



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
CAMPUS IV – ARAXÁ

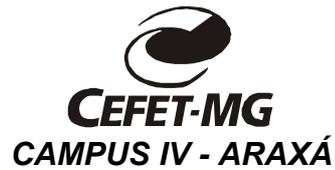
ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

JEAN CARLOS DE OLIVEIRA

**REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO PARA SISTEMAS SUJEITOS A
INCERTEZAS PARAMÉTRICAS**

ARAXÁ

2011



JEAN CARLOS DE OLIVEIRA

**REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO PARA SISTEMAS SUJEITOS A
INCERTEZAS PARAMÉTRICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais / Campus IV - Araxá, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Automação Industrial.

Orientadora: Prof^a. ALINE FERNANDA BIANCO

ARAXÁ

2011

Dedico este trabalho aos meus pais, Jesus e Helena, que estiveram ao meu lado durante toda esta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me permitiu tudo isso, o qual esteve comigo durante todos os momentos de minha vida.

Aos meus pais, por toda dedicação, pelo amor que me fez mais forte, pelos conselhos que me fizeram acreditar que era capaz de ir mais além.

A minha orientadora professora Aline Fernanda Bianco, que me ajudou muito e realmente orientou-me, tornando possível a realização deste trabalho.

A professora Jalmira Fiuza por sua indispensável ajuda e apoio para realização dos trabalhos de conclusão de curso de todos os formandos de 2011.

A minha namorada Thamires, por sua paciência e compreensão em minhas ausências e por seu carinho e incentivo nos momentos difíceis.

Ao meu amigo Luis Paulo, pela sua grande colaboração nas pesquisas realizadas no decorrer deste trabalho.

A todos os amigos e familiares, que sempre me apoiaram. A estrada foi longa, em vocês encontrei a força e o incentivo necessário para que continuasse caminhado.

Enfim, agradeço a todos que de uma forma ou outra contribuíram para que esta vitória fosse obtida.

Aos que me criticaram, que “torceram contra”, meus sinceros agradecimentos, pois suas críticas me fizeram muito mais forte, me deram uma vontade extra para mostrar que eu era capaz, que iria vencer.

Obrigado!

A diferença entre o possível e o impossível está na vontade humana.

Louis Pasteur

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso trata da obtenção de um regulador linear quadrático (LQR) robusto deduzido a partir de sistemas no espaço de estados sujeitos a incertezas nos parâmetros. A técnica utilizada baseou-se na aplicação dos métodos de otimização BDU (Bounded Data Uncertainties), que se trata de um problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas nos parâmetros, e dos Multiplicadores de Lagrange. Buscou-se a solução ótima para o pior cenário possível, ou seja, maximizando as incertezas. Obteve-se também o LQR nominal, novamente com a aplicação dos Multiplicadores de Lagrange e comparou-se os dois algoritmos aplicados a um sistema incerto. Através de simulações realizadas no MATLAB®, foi comprovada a melhor performance do algoritmo que considera a propriedade de robustez, como era esperado. A partir desta comparação, verificou-se a eficácia do regulador robusto, abrangendo uma classe de perturbações que possuem determinada estrutura pré-definida, as quais abrangem uma grande gama de incertezas encontradas em sistemas reais a serem controlados.

Palavras-Chave: Robustez. Regulação. Otimização. Sistemas Incertos. Controle Ótimo.

ABSTRACT

This course conclusion work comes to obtaining a robust Linear Quadratic Regulator (LQR) deduced from the state-space system subjected to uncertainties in the parameters. The technique used was based on the application of optimization methods BDU (Bounded Data Uncertainties) that is a regularized least squares problem with uncertainties in the parameters and Lagrange Multipliers. The optimal solution was found for the worst case, in other words, maximizing the uncertainties. The nominal LQR also was obtained, with the application of Lagrange Multipliers again and the two algorithms applied to an uncertain system were compared. Through simulations in MATLAB® was proven better performance of the algorithm that considers the property of robustness, as expected. From this comparison, the effectiveness of the robust regulator was verified, considering a class of perturbations that have certain pre-defined structure, which cover a wide range of uncertainties encountered in real systems to be controlled.

Keywords: Robustness. Regulation. Optimization. Uncertain Systems. Optimal Control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - Sistema de controle em malha aberta	6
FIGURA 2 - Sistema de controle em malha fechada.....	7
FIGURA 3 - Diagrama em blocos da representação no espaço de estados	9
FIGURA 4 - Diagrama em blocos da representação no espaço de estados com realimentação.....	11
FIGURA 5 - Função Contínua, Unimodal e Côncava	14
FIGURA 6 - Função Descontínua.....	14
FIGURA 7 - Função Multimodal	15
FIGURA 8 - Função Convexa.....	16
FIGURA 9 - Comparativo LQR proposto <i>versus</i> comando dlqr do MATLAB®	49
FIGURA 10 - Comparativo Regulador Robusto <i>versus</i> LQR, primeira simulação.....	55
FIGURA 11 - Comparativo Regulador Robusto <i>versus</i> LQR, segunda simulação	55
FIGURA 12 - Comparativo Regulador Robusto <i>versus</i> LQR, terceira simulação.....	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

LQR – Regulador Linear Quadrático (Linear Quadratic Regulator)

BDU – Dados com Incertezas Limitadas (Bounded Data Uncertainties)

LMI – Desigualdades Matriciais Lineares (Linear Matrix Inequalities)

ODE – Equações Diferenciais Ordinárias (Ordinary differential equation)

SISO – *Single Input Single Output*

MIMO – *Multiple Input Multiple Output*

s.a – sujeito a

SUMÁRIO

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	viii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA GERAL DE SISTEMAS	5
2.1 Sistemas Dinâmicos	5
2.2 Sistemas de Controle	5
2.2.1 SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA ABERTA	6
2.2.2 SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA.....	7
2.2.3 REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS.....	7
2.2.4 PROPRIEDADES DOS SISTEMAS DE CONTROLE.....	9
2.3 Projeto no Espaço de Estados	10
2.3.1 FÓRMULA DE ACKERMANN.....	11
2.3.2 FÓRMULA DE BASS-GURA	12
3 TEORIA DA OTIMIZAÇÃO	13
3.1 Função objetivo	13
3.1.1 CONTINUIDADE.....	13
3.1.2 MODALIDADE	15
3.1.3 CONVEXIDADE.....	15
3.2 Ponto e região factível	18
3.3 Multiplicadores de Lagrange	18
3.4 Otimização Quadrática	21
3.4.1 MÍNIMOS QUADRADOS NÃO-REGULARIZADOS.....	21
3.4.2 MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS.....	23
3.4.3 MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS	25
3.4.4 MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS COM INCERTEZAS.....	26
4 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO NOMINAL	38
4.1 Introdução	38
4.2 Formulação do problema de controle ótimo	38

4.3 Simulação Computacional do LQR proposto	47
5 REGULADOR ROBUSTO	50
5.1 Espaço de estados com incertezas paramétricas.....	51
5.2 Redução do problema LQR robusto ao problema BDU.....	52
5.3 Simulação Computacional do LQR Robusto	53
6 CONCLUSÃO	57
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59
APÊNDICE A – Conceitos Matemáticos	60
A.1 Álgebra Matricial.....	60
A.2 Matriz Inversa.....	62
A.3 Matriz Cofatora	63
A.4 Determinante.....	63
A.5 Derivada Matricial	64
A.6 Matriz Jacobiana e Matriz Hessiana.....	65
A.7 Positividade	65
APÊNDICE B – Demonstrações Auxiliares.....	68
B.1 Demonstração da Derivada da função dada pela Equação (4.7).....	68
B.2 Equivalência entre as Equações Algébricas de Riccati (5.8) e (4.28)	70
APÊNDICE C – Códigos Fontes	71
C.1 Código Fonte do Programa criado no MATLAB® para simular o LQR Nominal.....	71
C.2 Código Fonte do Programa criado no MATLAB® para simular o LQR Robusto	72

1 INTRODUÇÃO

Os homens, desde a antiguidade, buscam o controle sobre o meio em que vivem, seja como forma de se situarem no tempo e no espaço e também para ter o domínio sobre seu ambiente, tornando-o mais confortável. Assim, no decorrer dos tempos a teoria de controle vem se desenvolvendo, alternando períodos em que seu avanço ocorre por motivações ora diante de um quadro conceitual bem definido, ora esse quadro conceitual é contestado e a teoria é revista. A mesma tem contribuído muito para os grandes avanços nas áreas da ciência e engenharia, além de ter grande importância nos processos industriais e de produção.

O regulador centrífugo construído por James Watt no século XVIII é tido como o primeiro trabalho significativo de controle automático, sendo desenvolvido com o intuito de controlar a velocidade da máquina a vapor. Outro trabalho de destaque foi a invenção do amplificador eletrônico com realimentação negativa realizada por Harold S. Black, em 1927, para reduzir a distorção em amplificadores repetidores. Em 1932, Nyquist publica seu critério de estabilidade, o qual, segundo Castruci e Bottura (2006):

Foi a teoria certa para transformar as anteriores práticas intuitivas em métodos de engenharia: permitia prever oscilações com segurança, a partir de medidas nos componentes, antes de fechar a malha, e permitia projetar com segurança os subsistemas controladores (CASTRUCI e BOTTURA apud AGUIRRE, 2007, p.10).

O método do lugar das raízes e resposta em frequência formam a base da teoria do controle clássico, que considera as plantas lineares e invariantes no tempo com uma entrada e uma saída. Os engenheiros projetavam sistemas em malha fechada que atendiam a certos requisitos de desempenho.

A partir de 1960, o problema de controle linear quadrático, o filtro de Kalman, o uso do método de Lyapunov no controle de sistemas não-lineares no domínio do tempo e a teoria da equação de Riccati introduziram novos conceitos que superaram as limitações da teoria de controle clássico e deram início a uma "nova era", a qual é denominada de Controle Moderno.

Dentre os novos conceitos destacam-se: a abordagem no domínio do tempo, que se aplica tanto em sistemas lineares variantes no tempo como em sistemas não-lineares; o uso de álgebra linear e matrizes, de modo que sistemas com múltiplas entradas e saídas poderiam ser facilmente abordados e o conceito do estado interno, que trás a preocupação com a dinâmica interna do sistema e não só com o seu comportamento de entrada/saída.

Ao longo da década de 80 houve uma mudança no quadro conceitual da teoria de controle, onde se criou a ideia de que os controladores deveriam ser robustos, ou seja, deveriam ter a capacidade de manter um desempenho satisfatório mesmo na presença de incertezas nos parâmetros do modelo matemático utilizado no projeto. Assim, muitos estudos estão direcionados ao desenvolvimento de ferramentas que possibilitem aos controladores possuir tal propriedade, qual seja, a robustez.

Tal ideia se originou devido as seguintes situações:

- a) Sistema de alta complexidade, onde não é possível obter um modelo matemático que represente fielmente o sistema real, já com um controlador robusto pode-se utilizar um sistema simplificado.
- b) Sistema que varia o modelo matemático com o tempo, por exemplo, processos que mudam suas características por desgastes dos componentes, por mudança nas condições ambientais e ou de operações. Um controlador robusto poderia garantir um desempenho adequado mesmo com tais mudanças.
- c) Sistema de produção em série de dispositivos controlados onde, devido as tolerâncias de fabricação, os dispositivos apresentam diferenças no seu modelo matemático, deste modo é possível realizar apenas um projeto de controlador robusto para controlar todos os dispositivos fabricados.

Em Ogata (2010, p. 5) é ressaltada a importância da robustez no projeto de um sistema de controle:

O primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a obtenção de um modelo matemático da planta ou do objeto a ser controlado. Na realidade, qualquer modelo de uma planta que quisermos controlar incluirá um erro no processo de modelagem. Ou seja, a planta real será diferente do modelo a ser usado no projeto do sistema de controle.

Para garantir que o controlador projetado com base em um modelo funcionará satisfatoriamente quando for usado na planta real, uma abordagem razoável consiste em presumir, desde o início, que existe incerteza ou erro entre a planta real e seu modelo matemático, incluindo tal incerteza ou erro no próprio projeto do sistema de controle. O sistema de controle projetado a partir dessa abordagem é chamado controle de sistema robusto.

Existem diversas técnicas destinadas a propiciar aos controladores a propriedade da robustez, como por exemplo os modelos: H_∞ , Custo Garantido, *Linear Matrix Inequalities* (LMI) e *Bounded Data Uncertainties* (BDU). Este último é uma técnica mais recente e ainda não tão explorada como as demais, sendo um campo que pode render inúmeras pesquisas e trabalhos.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar o desenvolvimento de um modelo de regulador robusto usando o método BDU aplicado ao *Linear Quadratic Regulator* (LQR - Regulador Linear Quadrático). Para isto, será demonstrada a dedução do método BDU e também do regulador LQR a partir do método de otimização denominado Multiplicadores de Lagrange. Será mostrado o desempenho de um sistema sujeito a incertezas nos parâmetros, sendo regulado por um LQR comumente encontrado na literatura e por um LQR Robusto obtido a partir do método BDU.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

Capítulo 1 - traz uma breve introdução, buscando mostrar um pouco da evolução da teoria de controle e também expor o objetivo ao qual destina-se o estudo proposto.

Capítulo 2 - apresenta conceitos importantes relativos a teoria geral de sistemas, como por exemplo, sistemas dinâmicos, controlabilidade, observabilidade, malha aberta e malha fechada, dentre outros.

Capítulo 3 - é dedicado a teoria de otimização, onde são apresentados procedimentos como os Multiplicadores de Lagrange. Este capítulo contém também a dedução do método BDU.

Capítulo 4 - apresentação do desenvolvimento do regulador linear quadrático nominal e de sua simulação feita no software MATLAB®.

Capítulo 5 - tem-se a aplicação da estrutura BDU ao LQR para a obtenção de um regulador robusto e os resultados obtidos da simulação no MATLAB® do LQR nominal e do modificado para um sistema sujeito a incertezas paramétricas.

Capítulo 6 - contém as conclusões e as perspectivas futuras do trabalho.

2 TEORIA GERAL DE SISTEMAS

2.1 Sistemas Dinâmicos

Sistemas Dinâmicos são aqueles em que o valor da saída em um determinado instante de tempo depende de valores passados e presentes da entrada. São descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (ODE) que podem ser reescritas através de modelos denominados Função de Transferência e Espaço de Estados, (DORF e BISHOP, 2001).

Se os coeficientes da ODE são funções do tempo, o sistema é chamado de variante no tempo e, caso sejam constantes ele é dito invariante.

Se há uma relação de proporcionalidade entre a entrada e a saída do sistema, isto é,

$$H(\alpha u) = \alpha H(u), \quad (2.1)$$

e se, para quaisquer dois sinais u_1 e u_2 , a resposta à soma desses sinais é a soma das respostas a cada função particular,

$$H(u_1 + u_2) = H(u_1) + H(u_2), \quad (2.2)$$

o sistema é denominado linear.

2.2 Sistemas de Controle

Um sistema de controle é uma interconexão de componentes configurados de tal forma que o sistema resultante forneça uma resposta desejada (NISE, 2002). Ressalta-se que controlar pode ser entendido como regular, dirigir, comandar.

A planta do sistema de controle é um objeto físico a ser controlado e o processo é a operação a ser controlada. Por exemplo, o avião é uma planta e o pouso é o processo. Salienta-se que uma mesma planta pode realizar vários processos.

O conceito de controlador ou regulador é aplicado muitas vezes de forma indistinta. No entanto, existem diferenças entre as duas designações. Assim, tem-se:

Regulador: é um dispositivo de controle usado quando se deseja manter a referência de entrada fixa no tempo, controlando assim as perturbações na saída. O regulador busca levar o estado do sistema a zero de modo que o mesmo atinja o regime permanente.

Controlador: é um dispositivo de controle usado quando se deseja que a saída acompanhe o sinal de referência que é variável no tempo e que também controle as perturbações na saída. O controlador busca levar o erro do sistema a zero, assim o valor da saída será igual ao desejado.

2.2.1 SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA ABERTA

Nos sistemas de controle em malha aberta, o sinal de saída não exerce nenhuma influência no controle do sistema, ou seja, o sinal de saída não é medido e nem realimentado para ser comparado com o sinal de entrada de referência. Cada sinal de entrada corresponde a uma condição fixa de operação. Sistemas em malha aberta devem ser usados quando se conhece bem a relação entre entrada e saída e que não haja distúrbios interno e nem externos, pois, caso contrário, o sistema de controle não vai conseguir trabalhar de forma adequada.



FIGURA 1 - Sistema de controle em malha aberta
Fonte: Adaptação do autor (DORF e BISHOP, 2001, p. 2).

2.2.2 SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA

Sistemas de controle em malha fechada são também chamados de sistemas de controle com realimentação, pelo fato de usar como sinal de controle uma comparação do sinal de saída (ou uma função do mesmo) com o sinal de entrada de referência. A diferença entre a entrada e a saída gera um sinal de erro, assim o controlador atuará a fim de minimizar este erro para que a saída do sistema tenha o valor desejado. De modo geral, o termo controle de malha fechada implica a utilização do sinal realimentado para a redução do erro do sistema.

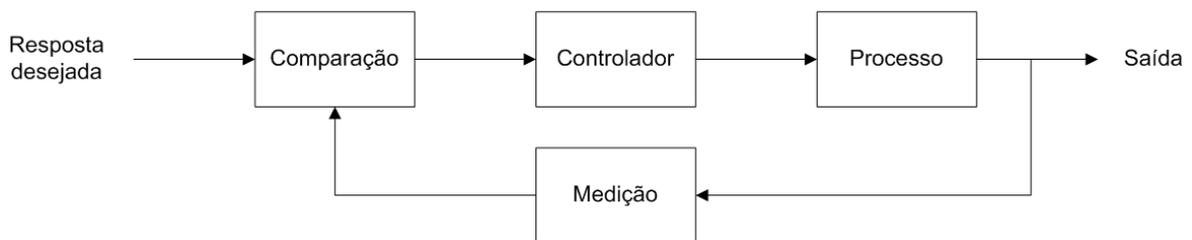


FIGURA 2 - Sistema de controle em malha fechada
Fonte: Adaptação do autor (DORF e BISHOP, 2001, p. 2).

2.2.3 REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

O sistema de controle pode ser descrito através de diferentes tipos de modelos. Neste trabalho será utilizado a modelagem em espaço de estados. Ela basicamente é caracterizada pelos seguintes componentes:

Variáveis de Estado: menor quantidade de $x(t)$ capaz de determinar o estado do sistema, sendo que os estados são as variáveis x calculadas no tempo, em que o conhecimento de x em t_0 juntamente com a entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ determina o comportamento do sistema para $t \geq t_0$.

O vetor de estados é aquele fornecido pelas variáveis de estado e determina a dimensão do sistema. Por exemplo, se

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

significa que o sistema possui dimensão n .

Quando o sistema é contínuo no tempo, a equação de estados é dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in \mathbb{R} (t \geq 0) \quad (2.4)$$

e quando é discreto, passa a ser descrito por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), k \in \mathbb{Z} (k = 0, 1, 2, \dots, N, \dots). \quad (2.5)$$

Nestes equacionamentos, as matrizes A e B são tomadas constantes, o que implica no fato do sistema ser invariante no tempo.

As equações no modelo espaço de estados, além das variáveis de estados, envolvem a entrada representada por $u(t)$ e a saída, dada por $y(t)$. Tal modelo é definido como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

sendo:

$x \in \mathbb{R}^n$ vetor de estados

$u \in \mathbb{R}^m$ vetor de entradas

$y \in \mathbb{R}^p$ vetor de saídas

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de estado

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matriz de entrada

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matriz de saída

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matriz de transição direta

Se m e p forem iguais a 1 (um), isso significa que o sistema possui uma única entrada e uma única saída e é dito monovariável do inglês *Single Input Single Output* (SISO). Já, se m e p forem diferentes de 1 (um), o sistema é chamado multivariável do inglês *Multiple Input Multiple Output* (MIMO).

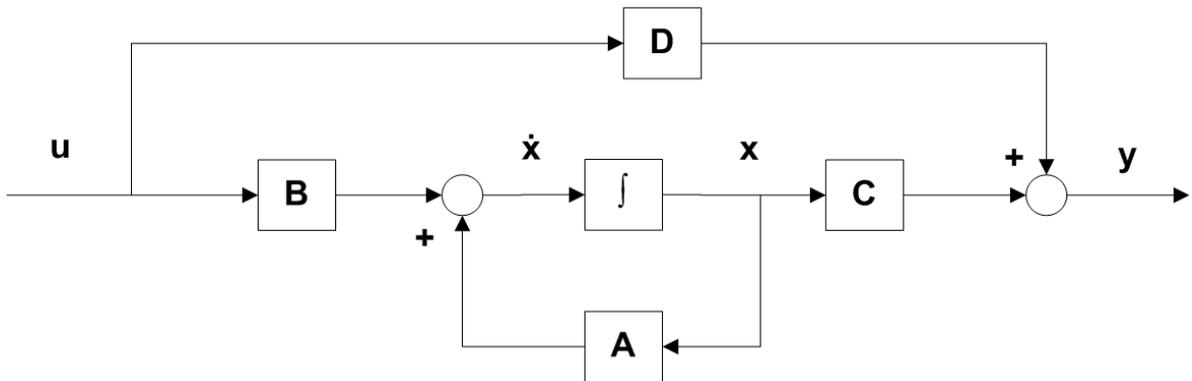


FIGURA 3 - Diagrama em blocos da representação no espaço de estados
Fonte: Elaboração própria.

2.2.4 PROPRIEDADES DOS SISTEMAS DE CONTROLE

O par (A, B) referente ao modelo espaço de estados (2,7) é controlável se, para todo estado inicial $x(t_0)$ e todo estado final $x(t_1)$ existe uma entrada $u(t)$ que leva $x(t_0)$ a $x(t_1)$ em $t \in [t_0, t_1]$.

O critério para se verificar a controlabilidade baseia-se em analisar o posto da matriz

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}, \quad (2.8)$$

chamada Matriz de Controlabilidade. Caso o posto linha seja pleno (todas as linhas linearmente independentes) conclui-se que o sistema é controlável.

O par (A, C) é observável se existe um instante $t_1 > t_0$, tal que para qualquer condição inicial $x_0 = x(t_0)$ o conhecimento da entrada $u[t_0, t_1]$ e da saída $y[t_0, t_1]$ é suficiente para determinar x_0 . Dessa forma, pode-se reconstruir toda trajetória de estados $x(t)$.

O critério para garantir a observabilidade do sistema consiste em verificar se a matriz:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}, \quad (2.9)$$

denominada Matriz de Observabilidade tem posto coluna pleno, ou seja, possui todas as colunas linearmente independentes.

2.3 Projeto no Espaço de Estados

Considerando o sistema no espaço de estados na expressão (2.4), o comportamento dinâmico desse sistema é caracterizado pelo seguinte polinômio característico:

$$\phi(s) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \phi(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n. \quad (2.10)$$

O objetivo do projeto é escolher o sinal de controle $u(t)$ que estabilize o sistema em malha fechada. Supondo haver uma realimentação de estados,

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.11)$$

o sistema realimentado é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-Kx(t)) \\ \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

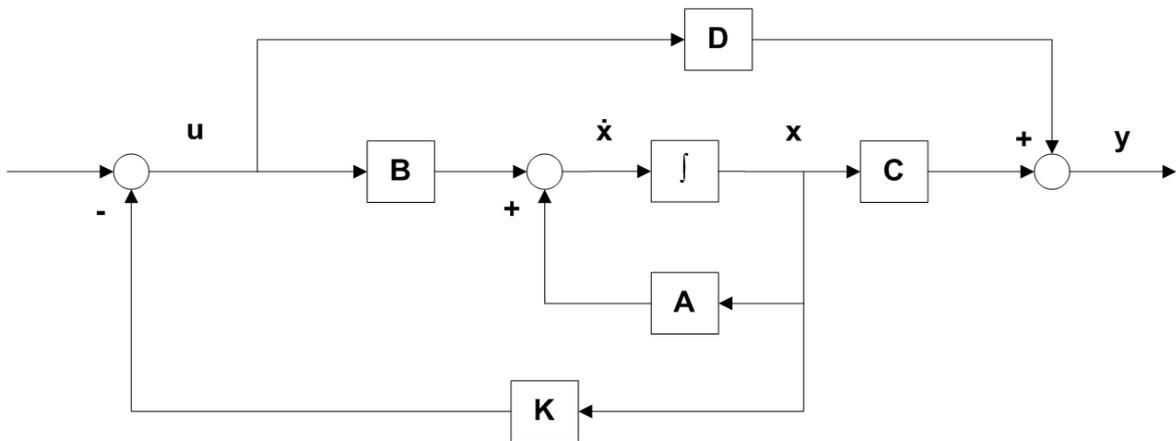


FIGURA 4 - Diagrama em blocos da representação no espaço de estados com realimentação
Fonte: Elaboração própria.

E seu polinômio característico é:

$$\phi(s) = \det(sI - A + BK) = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \gamma_2 s^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} s + \gamma_n. \quad (2.13)$$

O objetivo do projeto, então, é escolher o ganho de realimentação K que realize a estabilização do sistema em malha fechada. Para isso, existem métodos amplamente estudados na literatura como: Fórmula de Ackermann e Bass-Gura ambos para sistemas com 1 (uma) entrada de controle, que encontram-se na sequência.

2.3.1 FÓRMULA DE ACKERMANN

O ganho K é determinado por:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathcal{C}^{-1} \phi_{des}(A), \quad (2.14)$$

sendo $\phi_{des}(A)$ o polinômio característico desejado para o sistema em malha fechada e \mathcal{C} a matriz de controlabilidade.

Nota-se que, para efetuar o projeto é necessário que o sistema seja controlável, caso contrário, não seria possível obter a inversa de \mathcal{C} .

2.3.2 FÓRMULA DE BASS-GURA

O ganho K é determinado por:

$$K = (\gamma - \beta)(M^{-1})^T C^{-1} \quad (2.15)$$

sendo

$$\gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \cdots \quad \gamma_n], \beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n] \quad (2.16)$$

e

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \beta_{n-1} & \cdots & \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde β são os coeficientes do polinômio característico desejado ao sistema realimentado e γ os coeficientes do polinômio característico do sistema em malha aberta (OGATA, 2010).

3 TEORIA DA OTIMIZAÇÃO

Pode-se dizer que otimização é a busca pela solução ótima, ou seja, a melhor solução dentre as possíveis, atendendo a critérios determinados. A formulação de um problema de otimização é constituída pela função objetivo e pelas restrições impostas a serem atendidas. Assim, deve-se encontrar uma solução que maximize ou minimize a função objetivo e atenda às restrições. Em alguns procedimentos de otimização as variáveis envolvidas são modificadas de forma que o ponto ótimo factível seja alcançado.

Para o entendimento dos estudos que serão apresentados ao longo da pesquisa, apresenta-se na APÊNDICE A alguns conceitos matemáticos imprescindíveis.

3.1 Função objetivo

A função objetivo é uma função matemática através da qual busca-se encontrar o máximo ou mínimo. Ela pode ser classificada quanto à continuidade, modalidade e convexidade.

3.1.1 CONTINUIDADE

Contínua

Descontínua

Em problemas de otimização, o ideal é que as funções e suas derivadas sejam contínuas, pois se uma função for não continuamente diferenciável, métodos que utilizam derivadas não podem ser empregados, uma vez que a derivada não é definida nos pontos de descontinuidade de $f(x)$.

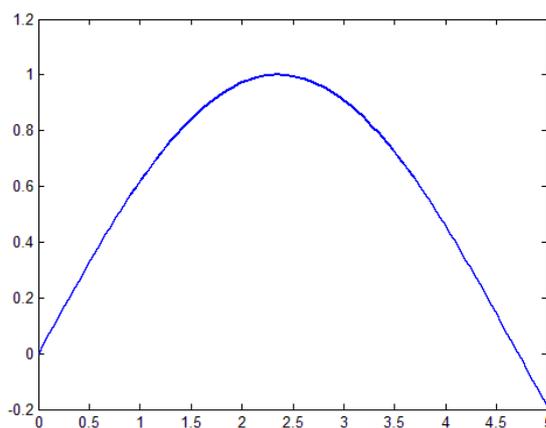


FIGURA 5 - Função Contínua, Unimodal e Côncava
Fonte: Elaboração própria.

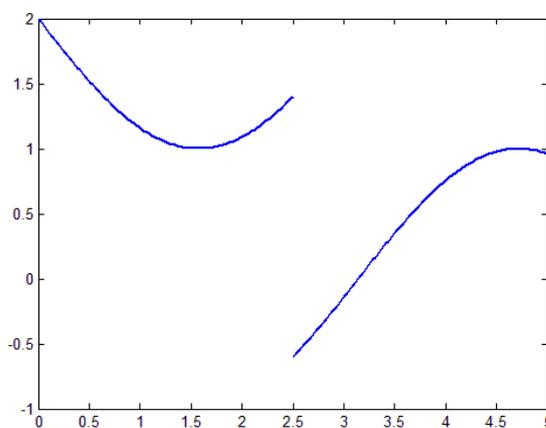


FIGURA 6 - Função Descontínua
Fonte: Elaboração própria.

A FIG. 5 mostra uma função contínua, enquanto que na FIG. 6 tem-se uma função descontínua.

Uma função monovariável é contínua no ponto x_o se:

$$\begin{aligned}
 & f(x_o) \text{ existir} \\
 & \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) \text{ existir} \\
 & \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Uma função de duas variáveis é contínua no ponto (x_o, y_o) se:

$$f(x_o, y_o) \text{ existir}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \text{ existir}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \quad (3.2)$$

3.1.2 MODALIDADE

Unimodal

Multimodal

Quando possível, a função objetivo deve ser unimodal, pois funções unimodais possuem um único extremo que é simultaneamente local e global. Já funções multimodais apresentam vários extremos locais, sendo que um deles é o extremo global.

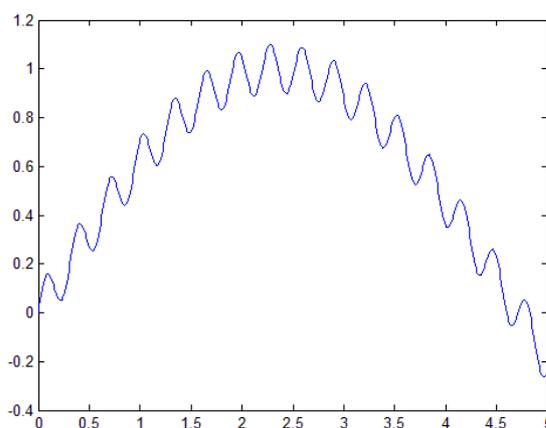


FIGURA 7 - Função Multimodal
Fonte: Elaboração própria.

Na FIG. 5 pode-se ver uma função unimodal e na FIG. 7 tem-se o gráfico de uma função multimodal.

3.1.3 CONVEXIDADE

Convexa

Côncava

Funções côncavas e convexas são unimodais, conseqüentemente a determinação da convexidade garante que esta função tem um extremo local que é também global.

Uma função é denominada côncava (tem ponto de máximo) em uma certa região R , se para todos os pares (x_a, x_b) , pertencentes à região R :

$$f[\theta x_a + (1 - \theta)x_b] \geq \theta f(x_a) + (1 - \theta)f(x_b) \quad (3.3)$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$. A função é estritamente côncava se apenas a relação de desigualdade ($>$) é atendida.

Uma função é denominada convexa (apresenta ponto de mínimo) se na equação (3.3) o sinal de \geq for substituído por \leq , e estritamente convexa se o sinal de desigualdade for $<$.

Pode-se caracterizar a convexidade através da sua derivada segunda, ou seja a partir da matriz Hessiana da função.

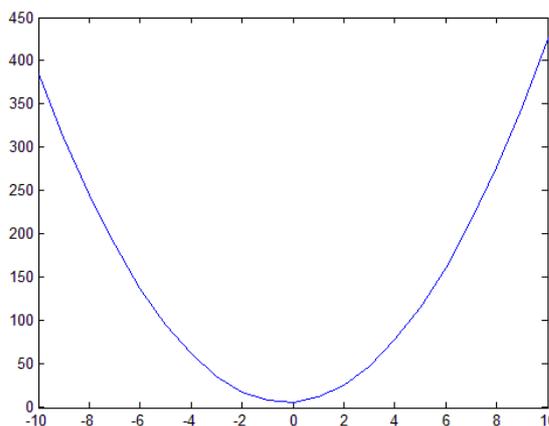


FIGURA 8 - Função Convexa
Fonte: Elaboração própria.

A FIG. 8 exibe uma função convexa. Uma função côncava pode ser vista na FIG. 5.

Em uma função multivariável, assim como em funções de uma única variável, a Hessiana define se a mesma é côncava ou convexa numa determinada região, ou seja, se possui máximo ou mínimo.

Estudo da Hessiana $H(x)$ da função objetivo $f(x)$:

1 - Se H é definida positiva, $f(x)$ é estritamente convexa. Então consiste de um problema de minimização e a solução global x^* é única.

2 - Se H é semidefinida positiva, $f(x)$ é convexa. Então consiste de um problema de minimização e x^* é uma solução global.

3 - Se H é definida negativa, $f(x)$ é estritamente côncava. Então consiste de um problema de maximização e a solução global x^* é única.

4 - Se H é semidefinida negativa, $f(x)$ é côncava. Então consiste de um problema de maximização e x^* é uma solução global.

5 - Se H é indefinida, f não é côncava e nem convexa.

6 - Se $H = 0$, f é simultaneamente côncava e convexa, deste modo f é uma função linear.

Seja $f(x)$ igual a:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{3.4}$$

se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são convexas, $f(x)$ também é convexa. Assim, pode-se analisar a convexidade de uma função através dos termos que a compõem. A mesma análise vale para funções côncavas.

3.2 Ponto e região factível

Considerando-se o problema de minimização:

$$\min\{f(x)\} \tag{3.5}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

s.a

$$c_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \tag{3.6}$$

ou seja, há m restrições.

Se um ponto x^f satisfaz todas as restrições do problema de minimização, então x^f é um ponto factível do problema (BAZARAA et al, 1993).

A região:

$$R^f : = \{x \in \mathbb{R}^n : c_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m\} \tag{3.7}$$

é chamada de região factível, pois é o conjunto de todos os pontos factíveis.

3.3 Multiplicadores de Lagrange

Um dos mais importantes e empregados métodos de minimização restrita é o chamado Método dos Multiplicadores de Lagrange, o qual consiste em um procedimento para obtenção dos candidatos aos pontos mínimos (ou máximos) de uma função diferenciável (denominada função objetivo) onde suas variáveis estão sujeitas a restrições (BAZARAA et al, 1993).

Considera-se o problema dado pela equação (3.5), sujeito as restrições dadas pela equação (3.6):

f : função objetivo

c_i : restrições

Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $c_i(x) = 0$ tem-se que x é ponto factível do problema. Se $\exists x^*$ factível e $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x$, então x^* é minimizador local restrito, ou seja, solução ótima do problema.

Define-se:

$$g := \nabla_x f \text{ ou } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (3.8)$$

$$G := \nabla_x^2 f \text{ ou } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right) \quad (3.9)$$

$$a_i = \nabla_x c_i \quad (3.10)$$

Se $\nabla_x f(x) = 0$, então tem-se que x é extremo de f . E se G é definida positiva, $G > 0$ (G é Hessiana da função f), então o ponto é mínimo.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange é uma condição necessária e baseia-se em encontrar (x^*, λ^*) que satisfaça:

$$\begin{cases} g(x) + \sum_{i=1}^m a_i(x) \lambda_i = 0 \\ c_i(x) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

onde λ_i são os multiplicadores de Lagrange.

A função:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x) \quad (3.12)$$

é chamada função lagrangeana.

Encontrar (x^*, λ^*) é o mesmo que resolver $\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0$, ou seja, (x^*, λ^*) deve ser um ponto estacionário da lagrangeana.

Exemplo:

Para o seguinte problema

$$\max\{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3\} \quad (3.13)$$

$$s.a \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (3.14)$$

Encontrar os candidatos a pontos extremos de f utilizando o método de Multiplicadores de Lagrange.

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \quad (3.15)$$

$$c_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (3.16)$$

A lagrangeana associada ao problema restrito é dada por:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + x_3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + x_3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 + x_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Assim, tem-se um sistema com quatro equações e quatro variáveis:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad (3.18)$$

cuja solução é:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad (3.19)$$

$$\lambda = -2 \quad (3.20)$$

$$f(x) = 3 \quad (\text{Valor ótimo}) \quad (3.21)$$

3.4 Otimização Quadrática

3.4.1 MÍNIMOS QUADRADOS NÃO-REGULARIZADOS

Considera-se J a função quadrática definida por:

$$J(x) = (Ax - b)^T(Ax - b) \quad (3.22)$$

Sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor de incógnitas. Considera-se agora o problema de minimização sem restrição:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\} \quad (3.23)$$

Uma solução mínima quadrática \hat{x} é uma solução com a seguinte propriedade:

$$\|A\hat{x} - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2 \quad (3.24)$$

para todo x , e $\|s\|^2 = s^T s$

Desenvolvendo $J(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= (Ax - b)^T(Ax - b) = (x^T A^T - b^T)(Ax - b) \\ &= x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, o problema de minimização pode ser reescrito como:

$$\min_x (x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b). \quad (3.26)$$

Diferenciando e igualando a zero:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = (A^T A)x + (A^T A)^T x - A^T b - A^T b = 0$$

$$\begin{aligned}
A^T Ax + A^T Ax - A^T b - A^T b &= 0 \\
2A^T Ax - 2A^T b &= 0 \\
A^T Ax &= A^T b.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Se A é possuir posto coluna pleno, $A^T A$ é invertível e segue que:

$$(A^T A)^{-1} A^T Ax = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{3.28}$$

e o valor ótimo \hat{x} é dado por:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b. \tag{3.29}$$

O valor mínimo assumido pelo função $J(x)$ é dado substituindo a equação (3.29) na equação (3.22):

$$\begin{aligned}
J(\hat{x}) &= (A\hat{x} - b)^T (A\hat{x} - b) = (A(A^T A)^{-1} A^T b - b)^T (A(A^T A)^{-1} A^T b - b) \\
&= [A(A^T A)^{-1} A^T b - b]^T [A(A^T A)^{-1} A^T b - b] \\
&= [b^T A((A^T A)^{-1})^T A^T - b^T] [A(A^T A)^{-1} A^T b - b] \\
&= b^T A((A^T A)^{-1})^T A^T A(A^T A)^{-1} A^T b - b^T A((A^T A)^{-1})^T A^T b - \\
&\quad - b^T A(A^T A)^{-1} A^T b + b^T b \\
&= b^T (A((A^T A)^{-1})^T A^T A(A^T A)^{-1} A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + \\
&\quad + I) b \\
&= b^T (A((A^T A)^{-1})^T (A^T A)(A^T A)^{-1} A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + \\
&\quad + I) b \\
&= b^T (A((A^T A)^{-1})^T I A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + I) b \\
&= b^T (A((A^T A)^{-1})^T A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + I) b \\
&= b^T (-A(A^T A)^{-1} A^T + I) b.
\end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$J(\hat{x}) = b^T (I - A(A^T A)^{-1} A^T) b. \tag{3.30}$$

3.4.2 MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS

Considerando-se o seguinte problema de minimização:

$$\min_x \{J(x)\} \quad (3.31)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

sendo:

$$J(x) = (Ax - b)^T W (Ax - b) \quad (3.32)$$

onde $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de ponderação simétrica definida positiva ($W = W^T > 0$), $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnitas.

Uma solução mínima ponderada \hat{x}_W é uma solução com a seguinte propriedade:

$$\|A\hat{x} - b\|_W^2 \leq \|Ax - b\|_W^2 \quad (3.33)$$

para todo x , e $\|s\|_W^2 = s^T W s$.

Desenvolvendo $J(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= (Ax - b)^T W (Ax - b) = (x^T A^T - b^T) W (Ax - b) \\ &= x^T A^T W Ax - x^T A^T W b - b^T W Ax + b^T W b. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Assim, o problema de minimização pode ser reescrito como:

$$\min_x (x^T A^T W Ax - x^T A^T W b - b^T W Ax + b^T W b). \quad (3.35)$$

Diferenciando e igualando a zero:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = (A^T W A)x + (A^T W A)^T x - A^T W b - A^T W b = 0$$

$$A^T W Ax + A^T W Ax - A^T W b - A^T W b = 0$$

$$2A^T W Ax - 2A^T W b = 0$$

$$A^T W A x = A^T W b. \quad (3.36)$$

Se W é definida positiva e A é posto coluna pleno então $A^T W A$ é invertível, segue que:

$$(A^T W A)^{-1} A^T W A x = (A^T W A)^{-1} A^T W b \quad (3.37)$$

e o valor ótimo \hat{x} é dado por:

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b. \quad (3.38)$$

O valor mínimo assumido pelo função $J(x)$ é dado substituindo a equação (3.38) na equação (3.32):

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) &= (A\hat{x} - b)^T W (A\hat{x} - b) \\ &= (A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b)^T W (A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b) \\ &= [A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b]^T W [A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b] \\ &= [b^T W A ((A^T W A)^{-1})^T A^T - b^T] W [A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b] \\ &= b^T W A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W b - \\ &\quad - b^T W A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W b - b^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W b + b^T W b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T (A^T W A) (A^T W A)^{-1} A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T I A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (- A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T (- W A (A^T W A)^{-1} A^T W + W) b. \end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$J(\hat{x}) = b^T (W - W A (A^T W A)^{-1} A^T W) b. \quad (3.39)$$

3.4.3 MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS

Considerando o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min_x \{J(x)\} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo:

$$J(x) = x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b) \quad (3.41)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de regularização simétrica definida positiva ($Q = Q^T > 0$), $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de ponderação simétrica definida positiva ($W = W^T > 0$), $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnitas.

Uma solução mínima regularizada \hat{x}_Q é uma solução com a seguinte propriedade:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \|A\hat{x} - b\|_W^2 \leq \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 \quad (3.42)$$

para todo x , e $\|s\|_Q^2 = s^T Q s$

Desenvolvendo $J(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b) = x^T Q x + (x^T A^T - b^T) W (Ax - b) \\ &= x^T Q x + x^T A^T W A x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Desta forma, o problema de minimização pode ser reescrito como:

$$\min_x (x^T Q x + x^T A^T W A x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b) \quad (3.44)$$

Diferenciando e igualando a zero:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2Qx + (A^T W A)x + (A^T W A)^T x - A^T W b - A^T W b = 0$$

$$\begin{aligned}
2Qx + A^T W A x + A^T W A x - A^T W b - A^T W b &= 0 \\
2Qx + 2A^T W A x - 2A^T W b &= 0 \\
Qx + A^T W A x &= A^T W b \\
(Q + A^T W A)x &= A^T W b.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Se Q é definida positiva então $(Q + A^T W A)$ é invertível mesmo que W seja semidefinida positiva, segue que:

$$(Q + A^T W A)^{-1}(Q + A^T W A)x = (Q + A^T W A)^{-1}A^T W b \tag{3.46}$$

e o valor ótimo \hat{x} é dado por:

$$\hat{x} = (Q + A^T W A)^{-1}A^T W b. \tag{3.47}$$

3.4.4 MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS COM INCERTEZAS

A estrutura BDU (Bounded Data Uncertainties) é um método de otimização que incorpora simultaneamente regularização e ponderação, e resolve um critério robusto para projetos de mínimos quadrados, na presença de dados incertos (SAYED e NASCIMENTO, 1999).

a) Formulação do problema BDU

Considerando um problema de otimização com incertezas nos dados, tem-se o seguinte custo funcional:

$$J(x, y) = x^T Q x + R(x, y), \tag{3.48}$$

De modo que, $x^T Q x$ é o termo de regularização e $R(x, y)$ é o custo residual definido por:

$$R(x, y) \triangleq (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy) \tag{3.49}$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de regularização, simétrica e definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a matriz de ponderação, simétrica e semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{N \times n}$ matriz nominal conhecida, $b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ vetor nominal conhecido, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vetor de variáveis, $H \in \mathbb{R}^{N \times m}$ matriz conhecida e $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vetor de perturbação não conhecido.

A presença de H e y na expressão (3.49), mostra a presença de incertezas nos parâmetros, o que se tornará mais evidente a partir das discussões que se seguem.

Para garantir um ótimo desempenho no pior caso, ou seja, maximizando as incertezas, considera-se um problema de otimização min-max da seguinte forma:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\|y\| \leq \phi(x)} J(x, y), \quad (3.50)$$

onde, $\|y\|$ representa a norma Euclidiana do vetor y ($\|y\| = (y^T y)^{\frac{1}{2}}$) e a função não-negativa $\phi(x)$ é o limite da perturbação em y e dependendo apenas de x .

Portanto, tem-se um problema do tipo jogos onde existe 2 (dois) jogadores oponentes, enquanto um tenta encontrar o mínimo custo em \hat{x} , o outro busca maximizar o custo de y , que é determinado pela função $\phi(x)$, dependente de x .

$$\min_x \max_{\|y\| \leq \phi(x)} [x^T Q x + (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy)]. \quad (3.51)$$

b) Solução do problema BDU

Pode-se notar que para todo y o custo residual $R(x, y)$ dado na equação (3.49), é convexo em x , portanto a seguinte maximização

$$C(x) \triangleq \max_{\|y\| \leq \phi(x)} R(x, y) \quad (3.52)$$

também é convexa em x . Como $x^T Q x$ é estritamente convexa em x e radialmente ilimitada quando $Q > 0$, pode-se dizer que $x^T Q x + C(x)$ também é estritamente convexa em x , o que implica que o problema de otimização tem um mínimo único e global em \hat{x} .

c) Problema de Maximização

O problema de maximização é resolvido fixando-se x , nota-se ainda que o valor máximo é encontrado na condição limite de y , ou seja $\|y\| = \phi(x)$, pode-se então substituir o sinal de inequação por um de igualdade. Deste modo é considerando o pior caso, onde as incertezas são máximas.

Assim, tem-se o seguinte problema sob restrição:

$$f(y) = \max_y [(Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy)] \quad (3.53)$$

s.a

$$c_1(y) = \|y\|^2 - \phi^2(x). \quad (\text{restrição}) \quad (3.54)$$

Aplicando o método de multiplicadores de Lagrange, o problema pode ser reescrito de forma irrestrita, através da seguinte função Lagrangeana:

$$L(y, \lambda) = (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy) - \lambda (\|y\|^2 - \phi^2(x)). \quad (3.55)$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= (x^T A^T - b^T + y^T H^T) W (Ax - b + Hy) - \lambda \|y\|^2 + \lambda \phi^2(x) \\ &= x^T A^T W Ax - x^T A^T W b + x^T A^T W Hy - b^T W Ax + b^T W b - b^T W Hy + \\ &+ y^T H^T W Ax - y^T H^T W b + y^T H^T W Hy - \lambda \|y\|^2 + \lambda \phi^2(x) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Como $\|y\|^2 = [(y^T y)^{\frac{1}{2}}]^2 = y^T y$,

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= x^T A^T W Ax - x^T A^T W b + x^T A^T W Hy - b^T W Ax + b^T W b - b^T W Hy + \\ &+ y^T H^T W Ax - y^T H^T W b + y^T H^T W Hy - \lambda y^T y + \lambda \phi^2(x). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Diferenciando $L(y, \lambda)$ em relação a y e λ a fim de obter os candidatos a valores ótimos/críticos, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = H^T W Ax - H^T W b + H^T W Ax - H^T W b + 2H^T W Hy - 2\lambda y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= 2H^T W A x - 2H^T W b + 2H^T W H y - 2\lambda y \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2H^T W (A x - b) + 2(-\lambda I + H^T W H)y\end{aligned}\quad (3.58)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -y^T y + \phi^2(x) = -\|y\|^2 + \phi^2(x). \quad (3.59)$$

Igualando a zero, obtêm-se as condições de otimalidade de primeira ordem:

$$\begin{aligned}2H^T W (A x - b) + 2(-\lambda I + H^T W H)y &= 0 \\ (\lambda^o I - H^T W H)y^o &= H^T W (A x - b)\end{aligned}\quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}-\|y\|^2 + \phi^2(x) &= 0 \\ \|y^o\| &= \phi(x)\end{aligned}\quad (3.61)$$

onde y^o e λ^o representam as soluções ótimas para y e λ , respectivamente. E a Hessiana com relação y fornece as condições de otimalidade de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y} = 2(-\lambda I + H^T W H) \quad (3.62)$$

para garantir as condições de um problema de maximização a segunda derivada da função deve ser negativa.

$$\begin{aligned}2(-\lambda I + H^T W H) &< 0 \\ -\lambda I + H^T W H &< 0 \\ \lambda I - H^T W H &> 0 \\ \lambda I &> H^T W H \\ \lambda &> \|H^T W H\|.\end{aligned}\quad (3.63)$$

Sendo assim λ^o deve satisfazer a condição $\lambda^o > \|H^T W H\|$.

Deve-se agora substituir o valor ótimo para y no problema, afim de se encontrar a função custo maximizada dada na equação (3.55):

$$y^o = (\lambda^o I - H^T W H)^{-1} H^T W (Ax - b). \quad (3.64)$$

Visando facilitar o desenvolvimento, assume-se que:

$$z = Ax - b \Rightarrow (z^T = x^T A^T - b^T) \quad (3.65)$$

$$\phi = \phi(x) \quad (3.66)$$

Assim, tem-se:

$$y^o = (\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z \quad (3.67)$$

$$L(y, \lambda) = (z + Hy)^T W (z + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2). \quad (3.68)$$

Desenvolvendo $L(y, \lambda)$:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= (z + Hy)^T W (z + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2) \\ &= (z^T + y^T H^T) W (z + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2). \end{aligned}$$

Como $\|y\|^2 = [(y^T y)^{\frac{1}{2}}]^2 = y^T y$,

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= (z^T + y^T H^T) W (z + Hy) - \lambda(y^T y - \phi^2) \\ &= z^T W z + z^T W H y + y^T H^T W z + y^T H^T W H y - \lambda y^T y + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W (z + Hy) + y^T (H^T W z + H^T W H y - \lambda y) + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W (z + Hy) + y^T [H^T W z + (H^T W H - \lambda I) y] + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W (z + Hy) + y^T [H^T W z - (\lambda I - H^T W H) y] + \lambda \phi^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

observar que λ (o multiplicador de Langrange) é um escalar, assim sua posição nas multiplicações não interfere o resultado final. O que não ocorreria caso fossem um vetor ou matriz, pois há um maior cuidado nas operações, uma vez que, as dimensões devem ser respeitadas para que se possa realizar as multiplicações.

Substituindo y pelo seu valor ótimo dado pela equação (3.67):

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= z^T W (z + Hy) + y^T [H^T W z - (\lambda I - H^T W H) y] + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W [z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ &+ [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ [H^T W z - \\ &- (\lambda I - H^T W H)(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] \} + \lambda \phi^2. \end{aligned}$$

Como uma matriz S , multiplicada pela sua matriz inversa S^{-1} , resulta na matriz identidade I , tem-se:

$$L(y, \lambda) = z^T W [z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ + [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ [H^T W z - I H^T W z] \} + \lambda \phi^2.$$

Como a matriz identidade I , multiplicada por uma matriz S resulta na própria matriz S , tem-se:

$$L(y, \lambda) = z^T W [z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ + [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ [H^T W z - H^T W z] \} + \lambda \phi^2 \\ = z^T W [z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ + [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ \Theta \} + \lambda \phi^2$$

onde Θ é uma matriz de zeros. Logo:

$$L(y, \lambda) = z^T W [z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \lambda \phi^2 \\ = z^T W [I + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] z + \lambda \phi^2 \\ L(y, \lambda) = z^T [W + W H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] z + \lambda \phi^2. \quad (3.70)$$

Considerando novamente as equações (3.65) e (3.66), a função custo maximizada dada em termos das variáveis independentes x e λ é:

$$C(x, \lambda) = (Ax - b)^T [W + W H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] (Ax - b) + \lambda \phi^2(x). \quad (3.71)$$

d) Problema de Minimização

Como o problema de maximização já foi solucionado, deve-se realizar a minimização em x . Porém uma nova condição, originada na maximização, deve ser respeitada:

$$\lambda^o = \arg \min_{\lambda > \|H^T W H\|} C(x, \lambda), \quad \lambda^o \equiv \lambda^o(x) \quad (3.72)$$

O problema inicial tem agora a seguinte formulação:

$$\min_x [x^T Qx + C(x)] = \min_x \min_{\lambda > \|H^T W H\|} [x^T Qx + C(x, \lambda)]$$

ou

$$\min_x [x^T Qx + C(x)] = \min_{\lambda > \|H^T W H\|} \min_x [x^T Qx + C(x, \lambda)]. \quad (3.73)$$

Deste modo, resolvendo-se a minimização em x , tem-se uma função dependente apenas de λ , a qual será representada por $G(\lambda)$:

$$G(\lambda) \triangleq \min_x [x^T Qx + C(x, \lambda)]. \quad (3.74)$$

Assume-se assim a seguinte função custo a ser minimizada em x , com o valor de λ fixo, obtido a partir da equação (3.74):

$$T(x, \lambda) = x^T Qx + C(x, \lambda). \quad (3.75)$$

Portanto,

$$T(x, \lambda) = x^T Qx + (Ax - b)^T [W + WH(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] (Ax - b) + \lambda \phi^2(x). \quad (3.76)$$

Objetivando compactar a notação, assume-se que:

$$W(\lambda) \triangleq W + WH(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W. \quad (3.77)$$

Observando que $W(\lambda)$ é um matriz simétrica, pois

$$W(\lambda) = W(\lambda)^T.$$

Logo, tem-se:

$$T(x, \lambda) = x^T Qx + (Ax - b)^T W(\lambda) (Ax - b) + \lambda \phi^2(x). \quad (3.78)$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
 T(x, \lambda) &= x^T Q x + (Ax - b)^T W(\lambda)(Ax - b) + \lambda \phi^2(x) \\
 &= x^T Q x + (x^T A^T - b^T) W(\lambda)(Ax - b) + \lambda \phi^2(x) \\
 &= x^T Q x + x^T A^T W(\lambda) A x - x^T A^T W(\lambda) b - b^T W(\lambda) A x + b^T b + \\
 &\quad + \lambda \phi^2(x).
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Diferenciando $T(x, \lambda)$ em relação a x :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial x} &= 2Qx + 2A^T W(\lambda) Ax - A^T W(\lambda) b - A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) \\
 &= 2Qx + 2A^T W(\lambda) Ax - 2A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) \\
 &= 2(Q + A^T W(\lambda) A)x - 2A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x)
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$\nabla \phi^2(x)$ representa o gradiente de $\phi^2(x)$ com respeito a x .

Igualando o resultado anterior a zero encontra-se as condições de otimalidade do problema de minimização:

$$\begin{aligned}
 2(Q + A^T W(\lambda) A)x - 2A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) &= 0 \\
 (Q + A^T W(\lambda) A)x + \frac{1}{2} \lambda \nabla \phi^2(x) &= A^T W(\lambda) b.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Novamente afim de compactar a notação considera-se:

$$M(\lambda) \triangleq Q + A^T W(\lambda) A \tag{3.82}$$

$$D(\lambda) \triangleq A^T W(\lambda) b. \tag{3.83}$$

Deste modo, tem-se:

$$M(\lambda)x + \frac{1}{2} \lambda \nabla \phi^2(x) = D(\lambda) \tag{3.84}$$

$x^o(\lambda)$ (valor ótimo para x em função de λ) pode ser encontrado como a solução única desta equação.

A função custo $G(\lambda)$, pode ser reescrita como:

$$G(\lambda) = x^{oT} Q x^o + C(x^o(\lambda), \lambda). \quad (3.85)$$

Pode-se então encontrar o valor ótimo λ^o através da seguinte minimização:

$$\lambda^o = \arg \min_{\lambda > \|H^T W H\|} G(\lambda). \quad (3.86)$$

E, portanto, a solução ótima é dada por:

$$\hat{x} = x^o(\lambda^o). \quad (3.87)$$

e) Tipos de incertezas

A liberdade na escolha de $\phi(x)$ permite lidar com diferentes modelos de incerteza. A formulação anterior permite que tanto as incertezas estruturadas e não estruturadas nos dados sejam consideradas. Destarte, tem-se dois casos especiais que correspondem às opções especiais da função $\phi(x)$.

Como o objetivo deste trabalho é lidar com as incertezas estruturadas, não será apresentada a dedução para a classe de incertezas não estruturadas.

Incetezas estruturadas: relacionadas entre si:

$$[\delta A \ \delta b] = HS[E_a \ E_b];$$

$$\delta A = HSE_a;$$

$$\delta b = HSE_b.$$

Ambas pertencem ao espaço criado por H .

Incetezas não estruturadas: não relacionadas entre si:

$$\|\delta A\| \leq \varepsilon_1;$$

$$\|\delta b\| \leq \varepsilon_2.$$

f) Incertezas estruturadas

Considerando agora o seguinte problema:

$$\min_x \max_{\delta A, \delta b} [x^T Q x + ((A + \delta A)x - (b + \delta b))^T W ((A + \delta A)x - (b + \delta b))], \quad (3.88)$$

Onde as incertezas δA e δb são modeladas através:

$$[\delta A \ \delta b] = HS[E_a \ E_b] \quad (3.89)$$

Isto é,

$$\delta A = HSE_a \quad (3.90)$$

$$\delta b = HSE_b, \quad (3.91)$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz de regularização, simétrica e definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de ponderação, simétrica e semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, S é uma contração arbitrária, $\|S\| \leq 1$, e $\{H, E_a, E_b\}$ são matrizes de dimensões apropriadas escolhidas pelo projetista. Este tipo de modelo de incertezas é comumente encontrado na teoria de filtragem e controle robusto e pode surgir a partir de especificações de tolerância em parâmetros físicos, uma vez que abrange uma grande classe de incertezas (SAYED et al, 2002). Deve-se considerar que as matrizes $\{Q, W, A, b, H, E_a, E_b\}$ são supostas conhecidas.

Desenvolvendo o problema dado na equação (3.88) tem-se:

$$\min_x \max_{\delta A, \delta b} [x^T Q x + (Ax + \delta Ax - b - \delta b)^T W (Ax + \delta Ax - b - \delta b)] \quad (3.92)$$

que equivale a

$$\min_x \max_{\delta A, \delta b} [x^T Q x + (Ax - b + (\delta Ax - \delta b))^T W (Ax - b + (\delta Ax - \delta b))]. \quad (3.93)$$

Comparando a situação atual com o problema min-max inicial dado pela equação (3.51), tem-se:

$$Hy = \delta Ax - \delta b \quad (3.94)$$

$$Hy = HSE_a x - HSE_b$$

$$Hy = HS(E_a x - E_b)$$

$$H^{-1}Hy = H^{-1}HS(E_a x - E_b)$$

$$y = S(E_a x - E_b)$$

$$\|y\| = \|S(E_a x - E_b)\|$$

$$\|y\| \leq \|S\| \|E_a x - E_b\| \quad (3.95)$$

Deste modo, como $\|S\| \leq 1$, indica que o máximo valor de $\|y\|$ é igual a $\|(E_a x - E_b)\|$, pode-se reescrever a função anterior como:

$$\|y\| \leq \|E_a x - E_b\|. \quad (3.96)$$

Com isso, é possível observar que o problema é um caso especial do problema min-max inicial com a escolha de $\phi(x)$ sendo:

$$\phi(x) = \|E_a x - E_b\|. \quad (3.97)$$

O problema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\min_x \max_{\|y\| \leq \|E_a x - E_b\|} [x^T Q x + (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy)]. \quad (3.98)$$

g) Solução para Incertezas Estruturadas

Após a solução genérica do problema e a escolha de $\phi(x)$ pode-se encontrar a solução ótima \hat{x} para o caso específico das incertezas estruturadas. Desenvolvendo $\phi(x)$ dado na equação (3.97):

$$\phi(x) = \|E_a x - E_b\| = ((E_a x - E_b)^T (E_a x - E_b))^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi^2(x) = \|E_a x - E_b\|^2 = [((E_a x - E_b)^T (E_a x - E_b))^{\frac{1}{2}}]^2 = ((E_a x - E_b)^T (E_a x - E_b))$$

$$= ((x^T E_a^T - E_b^T)(E_a x - E_b)) = x^T E_a^T E_a x - x^T E_a^T E_b - E_b^T E_a x + E_b^T E_b$$

$$\nabla \phi^2(x) = 2E_a^T E_a x - E_a^T E_b - E_b^T E_a = 2E_a^T E_a x - 2E_a^T E_b$$

$$\nabla \phi^2(x) = 2E_a^T (E_a x - E_b). \quad (3.99)$$

Substituindo na equação (3.84), tem-se:

$$\begin{aligned}
 M(\lambda)x + \frac{1}{2}\lambda[2E_a^T(E_ax - E_b)] &= D(\lambda) \\
 M(\lambda)x + \lambda E_a^T(E_ax - E_b) &= D(\lambda) \\
 M(\lambda)x + \lambda E_a^T E_ax - \lambda E_a^T E_b &= D(\lambda) \\
 (M(\lambda) + \lambda E_a^T E_a)x &= D(\lambda) + \lambda E_a^T E_b.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Logo, a solução ótima é dada por:

$$x^o(\lambda) = (M(\lambda) + \lambda E_a^T E_a)^{-1}(D(\lambda) + \lambda E_a^T E_b). \tag{3.101}$$

Destacando as equações (3.82) e (3.83), pode-se reescrever a solução ótima como:

$$x^o(\lambda) = (Q + A^T W(\lambda)A + \lambda E_a^T E_a)^{-1}(A^T W(\lambda)b + \lambda E_a^T E_b). \tag{3.102}$$

pois Q é definida positiva.

Assumindo aqui o valor ótimo de λ como λ^o , que este é dado pela equação (3.86) e que $G(\lambda)$ é definida pela equação (3.85), ou seja:

$$\begin{aligned}
 G(\lambda) &= x^o(\lambda)^T Q x^o(\lambda) + (Ax^o(\lambda) - b)^T [W + \\
 &\quad + WH(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] (Ax^o(\lambda) - b) + \lambda \|E_a x^o(\lambda) - E_b\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Tem-se então a solução ótima \hat{x} dado pela equação (3.87):

$$\hat{x} = (Q + A^T W(\lambda^o)A + \lambda^o E_a^T E_a)^{-1}(A^T W(\lambda^o)b + \lambda^o E_a^T E_b).$$

Definindo:

$$\hat{Q} \triangleq Q + \lambda^o E_a^T E_a \tag{3.104}$$

$$\hat{W} \triangleq W(\lambda^o) = W + WH(\lambda^o I - H^T W H)^{-1} H^T W. \tag{3.105}$$

com λ^o dado pelo expressão (3.86)

Tem-se que a solução única e global do problema é dada por:

$$\hat{x} = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1}(A^T \hat{W} b + \lambda^o E_a^T E_b). \tag{3.106}$$

4 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO NOMINAL

4.1 Introdução

Em problemas de controle ótimo tem-se uma função custo que deve ser minimizada e que é um índice de performance do sistema e sua minimização deve garantir o melhor desempenho possível do sistema.

A função custo é definida como uma função das variáveis de estado e também das variáveis da entrada de controle. Estas últimas são inseridas na função custo afim de limitar as entradas, pois caso contrário seria possível encontrar uma lei de controle ótimo na qual a entrada seria ilimitada, tornando assim o sistema fisicamente impossível.

O regulador linear quadrático é um regulador de estados que utiliza como índice de performance uma função quadrática em termos dos estados do sistema e do vetor de entrada (MOUDGALYA, 2007).

A lei de controle ótima baseada em critérios de otimização quadrático (índice de desempenho quadrático) é uma função linear dos vetores de estados.

O objetivo do LQR é levar o vetor de estados para zero, pois este é constituído de estados que são usualmente taxas de variação com relação ao estado estacionário, assim levando o vetor de estado a zero, leva-se o sistema ao estado estacionário.

4.2 Formulação do problema de controle ótimo

O problema inicial é encontrar uma entrada $u_k = \{u_0, \dots, u_{k-1}\}$ que leve os estados x_k de um sistema para zero o mais rápido possível e com o mínimo gasto de energia.

Tendo em vista o problema inicial, considera-se o sistema no espaço de estados dado por:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k, \quad (4.1)$$

sendo,

x_k o vetor de estados, $x_k \in \mathbb{R}^n$

u_k o vetor de entrada, $u_k \in \mathbb{R}^q$

F a matriz de estados, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

G a matriz de entrada, $G \in \mathbb{R}^{n \times q}$

Sendo o sistema (4.1) controlável, os estados nos instantes seguintes podem ser obtidos da seguinte forma,

$$x_{k+2} = Fx_{k+1} + Gu_{k+1} \quad (4.2)$$

$$x_{k+2} = F(Fx_k + Gu_k) + Gu_{k+1}$$

$$x_{k+2} = F^2x_k + FG u_k + Gu_{k+1}, \quad (4.3)$$

de forma análoga tem-se,

$$x_{k+3} = Fx_{k+2} + Gu_{k+2}$$

$$x_{k+3} = F^3x_k + F^2Gu_k + FG u_{k+1} + Gu_{k+2}. \quad (4.4)$$

De onde infere-se a equação geral de estados, fazendo k igual a 0:

$$x_n = F^n x_0 + \sum_{m=1}^n F^{n-m} G u_{m-1}. \quad (4.5)$$

Da equação acima pode-se observar que o estado x_n depende apenas de x_0 e das entradas passadas, nunca das entradas futuras.

Define-se agora a função custo em função da variável de estado x_k , da variável de entrada do sistema u_k .

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q_1 x_k + u_k^T Q_2 u_k] + \frac{1}{2} x_N^T Q_1 x_N \quad (4.6)$$

sujeito a equação (4.1), onde Q_1 e Q_2 são matrizes simétricas semidefinida e definida positiva respectivamente de forma que,

$$x_k^T Q_1 x_k \geq 0, \forall x$$

e

$$u_k^T Q_2 u_k > 0, \forall u$$

As matrizes Q_1 e Q_2 são matrizes de ponderação escolhidas pelo projetista.

Incorporando-se a restrição por meio de um vetor multiplicador de Lagrange aqui denotado por λ_{k+1} , o funcional definido em (4.6) pode ser escrito da seguinte forma:

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q_1 x_k + u_k^T Q_2 u_k] + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\lambda_{k+1}^T (-x_{k+1} + Fx_k + Gu_k) \right) + \frac{1}{2} x_N^T Q_1 x_N. \quad (4.7)$$

Para que J_1 seja minimizado suas derivadas parciais com respeito a x_k , u_k e λ_{k+1} , devem ser iguais a zero. Diferenciando, obtêm-se

$$\frac{\partial J_1}{\partial u(k)} = u_k^T Q_2 + \lambda_{k+1}^T G = 0 \quad (\text{equação de controle}) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \lambda(k+1)} = -x_{k+1} + Fx_k + Gu_k = 0 \quad (\text{equação de estados}) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial x(k)} = x_k^T Q_1 - \lambda_k^T + \lambda_{k+1}^T F = 0 \quad (\text{equação adjunta}) \quad (4.10)$$

A demonstração desta derivada pode ser vista no APÊNDICE B.1.

Como não se tem o valor de λ_0 não é possível resolver o problema recursivamente, o que leva a uma forma alternativa.

Observando a equação de estados dada na equação (4.1), pode-se inferir que a entrada u_N não interfere no sistema, pois o estado x_N , que é o ultimo estado de interesse, irá depender de x_{N-1} e u_{N-1} .

$$x_N = Fx_{N-1} + Gu_{N-1}. \quad (4.11)$$

Tendo esta observação em vista, considera-se a entrada u_N como sendo nula.

Assim, a partir da equação (4.8) no tempo N , têm-se

$$u_N^T Q_2 + \lambda_{N+1}^T G = 0 \quad (4.12)$$

como u_N^T é zero e o vetor G é diferente de zero

$$\lambda_{N+1} = 0. \quad (4.13)$$

E de acordo com a equação (4.10) no tempo N ,

$$\lambda_N^T = x_N^T Q_1 \quad (4.14)$$

ou de forma equivalente

$$\lambda_N = Q_1 x_N. \quad (4.15)$$

Supõe-se agora uma linearidade para todos os instantes tendo como base a equação (4.15), assim:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\lambda_k = P_k x_k \quad (4.17)$$

A equação (4.8) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Q_2 u_k + G^T \lambda_{k+1} &= 0 \\ Q_2 u_k &= -G^T \lambda_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sendo,

$$\lambda_{k+1} = P_{k+1} x_{k+1}$$

e substituindo na equação (4.18), encontra-se

$$\begin{aligned} Q_2 u_k &= -G^T P_{k+1} x_{k+1} \\ Q_2 u_k &= -G^T P_{k+1} (F x_k + G u_k) \\ Q_2 u_k &= -G^T P_{k+1} F x_k - G^T P_{k+1} G u_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

Reorganizando os termos em u_k e x_k ,

$$\begin{aligned} [Q_2 + G^T P_{k+1} G] u_k &= -G^T P_{k+1} F x_k \\ u_k &= -[Q_2 + G^T P_{k+1} G]^{-1} G^T P_{k+1} F x_k. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Retomando a equação adjunta (4.10), pode-se escrevê-la da seguinte forma

$$\lambda_k = F^T \lambda_{k+1} + Q_1^T x_k \quad (4.21)$$

como $Q_1^T = Q_1$ tem-se,

$$\lambda_k = F^T P_{k+1} x_{k+1} + Q_1 x_k \quad (4.22)$$

substituindo x_{k+1} da equação de estados (4.1),

$$\lambda_k = F^T P_{k+1} (F x_k + G u_k) + Q_1 x_k \quad (4.23)$$

e em seguida substituindo o valor de u_k dado pela equação (4.20), obtêm-se,

$$\lambda_k = F^T P_{k+1} [F x_k - G [Q_2 + G^T P_{k+1} G]^{-1} G^T P_{k+1} F x_k] + Q_1 x_k. \quad (4.24)$$

Abrevia-se a equação fazendo

$$R = Q_2 + G^T P_{k+1} G, \quad (4.25)$$

usado o valor de dado λ_k na equação (4.17) então escreve-se

$$P_k x_k = F^T P_{k+1} [F x_k - G R^{-1} G^T P_{k+1} F x_k] + Q_1 x_k. \quad (4.26)$$

Agrupando os termos da equação

$$[P_k - F^T P_{k+1} F + F^T P_{k+1} G R^{-1} G^T P_{k+1} F - Q_1] x_k = 0. \quad (4.27)$$

A equação acima deve ser satisfeita independente do valor de x_k , portanto

$$\begin{aligned} P_k - F^T P_{k+1} F + F^T P_{k+1} G R^{-1} G^T P_{k+1} F - Q_1 &= 0 \\ P_k &= F^T P_{k+1} F - F^T P_{k+1} G R^{-1} G^T P_{k+1} F + Q_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A equação (4.28) é conhecida como equação de Riccati em tempo discreto com R dado pela equação (4.25).

Com base nas equações (4.15) e (4.17) observa-se que

$$P_N = Q_1.$$

Pode-se assim calcular as entradas u_k por meio de um algoritmo retrogressivo, a partir da equação (4.20), para:

$$u_k = -K_k x_k \text{ (realimentação)} \quad (4.30)$$

tem-se:

$$K_k = [Q_2 + G^T P_{k+1} G]^{-1} G^T P_{k+1} F. \quad (4.31)$$

O seguinte algoritmo pode ser usado para calcular a sequência ótima de ganhos de realimentação da entrada K_k e também os valores de P_k .

- 1: $P_N = Q_1; K_N = 0; m = N$
- 2: repete
- 3: $M_k = P_k - P_k G [Q_2 + G^T P_k G]^{-1} G^T P_k$
- 4: $K_{k-1} = [Q_2 + G^T P_k G]^{-1} G^T P_k F$
- 5: $P_{k-1} = F^T M_k F + Q_1$
- 6: $m = k - 1$
- 7: até $m = 1$

Determina-se então o valor mínimo do funcional, primeiramente é necessário fazer uma observação a respeito da matriz P_k , como $P_N = Q_1$, assume-se que esta similaridade é condição suficiente para afirmar que P_k é simétrica semidefinida positiva.

A partir da equação de controle (4.8), obtêm-se o valor de u_k :

$$\begin{aligned} u_k^T Q_2 + \lambda_{k+1}^T G &= 0 \\ Q_2 u_k &= -G^T \lambda_{k+1} \\ u_k &= -Q_2^{-1} G^T \lambda_{k+1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

como $\lambda_{k+1} = P_{k+1} x_{k+1}$,

$$u_k = -Q_2^{-1} G^T P_{k+1} x_{k+1}. \quad (4.33)$$

Utiliza-se agora a equação adjunta (4.10) que pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \lambda_k &= Q_1 x_k + F^T \lambda_{k+1} \\ P_k x_k &= Q_1 x_k + F^T P_{k+1} x_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pré-multiplicando esta equação por x_k^T , tem-se

$$x_k^T P_k x_k = x_k^T Q_1 x_k + x_k^T F^T P_{k+1} x_{k+1}. \quad (4.35)$$

Substituindo a equação (4.33) na equação de estados (4.1)

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\
 x_{k+1} &= Fx_k - GQ_2^{-1}G^T P_{k+1}x_{k+1} \\
 [I + GQ_2^{-1}G^T P_{k+1}]x_{k+1} &= Fx_k.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Substituindo (4.36) em (4.35),

$$\begin{aligned}
 x_k^T P_k x_k &= x_k^T Q_1 x_k + x_{k+1}^T [I + GQ_2^{-1}G^T P_{k+1}]^T P_{k+1} x_{k+1} \\
 x_k^T Q_1 x_k &= x_k^T P_k x_k - x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} - x_{k+1}^T P_{k+1} GQ_2^{-1}G^T P_{k+1} x_{k+1}.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Com a equação acima encontrou-se a primeira parte do somatório, agora deve-se encontrar o valor de $u_k^T Q_2 u_k$.

Utilizando o mesmo resultado obtido em (4.33), de modo que:

$$\begin{aligned}
 u_k^T Q_2 u_k &= [-x_{k+1}^T P_{k+1} GQ_2^{-1}] Q_2 [-Q_2^{-1}G^T P_{k+1} x_{k+1}] \\
 u_k^T Q_2 u_k &= x_{k+1}^T P_{k+1} GQ_2^{-1}G^T P_{k+1} x_{k+1}.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Substituindo os resultados da equação (4.37) e (4.38) no funcional (4.6) a ser minimizado, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T P_k x_k - x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1}] + \frac{1}{2} x_N^T Q_1 x_N \\
 J &= \frac{1}{2} \left(x_0^T P_0 x_0 - x_1^T P_1 x_1 + x_1^T P_1 x_1 - x_2^T P_2 x_2 + \dots + x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1} - x_N^T P_N x_N \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} x_N^T Q_1 x_N.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Assim J é igual a,

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0 - \frac{1}{2} x_N^T P_N x_N + \frac{1}{2} x_N^T Q_1 x_N \\
 J &= \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

pois $P_N = Q_1$

Conclui-se assim que o mínimo do funcional dependerá do estado inicial e da matriz P_0 , por meio do algoritmo já mostrado é possível obter P_0 a partir de P_N .

4.3 Simulação Computacional do LQR proposto

Para avaliar a eficiência do algoritmo apresentado anteriormente, o mesmo foi implementado no MATLAB®, o qual é um software interativo de alta performance para cálculo numérico.

Na implementação utilizou-se um sistema discreto qualquer, e com o algoritmo encontrou-se a matriz K com os ganhos ótimos de realimentação, afim de levar os estados do sistema a zero. O resultado obtido foi comparado com o resultado do comando "dlqr" do próprio MATLAB®. O código do programa criado está no APÊNDICE C.1.

Considera-se o seguinte sistema discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad (4.41)$$

Para este sistema o vetor de estados x possui dois estados, $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, e seu valor inicial é:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

O objetivo é obter a lei de controle ótima u_k , dado por:

$$u_k = -K_k x_k \quad (4.43)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, 8$, utilizando o funcional dado na equação (4.6), onde:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$Q_2 = 1. \quad (4.45)$$

Através do algoritmo implementado obtêm-se a seguinte matriz de ganhos K :

$$K = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ K_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7691 & 1,2496 \\ -0,7691 & 1,2496 \\ -0,7689 & 1,2495 \\ -0,7680 & 1,2480 \\ -0,7655 & 1,2414 \\ -0,7647 & 1,2353 \\ -0,7500 & 1,2500 \\ -0,5000 & 1,0000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

A partir desta encontra-se o vetor de estados x :

$$x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9] \quad (4.47)$$

$$= \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,52 & 0,16 & 0,00 & -0,04 & -0,03 & -0,01 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,52 & 0,16 & 0,00 & -0,04 & -0,03 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Assim tem-se a lei de controle ótima:

$$u = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8]$$

$$= [-0,48 \ 0,12 \ 0,20 \ 0,12 \ 0,05 \ 0,01 \ -0,01 \ 0,00 \ 0] \quad (4.48)$$

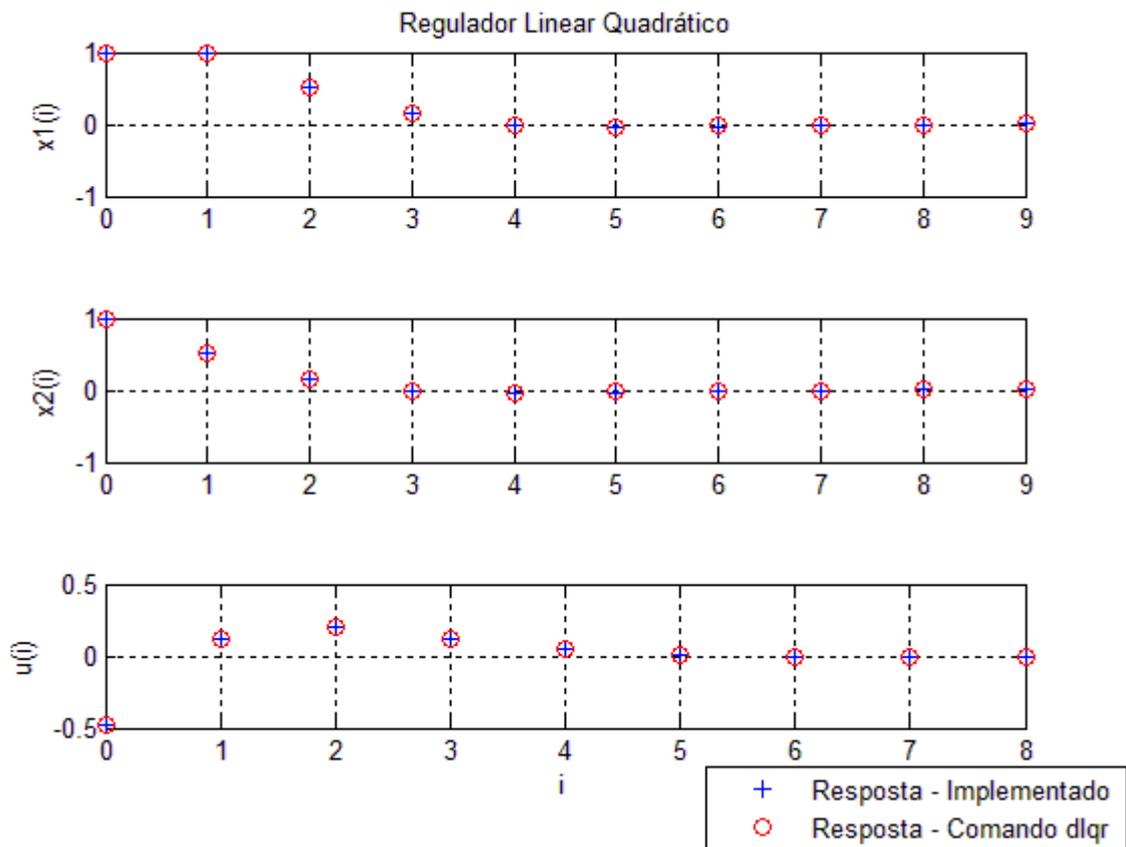


FIGURA 9 - Comparativo LQR proposto *versus* comando dlqr do MATLAB®
 Fonte: Elaboração própria.

Através do FIG. 9, onde $x_1(i)$ é o estado 1, $x_2(i)$ é o estado 2 e $u(i)$ é a lei de controle ótima, pode-se observar que a resposta obtida com algoritmo implementado é bem próxima da resposta obtida com o comando "dlqr", e também que os estados estão indo a zero, conforme esperado. Isto tudo vem validar o regulador linear quadrático e o algoritmo proposto.

5 REGULADOR ROBUSTO

Considera-se o seguinte sistema no espaço de estados:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k \quad (5.1)$$

onde x_0 é o estado inicial do sistema e u_k é a sequência de controle. O LQR apresentado no capítulo 4 busca encontrar a sequência de controle u_k que leve os estados a zero com o menor custo possível. Para a função custo a seguir:

$$V_k(x_{k+1}, u_k) = (x_{k+1}^T Q_1 x_{k+1} + u_k^T Q_2 u_k) \quad (5.2)$$

$$Q_1 = P_N.$$

O controle ótimo é obtido a partir da solução de:

$$\min_{\{u_0, u_1, \dots, u_N\}} (x_N^T P_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} [u_k^T Q_2 u_k + x_k^T Q_1 x_k]) \quad (5.3)$$

com $Q_2 > 0$, $Q_1 \geq 0$ e $P_N \geq 0$. Pode-se reescrever o problema em termos de V_k :

$$x_0^T Q_1 x_0 + \min_{\{u_0, u_1, \dots, u_N\}} (V_0 + V_1 + \dots + V_{N-1}) \quad (5.4)$$

que equivale a:

$$x_0^T Q_1 x_0 + \min_{u_0} \{V_0 + \min_{u_1} \{V_1 + \dots + \min_{u_N} \{V_{N-1}\}\}\}. \quad (5.5)$$

Os valores da sequência de controle podem ser encontrados através dos argumentos abaixo:

$$u_{k-1} = -K_{k-1} x_{k-1}, \quad (5.6)$$

$$K_{k-1} = (Q_2 + G_{k-1}^T P_k G_{k-1})^{-1} G_{k-1}^T P_k F_{k-1}, \quad (5.7)$$

$$P_{k-1} = Q_1 + K_{k-1}^T Q_2 K_{k-1} + (F_{k-1} - G_{k-1} K_{k-1})^T P_k (F_{k-1} - G_{k-1} K_{k-1}). \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é equivalente a equação (4.28), equação de Riccati, e a demonstração desta equivalência pode ser vista no APÊNDICE B.2.

O LQR mostrado anteriormente é sensível a incertezas na modelagem e para melhorar esta sensibilidade pode-se usar métodos de modelos robusto, como por exemplo os modelos H_∞ , custo garantido, LMI e BDU. Neste trabalho será utilizado o modelo BDU, já apresentado anteriormente no capítulo 3.

5.1 Espaço de estados com incertezas paramétricas

Considerando o sistema de espaços de estados sujeito a incertezas paramétricas estruturadas:

$$x_{k+1} = (F_k + \delta F_k)x_k + (G_k + \delta G_k)u_k \quad (5.9)$$

onde as incertezas δF_k e δG_k são modeladas através:

$$[\delta F_k \ \delta G_k] = HS[E_f \ E_g] \quad (5.10)$$

Isto é,

$$\delta F_k = HSE_f \quad (5.11)$$

$$\delta G_k = HSE_g \quad (5.12)$$

sendo que, S é uma contração arbitrária, $\|S\| \leq 1$, e $\{H, E_f, E_g\}$ são matrizes de dimensões apropriadas escolhidas pelo projetista.

O problema de determinação da sequência de controle ótima é igual a:

$$\begin{aligned} & x_0^T Q_1 x_0 + \min_{u_0} \max_{\delta F_0, \delta G_0} \{V_0 + \\ & + \min_{u_1} \max_{\delta F_1, \delta G_1} \{V_1 + \cdots + \min_{u_N} \max_{\delta F_N, \delta G_N} \{V_{N-1}\}\}\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2 Redução do problema LQR robusto ao problema BDU

O termo a ser minimizado no funcional do Problema LQR sujeito a incertezas paramétricas é dado por

$$V_{N-1} = u_{N-1}^T Q_2 u_{N-1} + x_N^T P_N x_N \quad (5.14)$$

s.a

$$x_N = (F_{N-1} + \delta F_{N-1})x_{N-1} + (G_{N-1} + \delta G_{N-1})u_{N-1} \quad (5.15)$$

sendo

$$\delta F_{N-1} = H S E_f \quad (5.16)$$

e

$$\delta G_{N-1} = H S E_g. \quad (5.17)$$

Por outro lado, o termo a ser minimizado no funcional BDU é

$$x^T Q x + ((A + \delta A)x - (b + \delta b))^T W ((A + \delta A)x - (b + \delta b)) \quad (5.18)$$

sendo que as incertezas paramétricas são modeladas como:

$$\delta A = H S E_A \quad (5.19)$$

e

$$\delta b = H S E_b. \quad (5.20)$$

Fazendo-se a comparação entre os termos, através das seguintes identificações

$$x \leftarrow u_{N-1}, A \leftarrow G_{N-1}, \delta A \leftarrow \delta G_{N-1}, E_A \leftarrow E_g, W \leftarrow P_N, Q \leftarrow Q_2, H \leftarrow H,$$

$$\begin{aligned}
-(b + \delta b) &\leftarrow (F_{N-1} + \delta F_{N-1})x_{N-1} \Rightarrow b \leftarrow -F_{N-1}x_{N-1} \text{ e } \delta b \leftarrow -\delta F_{N-1}x_{N-1}, \\
E_b &\leftarrow E_f x_{N-1}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

segue que a solução do problema BDU, igual a

$$\hat{x} = \left(\hat{Q} + A^T \hat{W} A \right)^{-1} A^T \hat{W} b \tag{5.22}$$

$$\hat{Q} = Q + \hat{\lambda} E_A^T E_A \tag{5.23}$$

$$\hat{W} = W + WH \left(\hat{\lambda} I - H^T W H \right)^{-1} H^T W \tag{5.24}$$

passa a fornecer os valores da sequência de controle ótima através do algoritmo:

$$\hat{\lambda}_{N-1} \geq \|H^T P_N H\| \tag{5.25}$$

$$u_{N-1} = -K_{N-1} x_{N-1}, \tag{5.26}$$

$$K_{N-1} = \left(\hat{Q}_{N-1} + G_{N-1}^T \hat{W}_N G_{N-1} \right)^{-1} G_{N-1}^T \hat{W}_N F_{N-1}, \tag{5.27}$$

$$\hat{Q}_{N-1} = Q_2 + \hat{\lambda}_{N-1} E_g^T E_g, \tag{5.28}$$

$$\hat{W}_N = P_N + P_N H \left(\hat{\lambda}_{N-1} I - H^T P_N H \right)^{-1} H^T P_N, \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
P_{N-1} &= Q_1 + K_{N-1}^T Q_2 K_{N-1} + (F_{N-1} - G_{N-1} K_{N-1})^T \hat{W}_N (F_{N-1} - G_{N-1} K_{N-1}) + \\
&+ \hat{\lambda}_{N-1} [K_{N-1}^T E_g^T E_g K_{N-1} - K_{N-1}^T E_g^T E_f - E_f^T E_g K_{N-1} + E_f^T E_f].
\end{aligned} \tag{5.30}$$

5.3 Simulação Computacional do LQR Robusto

Para verificar a melhora na resposta do regulador na presença de incertezas nos parâmetros, implementou-se no MATLAB® dois reguladores, um com o método de modelo robusto BDU e outro sem.

Utilizou-se um sistema discreto qualquer, sujeito a incertezas paramétricas estruturadas aleatórias. O código do programa criado está no APÊNDICE C.2.

Considera-se o seguinte sistema discreto dado pela equação (5.9), assume-se que:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5.31}$$

onde as incertezas δF_i e δG_i são dados pela equação (5.10), onde:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_f = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \text{ e } E_g = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

S é uma contração arbitrária, sendo que $\|S\| \leq 1$.

Para este sistema o vetor de estados x possui dois estados $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ e seu valor inicial é:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

O objetivo é obter a lei de controle ótima u_k , dado por:

$$u_k = -K_k x_k \quad (5.34)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, 15$, utilizando o funcional dado na equação (5.14), onde:

$$P_N = 0,01 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } Q_2 = 1. \quad (5.35)$$

Através das figuras abaixo pode-se ver as respostas obtidas do LQR e do regulador com o modelo robusto BDU (Regulador Robusto), dos estados x_1 , x_2 e u .

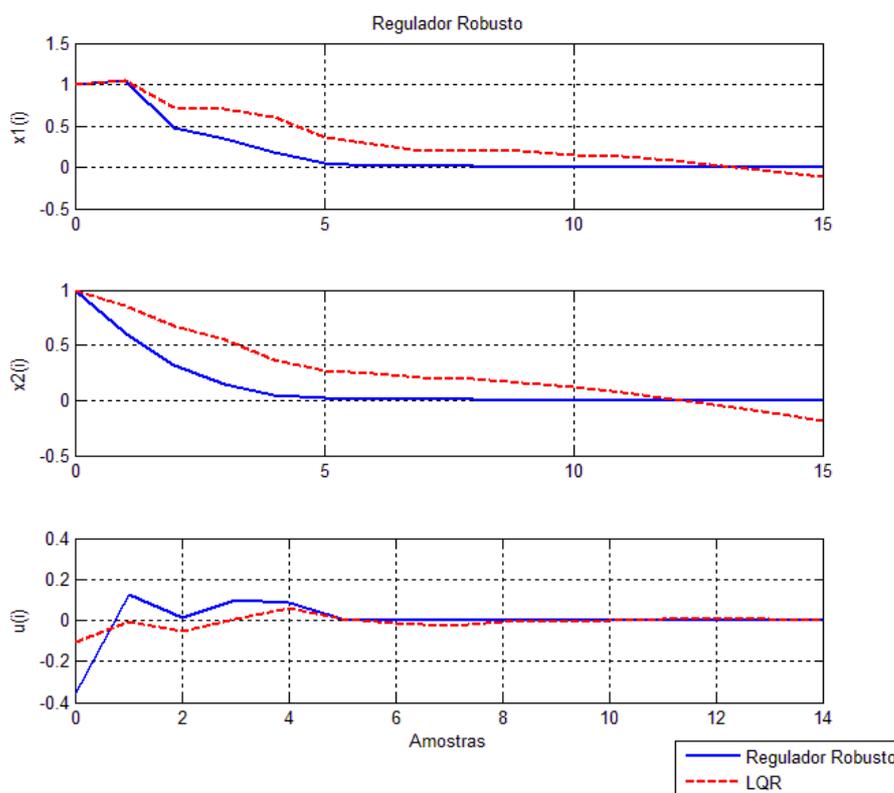


FIGURA 10 - Comparativo Regulador Robusto *versus* LQR, primeira simulação
Fonte: Elaboração própria.

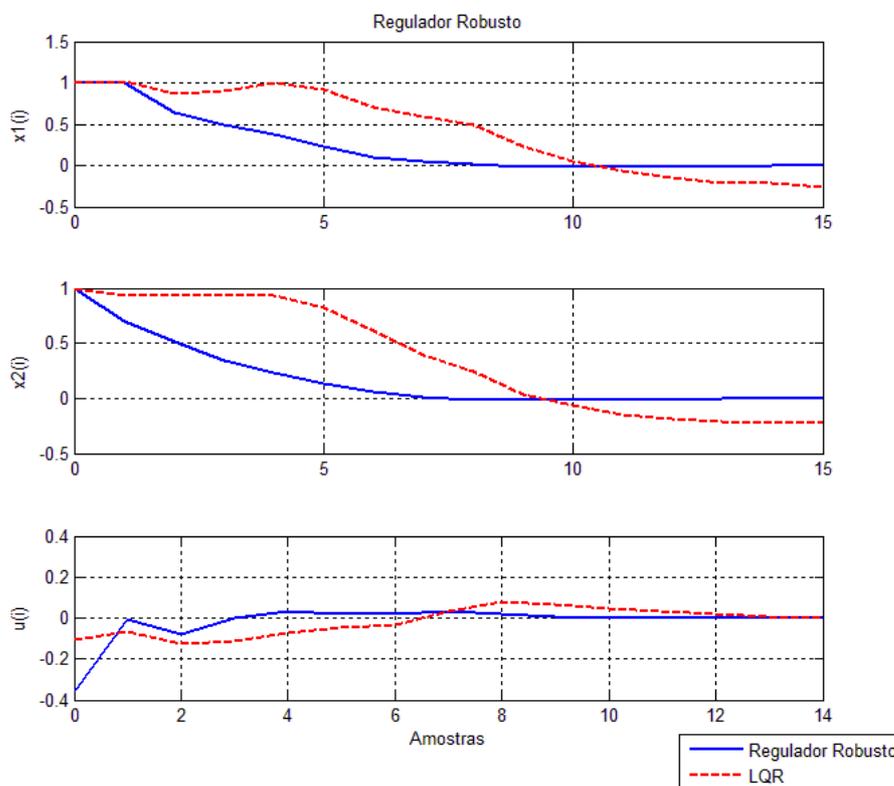


FIGURA 11 - Comparativo Regulador Robusto *versus* LQR, segunda simulação
Fonte: Elaboração própria.

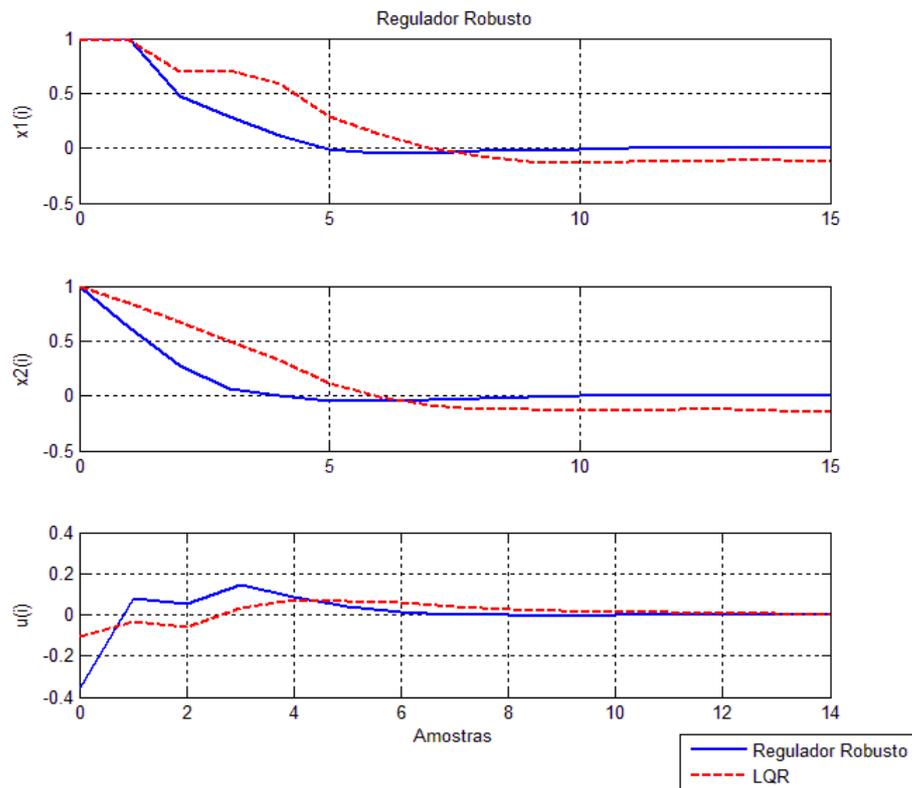


FIGURA 12 - Comparativo Regulador Robusto *versus* LQR, terceira simulação
 Fonte: Elaboração própria.

Como o programa gera uma sequência aleatória de incertezas, as FIG. 10, 11 e 12 representam a primeira, a segunda e a terceira simulação, respectivamente. Estas apresentam respostas diferentes, mas nota-se que o regulador robusto demonstrou uma melhor resposta em todos os casos, pois conseguiu levar o estado a zero em todas as situações geradas, ao contrário do LQR nominal. Isto mostra que o regulador robusto possui uma resposta melhor na presença de incertezas nos parâmetros, devido a estrutura BDU.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um Regulador Linear Quadrático (LQR) robusto, através da aplicação da estrutura obtida a partir do método de otimização Bounded Data Uncertainties (BDU).

Para isto, foi demonstrado a solução do método BDU para uma determinada classe de incertezas estruturadas, as quais abrangem uma grande gama de perturbações encontradas em sistemas reais a serem controlados. A fim de obter a solução ótima, aplicou-se o método de otimização Multiplicadores de Lagrange, também detalhado neste trabalho, que se trata de uma técnica amplamente utilizada em problemas de otimização sob restrição.

Demonstrou-se, também, a dedução do LQR nominal, novamente com a utilização dos Multiplicadores de Lagrange, obtendo-se um algoritmo que fornece a lei de controle ótima. Este foi simulado no MATLAB® e sua resposta foi comparada com a da função "dlqr" do software. As resposta foram muitas próximas, o que validou o LQR proposto.

A estrutura do método BDU ao LQR foi aplicada, considerando-se a classe de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas, a fim de prover o mesmo de robustez.

O algoritmo do LQR robusto obtido também foi simulado no MATLAB® e, posteriormente, comparado ao LQR sem robustez. Ressalta-se que ambos foram submetidos aos sistemas incertos, cujas incertezas estruturadas foram geradas de forma aleatória. Observou-se que o LQR robusto apresentou um melhor desempenho, se comparado ao LQR nominal, em todas as simulações.

Esses resultados mostraram que a estrutura BDU proporcionou ao LQR nominal a propriedade da robustez, diminuindo assim a sensibilidade a incertezas e melhorando a regulação do sistema.

Como todo modelo matemático é uma aproximação do sistema real, ou seja, na engenharia não há sistemas exatos, o estudo e a aplicação de tais métodos em sistemas de controle é uma opção extremamente interessante e vantajosa.

Neste trabalho, outro ponto relevante apresentado foi a grande aplicabilidade do método de otimização dos multiplicadores de Lagrange, tanto nas deduções para os sistemas nominais, quanto aos sujeitos a incertezas nos parâmetros.

Conclui-se, então, que os objetivos propostos foram alcançados de maneira satisfatória, tanto na obtenção dos reguladores robustos, quanto nas simulações computacionais feitas para validação do modelo proposto.

Trabalhos posteriores nessa área de estudo serão de grande valor, visto que outras classes de incertezas devem ser contempladas, bem como as demais técnicas de otimização podem ser aplicadas à teoria de controle moderno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de Automática: Controle & Automação**, v. I. São Paulo: Blucher, 2007.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. 2. ed. New York: Wiley-Interscience, 1993.

CERRI, J. P. **Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado**, 126f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2009,

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

MOUDGALYA, K. M. **Digital Control**. Chichester: John Wiley & Sons, 2007.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistema de Controle**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In: A. Garulli; A. Tesi; A. Vicino. (Org.). **Robustness in Identification and Control**. Londres: Springer-Verlag, 1999, v. 245, p. 159-173.

SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H.; CIPPARRONE, F. A. M. A Regularized Robust Design Criterion for Uncertain Data. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 23, n. 4, p. 1120-1142, 2002.

APÊNDICE A

Conceitos Matemáticos

Para resolver problemas de otimização é necessário esclarecer alguns conceitos matemáticos utilizados neste trabalho, pois estes formam a base para a busca pela solução ótima. Assim sendo, para o entendimento dos estudos que serão apresentados ao longo da pesquisa, apresenta-se abaixo conceitos de termos imprescindíveis :

A.1 Álgebra Matricial

Uma matriz é um conjunto de números ou funções dispostos em linhas e colunas, sendo que cada elemento de uma matriz A é denominado de a_{ij} , onde i é o índice das linhas e j é o índice das colunas.

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Se uma matriz possui o número de linhas igual a n e o número de colunas também é igual a n , esta é denominada matriz quadrada de ordem n . A matriz identidade I é uma matriz quadrada onde todos os elementos são iguais a zero, exceto os da diagonal principal que são iguais a 1:

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Vetores são matrizes que têm apenas uma linha ou uma coluna:

$$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A transposta de uma matriz (A^T) é a matriz resultante da troca das linhas pelas colunas da matriz original, ou seja, o elemento a_{ij} se torna a_{ji} :

$$X_{1 \times n}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

Se uma matriz A for igual A^T , diz-se que A é uma matriz simétrica.

a) Operações Básicas

- Igualdade:

$A = B$ se e somente se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e j .

- Adição:

$A + B = C$ se e somente se $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j . As dimensões de A e B devem ser iguais.

- Multiplicação:

$A_{n \times m} \times B_{m \times r} = C_{n \times r}$ A multiplicação de matriz só pode ser realizada se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B . Sendo que cada elemento da matriz C é obtido pelo somatório do produto dos elementos da linha i da matriz A pelo correspondente da coluna j da matriz B , ou seja:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

- Propriedades da multiplicação

De modo geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa:

$$AB \neq BA$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar:

$$sA = B \Leftrightarrow sa_{ij} = b_{ij}$$

O escalar multiplica todos os elementos da matriz.

b) Transposta de um produto de matrizes:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

c) Produto entre vetores:

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

A.2 Matriz Inversa

Uma matriz quadrada A é invertível, ou seja, possui inversa, se existir uma matriz B , de modo que :

$$AB = BA = I$$

onde I é a matriz identidade e B pode ser denotada como A^{-1} .

Para que uma matriz possua inversa, seu determinante deve ser diferente de zero.

Matriz Inversa do produto de matrizes

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

A.3 Matriz Cofatora

Para cada elemento de uma matriz quadrada A , ou seja, a_{ij} pode-se construir uma matriz cofatora, denotada A_{ij} , através da retirada da linha i e da coluna j da matriz original e multiplicando por $(-1)^{i+j}$.

Exemplo:

Seja a matriz quadrada A de ordem 3:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A matriz cofatora A_{11} é igual a:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A.4 Determinante

Toda matriz quadrada composta de números reais $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está associada a um número real, o qual chama-se de determinante da matriz. Pode-se denotar o determinante da matriz A por $\det[A]$ ou $|A|$.

Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 1:

$$\det[A_{1 \times 1}] = a_{11}$$

Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 2:

$$\det[A_{2 \times 2}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3:

$$\det[A_{3 \times 3}] = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Cálculo do determinante de uma matriz de ordem n :

$$\det[A_{n \times n}] = a_{i1}\det(A_{i1}) + a_{i2}\det(A_{i2}) + \cdots + a_{in}\det(A_{in})$$

para cada linha $i = 1, 2, \dots, n$ fixada.

ou

$$\det[A_{n \times n}] = a_{1j}\det(A_{1j}) + a_{2j}\det(A_{2j}) + \cdots + a_{nj}\det(A_{nj})$$

para cada coluna $j = 1, 2, \dots, n$ fixada.

Uma matriz só é invertível se seu determinante for diferente de zero.

A.5 Derivada Matricial

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, x e $y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então:

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^T x) = y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T A x) = A x + A^T x$$

Se A é simétrica,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T A x) = 2A x$$

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T A y) = A y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^T A y) = A^T x$$

A.6 Matriz Jacobiana e Matriz Hessiana

Seja f uma função real $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a matriz Jacobiana (J de $f_1(X), \dots, f_n(X)$), é dada pela derivada primeira de f :

$$JF(x_1, \dots, x_n) = \nabla f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Para uma função real $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a matriz Hessiana (H de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$), é dada pela derivada segunda de f :

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

A.7 Positividade

Dada uma matriz A simétrica, a forma quadrática é definida como $Q_A(x) = x^T A x$, para $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Definida Positiva

Uma matriz é chamada definida positiva se a forma quadrática associada a A , $Q_A(x) > 0, \forall x \neq 0$.

Os testes a seguir são condições necessárias e suficientes para que uma matriz A simétrica seja positiva:

1. $x^T A x > 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são positivos.
3. Todos os pivôs são positivos.

b) Semidefinida Positiva

Uma matriz é chamada semidefinida positiva se a forma quadrática associada a A , $Q_A(x) \geq 0, \forall x \neq 0$.

Os testes a seguir são condições necessárias e suficientes para que uma matriz A simétrica seja semidefinida positiva:

1. $x^T Ax \geq 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são não-negativos (≥ 0).
3. Todos os pivôs são não-negativos.

c) Definida Negativa

Uma matriz é chamada definida negativa se a forma quadrática associada a A , $Q_A(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Os testes a seguir são condições necessárias e suficientes para que uma matriz A simétrica seja negativa:

1. $x^T Ax < 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são negativos.
3. Todos os pivôs são negativos.

d) Semidefinida Negativa

Uma matriz é chamada semidefinida negativa se a forma quadrática associada a A , $Q_A(x) \leq 0, \forall x \neq 0$.

Os testes a seguir são condições necessárias e suficientes para que uma matriz A simétrica seja semidefinida negativa:

1. $x^T Ax \leq 0, \forall x \neq 0$.

2. Todos os autovalores de A são não-positivos (≤ 0).
3. Todos os pivôs são não-positivos.

e) Indefinida

A é indefinida, se para alguns valores de x , $x^T Ax < 0$ e para outros $x^T Ax > 0$. Neste caso, A apresenta alguns autovalores positivos e outros negativos.

APÊNDICE B

Demonstrações auxiliares

B.1 Demonstração da Derivada da função dada pela Equação (4.7)

Considere dois somatórios L_1 e L_2 definidos como:

$$L_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k+1}^T (f(x_k, u_k) - x_{k+1}) \quad \text{e} \quad L_2 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{k+1}^T f(x_k, u_k) - \lambda_k^T x_k$$

Pretendemos aqui demonstrar que $\nabla_x L_1 = \nabla_x L_2$, para tanto, prosseguiremos da seguinte forma.

Vamos definir N como sendo 4, e em seguida expandir os dois somatórios.

Expandindo L_1 para k igual a 0,1,2,3.

$$L_1 = \lambda_1^T f(x_0, u_0) - \lambda_1^T x_1 + \lambda_2^T f(x_1, u_1) - \lambda_2^T x_2 + \lambda_3^T f(x_2, u_2) - \lambda_3^T x_3 + \lambda_4^T f(x_3, u_3) - \lambda_4^T x_4$$

Expandindo L_2 para k igual a 1,2,3.

$$L_2 = \lambda_2^T f(x_1, u_1) - \lambda_1^T x_1 + \lambda_3^T f(x_2, u_2) - \lambda_2^T x_2 + \lambda_4^T f(x_3, u_3) - \lambda_3^T x_3$$

Sendo $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, x_k e $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$, podemos definir:

$$\nabla_x L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Supondo as condições iniciais nulas, ou seja, $x_0 = 0$, vamos derivar os dois somatórios considerando as derivadas de 1 até 3.

Definindo,

$$\frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x_i} = G_i$$

temos:

$$\nabla_x \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_1^T + \lambda_2^T G_1 \\ -\lambda_2^T + \lambda_3^T G_2 \\ -\lambda_3^T + \lambda_4^T G_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla_x \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2^T G_1 - \lambda_1^T \\ \lambda_3^T G_2 - \lambda_2^T \\ \lambda_4^T G_3 - \lambda_3^T \end{bmatrix}$$

Assim mostramos que o gradiente de \mathbf{L}_1 é igual ao gradiente de \mathbf{L}_2 .

Podemos escrever o gradiente de \mathbf{L}_1 como:

$$\nabla_x \mathbf{L}_1 = \lambda_{k+1}^T \nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k) - \lambda_k^T$$

Resultado este, utilizado na demonstração do regulador linear quadrático por meio de multiplicadores de lagrange.

Definindo,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)) + \frac{1}{2} x^T(N) Q_f x(N)$$

como sendo um problema de minimização, sujeito a:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A x_k + B u_k$$

Inserimos o multiplicador de lagrange afim de tornar o problema de minimização irrestrito, e assim temos

$$\mathbf{J}' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)) + \frac{1}{2} x^T(N) Q_f x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k+1}^T (A x_k + B u_k - x_{k+1})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial J'}{\partial x_k} &= x_k^T Q_1 - \nabla_x (\lambda_{k+1}^T (Ax_k + Bu_k - x_{k+1})) \\ &= x_k^T Q_1 - \lambda_{k+1}^T A - \lambda_k^T\end{aligned}$$

B.2 Equivalência entre as Equações Algébricas de Riccati (5.8) e (4.28)

Dado (equação (4.28)):

$$P_i = F^T [P_{i+1} - P_{i+1} G R^{-1} G^T P_{i+1}] F + Q_1.$$

onde:

$$\begin{aligned}R &= Q_2 + G^T P_{i+1} G \\ K_i &= R^{-1} G^T P_{i+1} F.\end{aligned}$$

Mostrar a equivalência com (equação (5.8) no tempo i):

$$P_i = Q_1 + K_i^T Q_2 K_i + (F - G K_i)^T P_{i+1} (F - G K_i)$$

Desenvolvimento:

$$\begin{aligned}P_i &= F^T (P_{i+1} - P_{i+1} G R^{-1} G^T P_{i+1}) F + Q_1 \\ P_i &= Q_1 + F^T (P_{i+1} F - P_{i+1} G R^{-1} G^T P_{i+1} F) \\ P_i &= Q_1 + F^T (P_{i+1} F - P_{i+1} G K_i) \\ P_i &= Q_1 + F^T P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + (F^T + K_i^T G^T - K_i^T G^T) P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + F^T P_{i+1} (F - G K_i) + K_i^T G^T P_{i+1} (F - G K_i) - K_i^T G^T P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + K_i^T G^T P_{i+1} (F - G K_i) + (F^T - K_i^T G^T) P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + K_i^T G^T P_{i+1} F - K_i^T G^T P_{i+1} G K_i + (F - G K_i)^T P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + K_i^T R K_i - K_i^T G^T P_{i+1} G K_i + (F - G K_i)^T P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + K_i^T (Q_2 + G^T P_{i+1} G) K_i - K_i^T G^T P_{i+1} G K_i + (F - G K_i)^T P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + K_i^T Q_2 K_i + K_i^T G^T P_{i+1} G K_i - K_i^T G^T P_{i+1} G K_i + \\ &\quad + (F - G K_i)^T P_{i+1} (F - G K_i) \\ P_i &= Q_1 + K_i^T Q_2 K_i + (F - G K_i)^T P_{i+1} (F - G K_i).\end{aligned}$$

APÊNDICE C

Códigos Fontes

C.1 Código Fonte do Programa criado no MATLAB® para simular o LQR Nominal

```
%%%%%%%%%%%%%% Inicio do programa%%%%%%%%%%%%%%
```

```
close all % Remove todas as figuras
clear all % Remove todas as variáveis da área de trabalho
clc % Limpa a janela de comandos
```

```
A=[0 1;-1 2];
B=[0;1];
x0(:,1)=[1;1];
Q1=[1 0;0 0];
Q2=1;
```

```
P=Q1;
N=9;
```

```
for m=N:-1:1
M=(P-(P*B*(inv(Q2+B'*P*B))*B'*P));
Kl(m,:)=((inv(Q2+B'*P*B))*B'*P*A);
P=((A'*M*A)+Q1);
end
```

```
for cont=1:9
x0(:,cont+1)=(A-B*Kl(cont,:))*x0(:,cont);
uOtimo(cont)=-Kl(cont,:)*x0(:,cont);
end
```

```
[KM,P,E]=dlqr(A,B,Q1,Q2);
x1(:,1)=[1;1];
```

```
for cont1=1:9
x1(:,cont1+1)=(A-B*KM)*x1(:,cont1);
u1Otimo(cont1)=-KM*x1(:,cont1);
end
```

```
disp('A lei de controle u*(k), k=0,1,...,9 para minimizar JN(u) é')
disp('Implementado')
uOtimo
disp('Usando o comando dlqr')
u1Otimo
```

```

% Plotando
k=0:9;
k1=0:8;
x0=x0';
x1=x1';
subplot(3,1,1)
plot(k,x0(:,1),'b+',k,x1(:,1),'ro')
title('Regulador Linear Quadrático')
ylabel('x1(i)')

grid
subplot(3,1,2)
plot(k,x0(:,2),'b+',k,x1(:,2),'ro')
ylabel('x2(i)')
grid;
subplot(3,1,3)
plot(k1,uOtimo,'b+',k1,u1Otimo,'ro')
ylabel('u(i)')
xlabel('i')
grid
legend('Resposta - Implementado', 'Resposta - Comando dlqr')

%%%%%%%%%% Final do programa %%%%%%%%%%%

```

C.2 Código Fonte do Programa criado no MATLAB® para simular o LQR Robusto

```

%%%%%%%%%% Inicio do programa%%%%%%%%%%

close all % Remove todas as figuras
clear all % Remove todas as variáveis da área de trabalho
clc % Limpa a janela de comandos

A=[0 1;-1 2];
B=[0;1];
x0(:,1)=[1;1];
Q1=.01*[1 0;0 1];
Q2=1;

Fn=A;
Gn=B;
Eg=0.1*[1;-1];
Ef=0.1*[1 1;-1 1];
H=[1 0;0 1];

[IH,cH] = size(H);
[IEg,cEg] = size(Eg);

```

```

x1(:,1)=[1;1];

P=Q1;
Q=Q2;
R=Q1;
S=Q1;
N=15;
n=size(H'*P*H);

for m=N:-1:1
lambda=10*(norm(H'*P*H));
Qo=Q+(lambda*Eg'*Eg);
W=P+(P*H*(inv((lambda*eye(n))-(H'*P*H)))*H'*P);
K=(inv(Qo+(Gn'*W*Gn))*Gn'*W*Fn);
P=R+(K'*Q*K)+((Fn-Gn*K)'*W*(Fn-Gn*K))+(lambda*(K'*Eg'*Eg*K-K'*Eg'*Ef-
Ef'*Eg*K+Ef'*Ef));
KR(m,:)=K;
end

for m=N:-1:1
M=(S-(S*B*(inv(Q2+B'*S*B))*B'*S));
Kl(m,:)=((inv(Q2+B'*S*B))*B'*S*A);
S=((A'*M*A)+Q1);
end

for cont=1:N
delta = randn(cH,IEg);
while norm(delta)>1
delta = randn(cH,IEg);
end
dF=H*delta*Ef;
dG=H*delta*Eg;
x0(:,cont+1)=((Fn+dF)-(Gn+dG)*KR(cont,:))*x0(:,cont);
uOtimo(cont)=-KR(cont,:)*x0(:,cont);
x1(:,cont+1)=((Fn+dF)-(Gn+dG)*Kl(cont,:))*x1(:,cont);
u1Otimo(cont)=-Kl(cont,:)*x1(:,cont);
end

disp('A lei de controle u*(k), k=0,1,...,9 para minimizar JN(u) é')
disp('Implementado')
uOtimo
disp('Usando o comando dlqr')
u1Otimo

% Plotando
k=0:N;
k1=0:N-1;
x0=x0';
x1=x1';
subplot(3,1,1)

```

```
plot(k,x0(:,1),'b-',k,x1(:,1),'r-')  
title('Regulador Robusto')  
ylabel('x1(i)')
```

```
grid  
subplot(3,1,2)  
plot(k,x0(:,2),'b-',k,x1(:,2),'r-')  
ylabel('x2(i)')  
grid;  
subplot(3,1,3)  
plot(k1,uOtimo,'b-',k1,u1Otimo,'r-')  
ylabel('u(i)')  
xlabel('Amostras')  
grid  
legend('Regulador Robusto', 'LQR')
```

```
%%%%%%%%%% Final do programa %%%%%%%%%%%
```