Teoria de Controle Moderno.

Existe dentro dessa técnica alguns casos especiais, sendo eles o Regulador Linear Quadrático (RLQ) e o Regulador Linear Gaussiano (RLG).

Neste capítulo serão apresentadas várias técnicas para obtenção do RLQ, tais como: Multiplicadores de Lagrange, Hamiltoniana e Mínimos Quadrados. Os reguladores serão em tempo infinito e tempo finito.

### 5.1 Controle Ótimo

O problema de controle ótimo consiste em determinar uma lei de controle ótima que minimize o índice de desempenho  $J$ , tendo como restrição o sistema  $\dot{x}$ .

Tal problema é definido como:

$$\begin{aligned} & \min J \\ & s.a. \\ & \dot{x} = Ax + Bu \\ \\ & J = \frac{1}{2} x^T(t) S(T) x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T Q x(t) + u^T R(t) u] dt \end{aligned} \quad (100)$$

onde:

$$x \in R^n$$

$$u \in R^n$$

$(A, B)$  controlável

$(A, C)$  observável

$$\left. \begin{array}{l} S(T) \geq 0 \\ Q(T) \geq 0 \\ R > 0 \end{array} \right\} \text{simétricas}$$

$[t_0 \ T]$  intervalo de interesse do problema

Utilizando a teoria de Multiplicadores de Lagrange, o problema sob restrição é transformado em um problema irrestrito, incorporando-se a restrição à função objetivo da seguinte forma:

$$\min J = \min J + \lambda^T (Ax + Bu)x^T(t)Sx(T) + \int_{t_0}^T [xQ(t) + uR(t) + \lambda^T] dt \quad (101)$$

Definindo o Hamiltoniano por:

$$H(t) = \frac{1}{2} (x^T Qx + u^T Ru) + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (102)$$

e derivando a função  $H(t)$ , a fim de calcular as condições de otimalidade de primeira ordem, com respeito a  $\lambda, x, u$ , obtém-se:

$$\dot{x} = \frac{dH}{d\lambda} = Ax + Bu = \dot{x} \quad (I)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{dH}{dx} = Qx + A^T \lambda = \dot{\lambda} \quad (II)$$

$$0 = \frac{dH}{du} = Ru + B^T \lambda = 0 \quad (III)$$

Daí segue que:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{du} = 0 &= Ru + B^T \lambda & (103) \\ u &= -R^{-1} B^T \lambda \end{aligned}$$

Substituindo  $u$  na equação  $Ax + Bu$  tem-se:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1} B^T \lambda \quad (104)$$

Voltando ao objetivo que é determinar uma lei de controle na forma de realimentação de estados, considera-se, então, o lagrangeano variando com a matriz  $S(t)$  que satisfaz a condição final:

$$\lambda(T) = S(T)x(T) \quad (105)$$

Ou seja,

$$\lambda(t) = S(t)x(t) \quad (106)$$

Para determinar  $S(t)$  diferencia-se a equação anterior, utilizando-se a regra de derivação do produto e substituindo-se  $\dot{x}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{S}(t)x(t) + S(t)\dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= \dot{S}(t)x(t) + S(t)(Ax - BR^{-1}B^T \underbrace{Sx}_{\lambda}) \end{aligned} \quad (107)$$

Assim:

$$\begin{aligned} -\dot{S}x &= Qx + A^T \lambda + S(Ax - BR^{-1}B^T Sx) \\ -\dot{S}x &= Qx + A^T Sx + S(Ax - BR^{-1}B^T Sx) \\ -\dot{S}x &= (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q)x \end{aligned} \quad (108)$$

Como a equação é válida para  $\forall x(t)$  dado e  $\forall x(t_0)$ , temos que:

$$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q \quad t < T \quad (109)$$

A equação anterior é chamada de equação diferencial de Ricatti e sua solução fornece a lei de controle ótimo dada por:

$$u(t) = -R^{-1}B^T Sx(t) \quad (110)$$

Definindo:

$$k(t) = R^{-1}B^T S(t) \quad (111)$$



tem-se:

$$u(t) = -k(t)x(t) \quad (112)$$

Como se obteve uma realimentação variante no tempo e ela não é conveniente para a implementação prática, considera-se um ganho constante que minimize  $J$ .

$$u(t) = -k(t)x(t) \quad (113)$$

Neste caso, por ser constante, assume-se  $\dot{S} = 0$

$$0 - A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q \quad (114)$$

denominada Equação Algébrica de Riccati.

## 5.2 Método dos Mínimos Quadrados

Considere o funcional quadrático  $J : R^n \rightarrow R$ , definido por:

$$J(x) = (Ax - b)^T (Ax - b) \quad (115)$$

onde:

$$J_{(1x1)}(x) = \underbrace{(A_{n \times n} x_{n \times 1} - b_{n \times 1})}_{1 \times n}^T \underbrace{(A_{n \times n} x_{n \times 1} - b_{n \times 1})}_{n \times 1}$$

$$A \in R^{n \times n}$$

$$x \in R^n$$

$$b \in R^{n \times 1}$$

O problema de MMQ propõe encontrar  $x$ , minimizador global, ou seja:

$$\hat{x} = \min_x J(x) \quad (116)$$

Para isso será utilizado as condições de otimalidade de 1ª ordem, isto é,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0.$$

Abrindo o funcional, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(x) &= ((Ax)^T - b^T)(Ax - b) \\
 J(x) &= (x^T A^T - b^T)(Ax - b) \\
 J(x) &= x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b
 \end{aligned} \tag{117}$$

Se,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2A^T Ax - A^T b - A^T b + 0 = 0 \tag{118}$$

$$\frac{\partial(-b^T Ax)}{\partial x} = -(b^T A)^T \tag{119}$$

sendo

$$y \in R^2$$

$$x \in R^2$$

Voltando à equação (113) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial x} &= 2A^T Ax - 2A^T b = 0 \\
 \frac{\partial J}{\partial x} &= A^T Ax \\
 \frac{\partial J}{\partial x} &= A^T b \\
 x &= (A^T A)^{-1} A^T b
 \end{aligned} \tag{120}$$

### 5.2.1 Propriedades sobre derivadas matriciais

$$\frac{d}{dx}(y^T x) = \frac{d}{dx}(x^T y) = y \tag{121}$$

Suponha que  $x$  e  $y$  vetores  $R^{n \times 1}$   $y \in R^{m \times 1}$

$$\frac{d}{dx}(y^T Ax) = \frac{d}{dx}(x^T A^T y) = A^T y$$

$$\frac{d}{dx}(y^T Ax) = Ax + A^T x \quad (122)$$

Se  $A$  é simétrica

$$\frac{d}{dx}(x^T Ax) = 2Ax \quad (123)$$

**Exemplo:**

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = x^T Ax + b^T x$$

Para encontrar  $\min f(x)$  as condições necessárias devem ser satisfeitas:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

$$\nabla f(x) = 2Ax + b$$

$$2Ax + b = 0$$

$$2Ax = -b$$

$$Ax = -\frac{b}{2}$$

$$A^{-1}Ax = \frac{-A^{-1}b}{2}$$

$$x^* = -\frac{1}{2}A^{-1}b$$

Como  $\det A > 0$ , então  $A$  possui inversa:

$$x^* = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{6}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

Substituindo:

$$f(x^*) = 6\left(-\frac{3}{11}\right)^2 + 2\left(-\frac{4}{11}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{11}\right) - \frac{1}{4}$$

$$f(x^*) = -0,9773$$

### 5.3 Vantagens do índice desempenho quadrático

- Há unicidade de solução global, pois não existem soluções locais que não sejam globais devido a convexidade do problema.
- Condições de 1ª ordem, ou seja,  $\nabla f(x) = 0$  são suficientes para determinarmos o ótimo global.

#### **Exemplo:**

$$J = \frac{1}{2} x^T(t) S(T) x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T Q x(t) + u^T R(t) u] dt$$

s.a.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Ao minimizar J determinaremos  $u^*$  (sequência de controle ótimo).

Conhecendo-se  $u^*$ , conseguimos a trajetória ótima  $x^*$ .

### 5.4 RLQ Para Horizonte De Tempo Infinito

Considere o problema do regulador quadrático ótimo dado a partir da equação do sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{124}$$

Objetiva-se determinar a matriz  $k$  do vetor de controle ótimo:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (125)$$

A partir da minimização do índice de desempenho quadrático:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (126)$$

onde:

$Q \rightarrow$  Matriz Hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica.

$R \rightarrow$  Matriz Hermitiana definida positiva ou real simétrica.

De acordo com Ogata (2003,p.736), o termo do lado direito da equação (126) representa o consumo de energia dos sinais de controle e as matrizes  $Q$  e  $R$  determinam a importância relativa do erro e o consumo dessa energia, isto é, são ponderações dos erros.

Ainda segundo Ogata (2003,p.736), a lei de controle linear dada por  $(u(t) = -Kx(t))$  é a lei de controle ótimo e, portanto, se os elementos não conhecidos da matriz  $k$  forem determinados visando minimizar o índice de desempenho  $J$ , então  $u(t) = -Kx(t)$  será ótimo para qualquer estado inicial  $x(0)$ .

Substituindo (120) em (119) tem-se:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (127)$$

Suponha que  $A - BK$  é estável ou que os autovalores de  $A - BK$  tenham partes reais negativas.

Substituindo  $u(t)$  em  $J$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} [x^T Q x + (-Kx)^T R (-Kx)] dt \\
J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\
J &= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt \tag{128}
\end{aligned}$$

Considere, então, que:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x) \tag{129}$$

a fim de encontrar a solução da equação de Riccati com  $P > 0$  ( ou seja,  $P$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou simétrica real) a ser determinada:

$$-\frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) = -\dot{x}^T P x(t) - x^T(t) P \dot{x}(t) \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A - BK)x \\
\dot{x}^T &= x^T (A - BK)^T
\end{aligned} \tag{131}$$

$$-\frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) = -[x^T (A - BK)]^T P x(t) - x^T(t) P [(A - BK)x]$$

$$-\frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) = -x^T [(A - BK)^T P - P(A - BK)] x \tag{132}$$

Comparando os membros da igualdade, segue que:

$$-Q + K^T R K = (A - BK)^T P + P(A - BK) \tag{133}$$

O objetivo, então, é determinar  $P > 0$  que satisfaça a equação anterior.

Fazendo:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x) \tag{134}$$

Integrando ambos os membros, uma vez que a integral é uma antiderivada, obtém-se:

$$J = -x^T P x \Big|_0^\infty \quad (135)$$

$$J = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0)$$

Como  $(A - BK)$  foi suposto estável.

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0) \quad (136)$$

$$x(\infty) \rightarrow 0$$

E  $J$  passa a ser dada em termos da condição inicial e  $P$ .

$$J = x^T(0) P x(0) \quad (137)$$

Suponha que  $R$  é uma matriz hermitiana  $>0$ , tem-se:

$$R = T^T T \quad (138)$$

O problema de regulação é aquele em que o sinal de referência vai a zero, isto é:

$$r(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(0) \quad (139)$$

Ou seja, o sistema em malha fechada deve ser assintoticamente estável.

Nota: Através do regulador o controle deve corrigir desvios em relação a uma referência fixa igual a 0.

Supondo que  $R = T^T > 0$ , a equação  $(R = T^T T)$  pode ser decomposta como:

$$R = T^T T \quad (140)$$

$$R^{-1} = T^{-1} (T^T)^{-1}$$

$T \rightarrow$  não singular

Assim,

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (141)$$

Torna-se:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T T^T TK = 0 \quad (142)$$

que equivale a:

$$A^T P + PA - k B^T P - PBk + K^T T^T Tk + Q = 0 \quad (143)$$

De acordo com o Ogata (2003,p.737) a equação:

$$AP + PA - KB^T P - PBK + K^T T^T TK + Q = 0 \quad (144)$$

pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A^T P + PA[TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q &= 0 \\ A^T P + PA[K^T T^T - P^T BT^{-1}][TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q &= 0 \\ A^T P + PA[K^T T^T TK - K^T T^T (T^T)^{-1} B^T P - P^T BT^{-1}TK + P^T BT^{-1}(T^T)^{-1} B^T P] \\ - PBR^{-1} B^T P + Q &= 0 \end{aligned}$$

$$A^T P + PA[k^T T^T Tk - k^T B^T P - P^T Bk + P^T BB^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (145)$$

A minimização de  $J$  em relação a  $k$  requer a minimização de:

$$x^T \underbrace{[TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} BP]}_{\text{termo quadrático quando } \geq 0 \text{ ou } = 0} x \quad (146)$$

Como essa última expressão é não negativa, o mínimo ocorre quando ela é zero ou quando:

$$\begin{aligned} TK &= (T^T)^{-1} B^T P \\ T^{-1}TK &= T^{-1}(T^T)^{-1} B^T P \\ K &= R^{-1} B^T P \end{aligned} \quad (147)$$

expressão que fornece a matriz ótima  $k$ .

Assim,



$$\begin{aligned}
 u &= -Kx(t) \\
 u &= -R^{-1}B^T Px(t)
 \end{aligned}
 \tag{148}$$

E  $P$  deve satisfazer:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{149}$$

### **Exemplo:**

Suponha que a lei de controle de um sistema com dois estados seja  $u = -kx$ .

Determinar a matriz de ganho ótima  $k$  de modo que:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt$$

Seja minimizado, com:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u \in R^1$$

$$R = 1$$

### **Solução:**

Para determinar  $k$  é necessário encontrarmos  $P$  solução da equação.

Seja:

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = P^T$$

Substituindo na equação:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 & bc \\ cb & c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -b^2+1 & a-bc \\ a-cb & 2b-c^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I) -b^2 + 1 = 0$$

$$b^2 = 1$$

$$b = \pm 1$$

$$II) a - bc = 0$$

$$a - c = 0$$

$$a = c$$

$$III) 2b - c^2 + 1 = 0$$

$$3 - c^2 = 0$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = +\sqrt{3}$$

$$k = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1 - \sqrt{3}x_2$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Fazendo-se:

$$A^T P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PBB^T P = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificando:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 5.5 RLQ Para Horizonte de Tempo Finito

Horizonte de controle:  $t \in [t_0, t_f]$

Variáveis de estados:  $x(t) \in R^n$

Entrada de Controle:  $u(t)$

Variáveis de co-estado:  $\lambda(t) \in R^n$

Equação de estado:  $\frac{dH}{d\lambda} = \dot{x}$

Equação de co-estado:  $\frac{dH}{d\lambda} = \dot{\lambda}$

Princípio do mínimo:  $\frac{dH}{d\lambda} = 0$

Condições de contorno:  $x(t_0) = x_0$

Passos para obter a solução:

- 1) Resolve-se o sistema formado pelas equações de estado, co-estado, obtendo  $x^*(t)$  e  $\lambda^*(t)$  trajetórias ótimas.
- 2) Substitui-se  $\lambda^*(t)$  na condição de mínimo e encontra-se  $u^*$  (controle ótimo).

### Regulador Linear Quadrático

$$\min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt + \frac{1}{2} x_f^T S x_f \quad (150)$$

s.a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \quad x \in R^n \quad u \in R^m \\ x(t_0) = x_0 \\ Q = Q^T \geq 0 \\ R = R^T > 0 \\ S = S^T \geq 0 \\ Q \in R^{n \times n} \quad R \in R^{m \times m} \quad S \in R^{n \times n} \\ A \in R^{n \times n} \quad B \in R^{n \times m} \end{array} \right.$$

$u(t)$  é irrestrito embora haja ponderação da função objetivo.

Hamiltoniano  $H(x, u, \lambda)$  é:

Funcional que incorpora a restrição em J

$$\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (151)$$

Equação de estado:  $\frac{dH}{d\lambda} = \dot{x} = Ax + Bu$

Equação de co-estado:  $\frac{dH}{d\lambda} = -\dot{\lambda} = Q + A^T \lambda$

Princípio do mínimo:  $\frac{dH}{du} = 0 = Ru + B^T \lambda$

$$Ru = -B^T \lambda \quad (152)$$

$$u = -R^{-1} B^T \lambda$$

$$Ax - BR^{-1} B^T \lambda$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T\lambda \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \\
\lambda(t_f) &= Sx(t_f) \\
\frac{dH}{dx_f} &= Sx(t_f) \\
\frac{dH}{dx} &= -\dot{\lambda} \\
\frac{dH}{dx_f} &= -\dot{\lambda}(t_f) = Sx(t_f)
\end{aligned} \tag{153}$$

Assumindo:

$$\lambda = Px$$

$$\lambda_f = Sx_f$$

( $\lambda$  depende linearmente de  $x$ )

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BR^{-1}B^T\lambda \\ \dot{x} &= Ax - BR^{-1}B^TPx \\ \dot{x} &= (A + BR^{-1}B^TP)x \end{aligned} \right\} \tag{154}$$

$$\dot{\lambda} = Px = \dot{P}x + P\dot{x}$$

$$\dot{P}x + P\dot{x} = -Qx - A^T\lambda$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}x + P\dot{x} &= -Qx - A^TPx \\ \dot{P}x + P\dot{x} &= (-Q - A^TP)x \end{aligned} \right\} \tag{155}$$

Multiplicando (154) à esquerda por  $-P$  tem-se:

$$-P\dot{x} = -P(A + BR^{-1}B^TP)x \tag{156}$$

E somando a (149) tem-se:

$$\begin{aligned}
P\dot{x} &= -P(A - BR^{-1}B^T)Px + (-Q - A^T)Px \\
\dot{P}x + P(A - BR^{-1}B^T)Px + (Q + A^T)Px &= 0 \\
[\dot{P} + P(A - BR^{-1}B^T)P + Q + A^T P]x &= 0
\end{aligned} \tag{157}$$

Esta equação será satisfeita para todo  $x$  caso  $P$  seja escolhido de modo a satisfazer a equação diferencial matricial.

$$-\dot{P} = PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P \quad (158)$$

E o controle é determinado na forma:

$$u = -R^{-1}B^T \underbrace{Px}_{\lambda} \quad (159)$$

$$u = -kx$$

$$\text{Com } k = R^{-1}B^T P$$

## 5.6 Solução do problema de Regulador Linear Quadrático ótimo com o software Matlab<sup>®</sup>.

**Exemplo:** (OGATA,2003,p.741)

Considere o sistema dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho  $J$  é dado por:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt$$

Onde:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = [1]$$

A matriz definida positiva  $P$  solução da equação de Riccati, a matriz de ganho  $k$  ótima de realimentação e os autovalores da matriz  $A - Bk$  devem ser obtidos.

O programa abaixo em Matlab<sup>®</sup> fornece a solução deste problema.

A seguir obtém-se a resposta  $x$  do sistema regulador para a condição inicial  $x(0)$  onde;

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com realimentação de estados  $u = -kx$ , a equação de estado desse sistema torna-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - Bk)x$$

### Regulador Linear Quadrático no Matlab<sup>®</sup>.

**%-----Projeto do Sistema Regulador Quadrático Ótimo-----**

**A=[0 1 0;0 0 1;-35 -27 -9]**

**B=[0;0;1]**

**Q=[1 0 0;0 1 0;0 0 1]**

**R=[1]**

**[k,P,E]=lqr(A,B,Q,R)**

**%Resposta à condição inicial**

A

B

k

**sys=ss(A-B\*k,eye(3),eye(3),eye(3));**

**t=0:0.01:8;**

**x=initial(sys,[1;0;0],t);**

**x1=[1 0 0]\*x';**

**x2=[0 1 0]\*x';**

**x3=[0 0 1]\*x';**

**subplot(2,2,1);plot(t,x1);grid**

**xlabel('t(s)');ylabel('x1')**

**subplot(2,2,2);plot(t,x2);grid**

**xlabel('t(s)');ylabel('x2')**

**subplot(2,2,3);plot(t,x3);grid**

```
xlabel('t(s)');ylabel('x3')
```

---

**Resposta obtida pelo programa:**

A =

```
0 1 0
0 0 1
-35 -27 -9
```

B =

```
0
0
1
```

Q =

```
1 0 0
0 1 0
0 0 1
```

R =

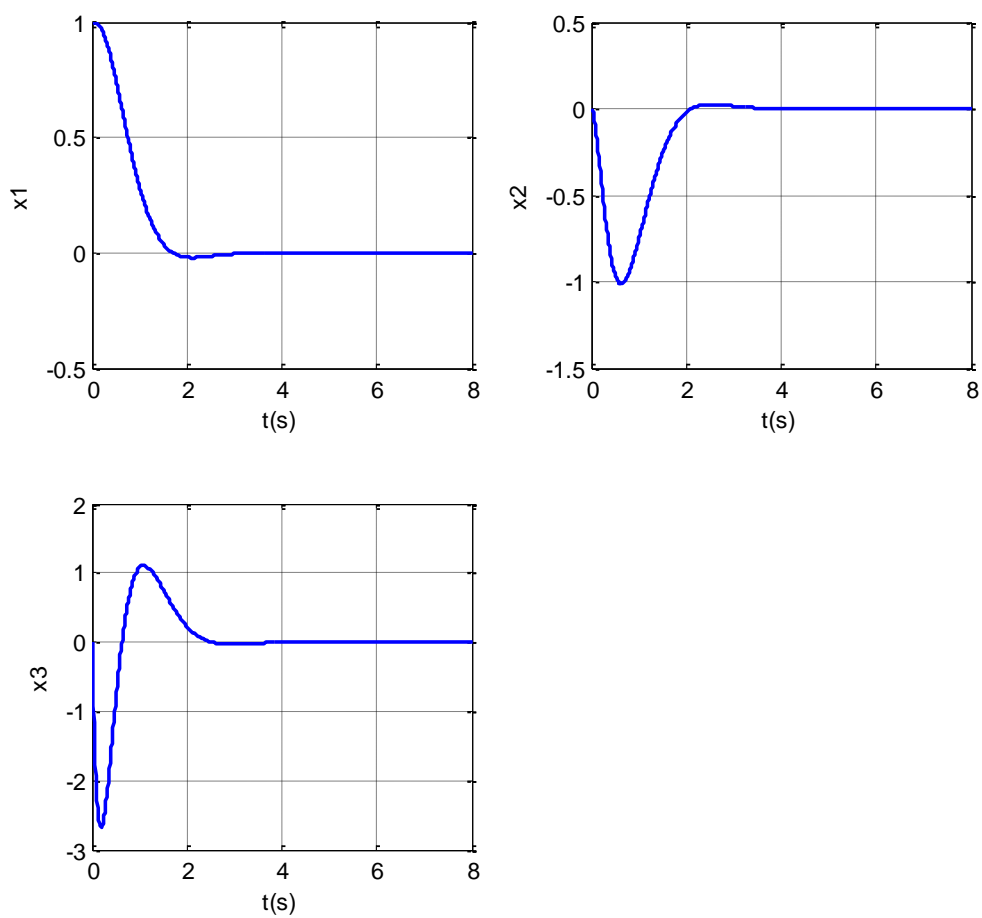
```
1
```

k =

```
0.0143 0.1107 0.0676
```



$P =$ 
$$\begin{array}{ccc} 4.2625 & 2.4957 & 0.0143 \\ 2.4957 & 2.8150 & 0.1107 \\ 0.0143 & 0.1107 & 0.0676 \end{array}$$
 $E =$ 
$$\begin{array}{l} -5.0958 \\ -1.9859 + 1.7110i \\ -1.9859 - 1.7110i \end{array}$$
 $A =$ 
$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{array}$$
 $B =$ 
$$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$
 $k =$ 
$$0.0143 \quad 0.1107 \quad 0.0676$$

**Figura 10: Gráficos obtidos com o programa:**

## 6. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi deduzido o Regulador Linear Quadrático (RLQ) de horizonte de tempo finito e infinito, utilizando os métodos Multiplicadores de Lagrange, Funções Penalidade e Mínimos Quadrados.

O objetivo do estudo era obter o equacionamento do RLQ, utilizando-se os métodos não lineares de otimização em aplicações genéricas. Para isso foi feito um estudo aprofundado de teoria de controle moderno e modelos não lineares de otimização.

A teoria de otimização apresenta muitos elementos tais como: convexidade, positividade, continuidade, matrizes jacobiana e hessiana, dentre outros. Esses elementos estão presentes na teoria de otimização, detalhada no trabalho.

A teoria de controle moderno foi mostrada através dos enunciados de conceitos básicos de controladores em espaço de estados, matriz de observabilidade e controlabilidade, propriedades de estabilizabilidade, detectabilidade e projeto dos controladores no modelo espaço de estados utilizando-se Equação de Lyapunov e Análise de Auto Estrutura.

No estudo dos modelos não lineares de otimização focou-se principalmente nos estudos dos Métodos dos Multiplicadores de Lagrange e Funções Penalidade, apresentando-se vários teoremas e definições aplicadas posteriormente na obtenção de um controlador do tipo RLQ.

Finalmente foi deduzido o RLQ, utilizando-se de todos os conceitos e métodos vistos ao longo do trabalho. Simulações foram implementadas no software Matlab<sup>®</sup> a fim de mostrar quantitativamente e qualitativamente os resultados obtidos, comprovando a eficiência dos métodos de otimização na teoria de controle.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de Automação: Controle & Automação**. São Paulo: Blucher, v. 1, 2007.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear programming - Theory and Algorithms**. 3ª. ed. USA: Wiley, 2006.

CERRI, J. P. Regulador Robusto Recursivo Para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estados, São Carlos, 2009. 126.

COSTA, G. R. M. **Introdução à Programação Não Linear**. São Carlos: [s.n.], 1999 (apostila).

D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A, 1984.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 8ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IZMAILOV, A.; SOLODOC, M. **Otimização: Condição de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 2009.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 4ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2003.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. São Paulo: Prentice Hall, 2010.

TERRA, M. H.; CERRI, J. P.; ISHIHARA, J. Y. IEE Transactions on Automatic Control. **Optimal Robust Linear Quadratic regulator for Systems Subject to Uncertainties**, São Carlos, September 2014. 59.