

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS
GERAIS

Engenharia de Automação Industrial



**FILTRAGEM ROBUSTA NO ESPAÇO DE ESTADOS: Uma
abordagem utilizando método dos Mínimos Quadrados
Regularizados com Incertezas**

Luis Paulo Fagundes

Araxá (MG)
2012

Luis Paulo Fagundes

**FILTRAGEM ROBUSTA NO ESPAÇO DE ESTADOS: Uma
abordagem utilizando método dos Mínimos Quadrados
Regularizados com Incertezas**

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Centro de Educação Tecnológica de Minas Gerais / Campus-IV - Araxá, como parte dos requisitos para obtenção do título de engenheiro de Automação Industrial.

Orientador: DRA. ALINE FERNANDA BIANCO

Araxá (MG)
2012



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
CAMPUS IV – ARAXÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ATA DE DEFESA

ATA da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia de Automação Industrial do(a) aluno(a) _____.

Às _____ horas do dia ____ do mês de _____ de _____, reuniu-se no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG/CAMPUS IV - ARAXÁ, a Comissão Examinadora de Trabalho de Conclusão de Curso para julgar, na condição de exame final e como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Engenheiro(a) de Automação Industrial o trabalho intitulado _____

Abrindo a sessão, o(a) Presidente(a) da Comissão, Prof(a). _____

_____, após dar ciência aos presentes sobre o teor das Normas Regulamentares para Trabalhos de Conclusão de Cursos do CEFET-MG, passou a palavra ao(a) aluno(a) para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do(a) candidato(a). Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do(a) aluno(a) e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas indicações de nota entre 0 e 100 e conceito Aprovado = **A** ou Reprovado = **R**.

Prof(a). _____ (Orientador/a) conceito: ____ nota: ____/100

Prof(a). _____ conceito: ____ nota: ____/100

Prof(a). _____ conceito: ____ nota: ____/100

Pela média das notas registradas acima, o(a) aluno(a) foi considerado(a) _____, com nota final igual a ____/100, resultado informado publicamente pelo Presidente da Comissão. O(a) aluno(a) abaixo assinado declara que o trabalho ora identificado e apresentado é da sua autoria material e intelectual, excetuando eventuais elementos tais como passagens de texto, citações, figuras e datas, desde que as mesmas tenham identificadas claramente a fonte original, explicitando as autorizações obtidas dos respectivos autores, quando necessárias. Declara ainda, neste âmbito, não estar violando quaisquer direitos de terceiros.

Nome do(a) aluno(a)

Assinatura

Data

Nada mais havendo a registrar eu, Presidente da Comissão, lavro a presente ATA, que será assinada por mim e pelos demais membros da Banca. Araxá, ____ de _____ de 20____.

Dedico este trabalho aos meus pais Joel Alvarenga Fagundes e Divina Maria Alvarenga (em memória) por todo o esforço e dedicação prestados.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu pai Joel por tornar esta conquista possível, por todo carinho e dedicação e por ser além de pai um amigo para todos os momentos.

A minha mãe que sonhou muito com esta vitória e por não haver um sonho bom em que ela não esteja presente.

Aos meus irmãos Cláudio e Rosângela que sempre estiverem presentes nos momentos bons e ruins.

A minha madrinha Maria por ser uma segunda mãe e por todo apoio prestado.

A minha orientadora Dra. Aline Fernanda Bianco por ser uma amiga, orientadora e por ter me inspirado a trilhar este caminho tão desafiador.

Enfim, agradeço a todos os amigos que sempre estiveram presentes na minha vida. Sem vocês essa caminhada não seria tão feliz quanto foi.

Obrigado!

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre filtragem de Estados de sistemas dinâmicos sujeito a incertezas paramétricas na estrutura do modelo. É apresentado um filtro robusto baseado no método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas. A motivação para tal trabalho reside na necessidade de realimentar o controlador com os estados do sistema a ser controlado, estados estes os quais, muitas vezes, não podem ser medidos diretamente, seja por dificuldade de medição, pelo difícil acesso à variável a ser medida, ou pelo alto custo dos sensores. Os meios de se contornar esse problema podem levar a um aumento na variabilidade do processo perda de produção e, em casos extremos, até a não controlabilidade do sistema. Utilizando o método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas foi possível desenvolver um filtro de estados que minimiza uma função custo. Assim, foi desenvolvida a teoria sobre observadores e filtros de estados de sistemas dinâmicos, bem como um algoritmo para obtenção dos estados. Por fim, foi demonstrado o desempenho do filtro obtido por meio de simulações computacionais.

Palavras chaves: Estimativa de estado, filtragem robusta de estados, método dos mínimos quadrados regularizados, controle no espaço de estados, observadores de estado.

ABSTRACT

This work presents a study about state filtering in dynamical systems subject to parametric uncertainties in the model. It is presented a robust filter based on the regularized least square method with uncertainties. The motivation behind this work resides in the need of providing a feedback to the controller with the system states. These states, most times, can not be measured directly due to measurement difficulty, by the hard access to the variable or just because of the high cost of the sensor. The ways to overcome this problem can lead to an increase at the process variability, production loss and, in extreme cases, even to the not controlability of the system. Using the regularized least square method with uncertainties A robust state filter that minimize a cost function was developed. So, it is presented a study about observer and state filters of dynamical systems, as well an algorithm to state achievement. Lastly it was demonstrated the robust filter performance using computational simulation.

Keywords: State estimation, robust state filtering, regularized least square, space state control, space state observers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1- Diagrama em blocos de sistema no espaço de estados.....	21
FIGURA 2 - Sistema de controle realimentado por estado observado.....	47
FIGURA 3 - Comparação entre o passo 1 e a minimização de λ usando a função $G(\lambda)$	65
FIGURA 4 - Trajetória de x_1 medido, do filtro de Kalman e do filtro BDU.....	75
FIGURA 5: Trajetória de x_2 medido, do filtro de Kalman e do filtro BDU	76
FIGURA 6: Resultado da comparação do filtro BDU com o filtro de Kalman	76

SUMÁRIO

RESUMO	5
ABSTRACT	6
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
1 INTRODUÇÃO	10
2 TEORIA DE OTIMIZAÇÃO	15
2.1 Introdução.....	15
2.3 Mínimos quadrados	15
2.3.1 Mínimos quadrados não-regularizados.....	15
2.3.2 Mínimos quadrados ponderados	18
2.3.3 Mínimos quadrados regularizados	20
2.3.4 Mínimos quadrados regularizados com incertezas.....	21
3 OBSERVADORES DE ESTADO	34
3.1 Introdução.....	34
3.2 A estrutura do Observador	34
3.3 Princípio da separação do projeto de observador e controlador	37
3.4 Projeto de observador de estados via equação de Lyapunov	39
4 ESTIMADORES DE ESTADO	42
4.1 Introdução.....	42
4.2 Estimativa preditora, filtrada e suavizada	43
4.2.1 Estimativa preditora	43
4.2.2 Estimativa filtrada	44
4.2.3 Estimativa suavizada	44
4.3 Estimativa filtrada recursiva no espaço de estado	44
5 FILTRAGEM ROBUSTA NO ESPAÇO DE ESTADOS	
COM INCERTEZAS	51
5.1 Introdução.....	51
5.2 Filtro robusto utilizando método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas(Filtro BDU).....	52

5.3 Desenvolvimento do algoritmo do Filtro BDU	54
5.4 Simulação e comparação do filtro robusto.....	63
6 CONCLUSÃO	65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66
APÊNDICE A	68
APÊNDICE B	71
APÊNDICE C	82

1 INTRODUÇÃO

No projeto de controladores no modelo espaço de estados faz-se necessária a realimentação dos estados do sistema visando o controle da planta. Contudo, muitas vezes, não é possível acessar estes estados diretamente. Isto porque pode haver tanto a dificuldade de medição, pelo difícil acesso à variável a ser medida, ou devido a um alto custo dos sensores, de forma que os meios de se contornar este problema podem levar a um aumento na variabilidade do processo, perda de produção e, em casos extremos, até a não controlabilidade do sistema. Com estas considerações, o problema de filtragem de estados reside exatamente na estimação dos estados que caracterizam o sistema e não podem ser medidos.

Em casos determinísticos, isto é, em sistemas sem ruídos de processo e de medidas significativas, nos quais o modelo do sistema é perfeitamente conhecido, são utilizados os observadores de estados para a estimação dos estados do sistema a partir das saídas disponíveis, em situações onde o número de sensores é menor que o número de variáveis a serem medidas. Estes observadores são softwares que substituem um componente de hardware (Aguirre, 2007, p. 158-159).

Na maioria dos processos reais existe a presença de ruídos e distúrbios, tanto de processo quanto de medidas uma vez que os modelos matemáticos que correspondem a estes não são exatos. Tais processos são denominados não determinísticos ou estocásticos, e a estimação de estados consiste em, a partir do processamento de saídas observadas do sistema, obter um algoritmo que forneça uma aproximação satisfatória dos estados do mesmo.

Tais algoritmos são obtidos fazendo-se uso de critérios de minimização de erros e de não tendenciosidade, produzindo estimativas com erros de pequenas dispersões em relação aos valores reais.

O filtro de Kalman, introduzido em 1961 por Rudolf Emil Kalman, é um estimador baseado no método dos mínimos quadrados para sistemas lineares no espaço de estados e tem desempenhado um importante papel em diversos campos, tais como na determinação de órbitas, no campo da economia, da comunicação, de sistemas

de controle, dentre outros. Tal teoria é considerada um marco na teoria de controle moderno, uma vez que até hoje produz muitos resultados relevantes na literatura associada à engenharia e demais áreas afins.

Contudo, uma premissa central para a implementação do filtro de Kalman, é a precisão do modelo no espaço de estados, isto é, o modelo não admite incertezas. Quando esta consideração é violada, o desempenho do filtro se deteriora e os resultados são divergentes.

No modelamento de sistemas reais, dificilmente se obtém um modelo do sistema, que represente fielmente a realidade. Tal fato se justifica por diversos fatores, tais como imprecisão nas medições, variabilidade na tolerância entre equipamentos e peças, difícil acesso à medição de parâmetros, e também variações do ambiente, tais como mudanças de temperatura, desgaste pelo tempo de uso, dentre outros.

Para contornar estes problemas de modelamento, fez-se necessário o desenvolvimento de técnicas e métodos que garantissem maior robustez aos filtros de estados. No livro *Optimal State Estimation* de Dan J. Simon (2006, p. 333), o desenvolvimento das novas técnicas de filtragem robusta é justificado.

O sucesso no início da década de 60 do filtro de Kalman em aplicações aeroespaciais levou a uma tentativa de aplicá-lo na indústria comum na década de 70. No entanto, essas tentativas rapidamente deixaram claro que havia um sério impasse entre as suposições básicas do filtro de Kalman e os problemas de estimação de estados na indústria. Modelos de sistemas precisos não estão facilmente disponíveis para os problemas industriais. O governo gastou milhões de dólares no programa espacial em 1960 (motivo que originou modelos de sistemas muito precisos), mas a indústria raramente tem milhões de dólares para gastar em problemas de engenharia (daí a imprecisão de modelos de sistemas). Depois de uma década reavaliando a natureza e o papel do filtro de Kalman, os engenheiros perceberam que precisavam de um novo filtro que pudesse lidar com erros de modelamento e incertezas. Estimadores de estado que podem tolerar tais

incertezas são chamados robustos (Simon, D. J.; 2006, p. 333, Tradução nossa)

A sensibilidade a incertezas do modelo tem incentivado o desenvolvimento de diversos trabalhos na literatura objetivando a obtenção de filtros robustos. Três métodos desenvolvidos para obtenção de estimativas robustas são H_∞ , custo garantido e método *set-valued*.

No método H_∞ é necessário testar uma condição de existência continuamente o que o torna inadequado para aplicações online. Quando esta condição de existência não é satisfeita, o desempenho do filtro é deteriorado e o filtro se torna divergente. Uma forma de amenizar este problema é aumentar o parâmetro de robustez γ , contudo esta medida leva a uma diminuição na robustez do filtro (Sayed; et al, 2001).

A abordagem via custo garantido tem como premissa, um estimador de estados que tem a variância do erro de estimação de estado limitada superiormente por um valor constante para todas as incertezas admissíveis no modelo. Nesta abordagem, a solução geralmente envolve a sintonização de um parâmetro a fim de garantir a existência de solução para uma equação algébrica de Riccati (EAR). Este método também exige o teste de certas condições de existência, o que também o torna impróprio para aplicações online (Sayed; et al, 2001).

Em outro método de estimação robusta, denominado set-valued, elipsóides são construídas em torno do estado estimado as quais são consistentes com as observações e submetidas a uma norma restritiva nos ruídos. Novamente o método requer testes de condições de existência, o que, assim como os outros métodos supracitados, o torna inviável para aplicações online (Sayed; et al, 2001).

Frente a este problema da necessidade de estimação online, acredita-se ser possível o desenvolvimento de um filtro robusto, que possa ser aplicado na estimação de estados de modelos com incertezas nos parâmetros e que garanta o seu uso em aplicações online.

O novo filtro será projetado para minimizar uma norma residual no pior caso, dentre uma classe de incertezas admissíveis em cada iteração. Para isso, propõe-se a utilização de um critério de minimização de erros denominado Bounded Data Uncertainties (BDU) proposto em Sayed e Nascimento (1999).

A estrutura BDU é um método de otimização que incorpora simultaneamente regularização e ponderação de parâmetros do modelo, e resolve um critério robusto para projetos de mínimos quadrados, na presença de dados incertos (SAYED e NASCIMENTO, 1999). Tal método tem uma característica marcante que é permitir a incorporação de diversos tipos de incertezas, tanto estruturadas quanto não estruturadas.

Em comparação com os métodos de estimação robusta mencionados anteriormente, quais sejam H, custo garantido e método *set-valued*, a nova técnica de obtenção do filtro realiza uma regularização, propriedade esta, que contorna a necessidade de testes de condição de existência, tal característica torna o filtro apropriado para aplicações online, mesmo sendo necessário o ajuste de um parâmetro auxiliar (SAYED; et al, 2001, p. 999).

Assim, o objetivo geral deste trabalho é investigar a possibilidade de desenvolver um filtro utilizando o método dos mínimos quadrados regularizados com sistemas sujeitos a incertezas nos parâmetros.

Com base nos resultados obtidos neste trabalho, foi possível a publicação do artigo *Filtragem Robusta no Espaço de Estados Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas*, publicado no I Colóquio de Matemática Aplicada e Computacional do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

Capítulo 1: Trás uma breve introdução ao assunto de estimação de estados, abordando a aplicação, motivação e alguns métodos robustos para recuperação de estados de sistemas dinâmicos.

Capítulo 2: É dedicado a teoria de otimização através do estudo do método dos mínimos quadrados, passando por algumas de suas variações, até a apresentação do método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas.

Capítulo 3: Este capítulo apresenta os observadores de estados como forma de introduzir o assunto de recuperação de estados.

Capítulo 4: Neste capítulo é dada continuidade ao estudo da reconstituição de estado, extendendo o conceito para o caso estocástico, isto é, quando o modelo da planta apresenta ruídos de estado e de medidas significativos.

Capítulo 5: Apresenta a aplicação dos métodos dos mínimos quadrados regularizados com incertezas para obtenção de um filtro robusto.

Capítulo 6: Contém as conclusões do trabalho e perspectivas de trabalhos futuros.

2 TEORIA DE OTIMIZAÇÃO

2.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado a teoria de otimização através do estudo do método dos mínimos quadrados, passando por algumas de suas variações, até a apresentação do método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas.

2.2 Mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados foi introduzido por Carl Friederich Gauss por volta de 1795, em seus estudos sobre mecânica celestial e, desde então, tem sido amplamente utilizado em trabalhos, como critério de minimizações.

Este método foi formulado também por A. M. Legendre de forma independente de Gauss em 1805. Legendre afirmava que o método dos mínimos quadrados era o mais consistente e de mais fácil aplicação.

Este método tem sido utilizado como base para diversas aplicações, como em teorias de estimação, controle e identificação de sistemas, incluindo o filtro de Kalman e o controlador linear quadrático.

2.2.1 Mínimos quadrados não-regularizados

Seja b um vetor de medida que se relaciona com a variável desconhecida x pelo modelo linear abaixo,

$$b = Ax + v, \tag{2.1}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos, $x \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^n$ denota um ruído que indica a discrepância entre o vetor b e Ax .

Considere a função quadrática $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$J(x) = \|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T(Ax - b) \tag{2.2}$$

O problema de minimização sem restrição é definido como:

$$\min_x \{J(x)\} \quad (2.3)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

A solução ótima, denotado de agora em diante como \hat{x} , é uma solução com a seguinte propriedade:

$$\|A\hat{x} - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2 \quad (2.4)$$

isto é, para qualquer x escolhido o ruído v é mínimo para \hat{x} , e $\|\cdot\|^2$ representa o quadrado da norma Euclidiana, sendo $\|a\|^2 = a^T a$.

Desenvolvendo $J(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) = (x^T A^T - b^T)(Ax - b) \\ &= x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo reescrevemos 2.3 como,

$$\hat{x} = \min_x (x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b). \quad (2.6)$$

Diferenciando e igualando a zero, a fim de obter o valor ótimo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= (A^T A)x + (A^T A)^T x - A^T b - A^T b = 0 \\ A^T Ax + A^T Ax - A^T b - A^T b &= 0 \\ 2A^T Ax - 2A^T b &= 0 \\ A^T Ax &= A^T b. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se A possuir determinante diferente de zero, $A^T A$ é invertível e segue que,

$$(A^T A)^{-1} A^T Ax = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.8)$$

e o valor ótimo \hat{x} é dado por:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (2.9)$$

Exemplo:

Dado o funcional $J(x) = (Ax - b)^T(Ax - b)$, com A e b dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

determine o \hat{x} .

Usando a equação 2.9, tem-se:

$$\hat{x} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, o valor mínimo assumido por \hat{x} é $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

O valor mínimo assumido pelo função $J(x)$ é dado substituindo a equação 2.9 na equação 2.5.

Logo, substituindo \hat{x} no funcional $J(x)$, obtem-se:

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) &= (A\hat{x} - b)^T(A\hat{x} - b) = (A(A^T A)^{-1} A^T b - b)^T(A(A^T A)^{-1} A^T b - b) \\ &= [A(A^T A)^{-1} A^T b - b]^T [A(A^T A)^{-1} A^T b - b] \\ &= [b^T A((A^T A)^{-1})^T A^T - b^T] [A(A^T A)^{-1} A^T b - b] \\ &= b^T A((A^T A)^{-1})^T A^T A(A^T A)^{-1} A^T b - b^T A((A^T A)^{-1})^T A^T b - \\ &\quad - b^T A(A^T A)^{-1} A^T b + b^T b \\ &= b^T (A((A^T A)^{-1})^T A^T A(A^T A)^{-1} A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + \\ &\quad + I) b \\ &= b^T (A((A^T A)^{-1})^T (A^T A)(A^T A)^{-1} A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + \\ &\quad + I) b \\ &= b^T (A((A^T A)^{-1})^T I A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + I) b \\ &= b^T (A((A^T A)^{-1})^T A^T - A((A^T A)^{-1})^T A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + I) b \end{aligned}$$

$$= b^T(-A(A^T A)^{-1}A^T + I)b.$$

Portanto:

$$J(\hat{x}) = b^T(I - A(A^T A)^{-1}A^T)b. \quad (2.10)$$

2.2.2 Mínimos quadrados ponderados

Em casos em que as variáveis fornecem informações diferentes sobre a variação do processo, inclui-se uma matriz de peso na função custo, a fim de expressar a diferença de importância entre as variáveis. Assim sendo, considere o funcional $J(x)$, dado agora por:

$$J(x) = (Ax - b)^T W(Ax - b) \quad (2.11)$$

onde $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de ponderação simétrica definida positiva ($W = W^T > 0$), $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnitas.

A solução deste problema, consiste agora em determinar \hat{x}_w , que satisfaz a seguinte equação:

$$\|A\hat{x} - b\|_W^2 \leq \|Ax - b\|_W^2 \quad (2.12)$$

para todo x , sendo que, $\|\cdot\|_W^2$ denota o quadrado da norma Euclidiana com ponderação em W , e pode ser escrita da seguinte forma.

$$\|a\|_W^2 = a^T W a.$$

Expandindo o termo $J(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= (Ax - b)^T W(Ax - b) = (x^T A^T - b^T)W(Ax - b) \\ &= x^T A^T W A x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b. \end{aligned} \quad (2.13)$$

E reescrevendo o problema de minimização como:

$$\min_x (x^T A^T W A x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b). \quad (2.14)$$

Diferenciando e igualando a zero, a fim de encontrar o candidato a mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= (A^T W A)x + (A^T W A)^T x - A^T W b - A^T W b = 0 \\ A^T W A x + A^T W A x - A^T W b - A^T W b &= 0 \\ 2A^T W A x - 2A^T W b &= 0 \\ A^T W A x &= A^T W b. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se W é definida positiva e A é invertível então $A^T W A$ é invertível, e o valor ótimo \hat{x} é dado por:

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b. \quad (2.16)$$

O valor mínimo assumido pelo função $J(x)$ é dado através da substituição da equação 2.16 na equação 2.13.

Assim, substituindo o valor de \hat{x} no funcional $J(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) &= (A\hat{x} - b)^T W (A\hat{x} - b) \\ &= (A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b)^T W (A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b) \\ &= [A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b]^T W [A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b] \\ &= [b^T W A ((A^T W A)^{-1})^T A^T - b^T] W [A(A^T W A)^{-1} A^T W b - b] \\ &= b^T W A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W b - \\ &\quad - b^T W A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W b - b^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W b + b^T W b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T (A^T W A) (A^T W A)^{-1} A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T I A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \\ &\quad - A (A^T W A)^{-1} A^T W + I) b \\ &= b^T W (A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - A ((A^T W A)^{-1})^T A^T W - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - A(A^T W A)^{-1} A^T W + I)b \\
& = b^T W (- A(A^T W A)^{-1} A^T W + I)b \\
& = b^T (- W A(A^T W A)^{-1} A^T W + W)b.
\end{aligned}$$

E, portanto, $J(\hat{x})$ é dado por:

$$J(\hat{x}) = b^T (W - W A(A^T W A)^{-1} A^T W) b. \quad (2.17)$$

2.2.3 Mínimos quadrados regularizados

O método dos mínimos quadrados regularizados consiste em uma variação do método convencional, em que um termo de regularização é incorporado na função custo. Este termo permite diminuir a sensibilidade do método a dados incertos, evitando que uma pequena variação no modelo cause uma grande variação no resultado (SAYED; et al, 1998, p. 7).

Considere a função custo $J(x)$, escrita agora, como:

$$J(x) = x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b) \quad (2.18)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de regularização simétrica definida positiva ($Q = Q^T > 0$), $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de ponderação simétrica definida positiva ($W = W^T > 0$), $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnitas.

O problema de minimizar em x o funcional $J(x)$, escrito como:

$$\begin{aligned}
\hat{x} & = \min_x \{J(x)\} \\
x & \in \mathbb{R}^n
\end{aligned} \quad (2.19)$$

Apresenta uma solução mínima regularizada \hat{x}_Q , com a seguinte propriedade:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \|A\hat{x} - b\|_W^2 \leq \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 \quad (2.20)$$

para todo x .

Expandindo $J(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b) = x^T Q x + (x^T A^T - b^T) W (Ax - b) \\ &= x^T Q x + x^T A^T W A x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Desta forma, o problema de minimização é reescrito como:

$$\min_x (x^T Q x + x^T A^T W A x - x^T A^T W b - b^T W A x + b^T W b) \quad (2.22)$$

Diferenciando e igualando a zero, objetivando encontrar o ótimo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= 2Qx + (A^T W A)x + (A^T W A)^T x - A^T W b - A^T W b = 0 \\ 2Qx + A^T W A x + A^T W A x - A^T W b - A^T W b &= 0 \\ 2Qx + 2A^T W A x - 2A^T W b &= 0 \\ Qx + A^T W A x &= A^T W b \\ (Q + A^T W A)x &= A^T W b. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se Q é definida positiva então $(Q + A^T W A)$ é invertível, e o valor ótimo \hat{x} é dado por:

$$\hat{x} = (Q + A^T W A)^{-1} A^T W b. \quad (2.24)$$

Observe que nos itens 2.3.1 e 2.3.2 conclui-se que o candidato a mínimo dado pelo cálculo da primeira derivada realmente fornece o menor valor do funcional, uma vez que os funcionais são convexos (quadráticos com $W = W^T > 0$).

2.2.4 Mínimos quadrados regularizados com incertezas

Apesar da consistência e simplicidade do método dos mínimos quadrados, uma característica o torna inadequado para aplicações onde há incertezas nos dados, pois este método é sensível a estas.

Pode-se notar que o método dos mínimos quadrados é baseado apenas nos dados de (A, b) , o que torna seu desempenho insatisfatório na presença de incertezas, isto é, quando os dados não são mais (A, b) mas sim $(A + \delta A, b)$, sendo δA uma perturbação desconhecida.

Incluindo a perturbação na matriz A , obtém-se a seguinte formulação:

$$b = (A + \delta A)x + v \quad (2.25)$$

Assim a obtenção de um \hat{x} ótimo que minimize a função deve satisfazer a seguinte desigualdade triangular,

$$\|(A + \delta A)\hat{x} - b\| \leq \|A\hat{x} - b\| + \|\delta A\hat{x}\| \quad (2.26)$$

Observe que o termo $\|A\hat{x} - b\|$ representa o método dos mínimos quadrados convencional, e temos o termo adicional $\|\delta A\hat{x}\|$ que é devido a perturbação nos dados da matriz A .

Desta forma, o método dos mínimos quadrados tem sua performance deteriorada pelo termo adicional que é inserido devido à presença da perturbação δA .

Em Oliveira (2011), um método dos mínimos quadrados, o qual permite a incorporação de incertezas, é apresentado.

a) Estrutura BDU

Tendo o exposto acima, o método dos mínimos quadrados regularizados com incerteza, tratado de agora em diante como BDU (Bounded Data Uncertainties), prevê o tratamento das incertezas na sua formulação, a fim de se obter um melhor desempenho na presença das mesmas.

Assim, o método BDU busca encontrar uma solução \hat{x} ótimo, que minimize a seguinte função custo,

$$J(x, y) = x^T Q x + (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy) \quad (2.27)$$

onde, $x^T Q x$ é o termo de regularização com $Q = Q^T > 0$.

Este problema pode ser escrito também da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} [\|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_W^2] \\ & \text{ou} \\ & \min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} [x^T Q x + [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]^T W [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]] \end{aligned} \quad (2.28)$$

De forma que $W = W^T \geq 0$ é uma matriz de ponderação, $A \in \mathbb{R}^{N \times n}$ matriz nominal conhecida, $b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ vetor nominal conhecido, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vetor de variáveis, $H \in \mathbb{R}^{N \times m}$ matriz conhecida e $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vetor de perturbação não conhecido.

Neste método a incorporação da matriz H , permite ao projetista incorporar uma região limite para a incerteza. Nota-se, também, que a perturbação y não é conhecida, sendo que o que se conhece a respeito desta perturbação é uma função $\phi(x)$ que representa o limite da perturbação. Assim, tem-se:

$$y \leq \phi(x) \quad (2.29)$$

Para se determinar o valor ótimo de x , \hat{x} , deve-se considerar o pior caso, pois se o sistema for otimizado para este, os casos melhores naturalmente serão abrangidos. Logo, maximizando as incertezas e minimizando a função custo exposto na equação 2.27 tem-se o seguinte problema:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\|y\| \leq \phi(x)} J(x, y). \quad (2.30)$$

O problema 2.30 pode ser interpretado como um problema da teoria de jogos, onde se tem dois jogadores, com o projetista tentando encontrar um \hat{x} que minimize a função custo e o oponente, neste caso representado pela perturbação y , tentando maximizar o custo por meio da maximização da incerteza.

É importante notar que a perturbação y , depende do x , de acordo com a equação 2.29.

b) Solução do problema BDU

O problema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\min_x \max_{\|y\| \leq \phi(x)} [x^T Q x + (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy)] \quad (2.31)$$

Para resolver este problema inicia-se pela maximização de y , sendo o custo residual definido por $R(x, y)$ dado por,

$$R(x, y) \triangleq (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy), \quad (2.32)$$

o máximo é encontrado na condição limite de y , ou seja, $y = \phi(x)$, onde tem-se o pior caso, ou seja, temos as incertezas maximizadas.

Agora tem-se um novo problema sob restrição que pode ser escrito da seguinte forma,

$$f(y) = \max_y [(Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy)] \quad (2.33)$$

sujeito a,

$$c_1(y) = \|y\|^2 - \phi^2(x). \quad (\text{restrição}) \quad (2.34)$$

Este problema é resolvido utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange, de forma que pode-se reescrever o problema restrito como um problema irrestrito através da incorporação da função custo. Obtem-se, então, a função Lagrangeana:

$$L(y, \lambda) = (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2(x)). \quad (2.35)$$

Desenvolvendo a equação acima segue que,

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= (x^T A^T - b^T + y^T H^T) W (Ax - b + Hy) - \lambda \|y\|^2 + \lambda \phi^2(x) \\ &= x^T A^T W Ax - x^T A^T W b + x^T A^T W H y - b^T W Ax + b^T W b - b^T W H y + \end{aligned}$$

$$+ y^T H^T W A x - y^T H^T W b + y^T H^T W H y - \lambda y^T y + \lambda \phi^2(x) \quad (2.36)$$

Diferenciando a função lagrangeana em relação a y e λ , têm-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= H^T W A x - H^T W b + H^T W A x - H^T W b + 2H^T W H y - 2\lambda y \\ &= 2H^T W A x - 2H^T W b + 2H^T W H y - 2\lambda y \\ &= 2H^T W(Ax - b) + 2(-\lambda I + H^T W H)y \end{aligned} \quad (2.37)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -y^T y + \phi^2(x) = -\|y\|^2 + \phi^2(x). \quad (2.38)$$

Igualando a zero, para se obter o ponto de mínimo, tem-se as condições de óptimalidade do problema:

$$2H^T W(Ax - b) + 2(-\lambda I + H^T W H)y = 0$$

Dividindo a equação acima por 2, tem-se:

$$(\lambda^o I - H^T W H)y^o = H^T W(Ax - b) \quad (2.39)$$

e

$$\begin{aligned} -\|y\|^2 + \phi^2(x) &= 0 \\ \|y^o\| &= \phi(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde y^o e λ^o representam as soluções ótimas para y e λ , respectivamente.

Para que a solução ótima do problema seja um máximo, a segunda derivada da função deve ser negativa. Assim tem-se:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y} = 2(-\lambda I + H^T W H) \quad (2.41)$$

e

$$\begin{aligned}
2(-\lambda I + H^T W H) &< 0 \\
-\lambda I + H^T W H &< 0 \\
\lambda I - H^T W H &> 0 \\
\lambda I &> H^T W H \\
\lambda &> \|H^T W H\|.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Logo, λ^o deve satisfazer a condição $\lambda^o > \|H^T W H\|$, para que exista um máximo. Por meio da equação 2.49 pode-se encontrar o valor do y^o , com a seguinte expressão:

$$y^o = (\lambda^o I - H^T W H)^{-1} H^T W (Ax - b). \tag{2.42}$$

Substituindo o valor de y^o na equação 2.35 é encontrada uma expressão para a função custo maximizada.

Com o objetivo de compactar as expressões, serão utilizadas as seguintes notações:

$$z = Ax - b \Rightarrow (z^T = x^T A^T - b^T) \tag{2.44}$$

$$\phi = \phi(x) \tag{2.45}$$

É importante lembrar que λ é um valor escalar, de forma que sua posição nas multiplicações não interfere no resultado final, fato que não ocorre com as matrizes e vetores, nos quais as dimensões devem ser respeitadas como condição de existência das operações.

Então:

$$y^o = (\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z \tag{2.46}$$

$$L(y, \lambda) = (z + Hy)^T W (z + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2). \tag{2.47}$$

Desenvolvendo a função lagrangeana $L(y, \lambda)$, tem-se:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= (z + Hy)^T W(z + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2) \\ &= (z^T + y^T H^T)W(z + Hy) - \lambda(\|y\|^2 - \phi^2). \end{aligned}$$

Substituindo a norma euclidiana, segue que:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= (z^T + y^T H^T)W(z + Hy) - \lambda(y^T y - \phi^2) \\ &= z^T W z + z^T W H y + y^T H^T W z + y^T H^T W H y - \lambda y^T y + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W(z + Hy) + y^T (H^T W z + H^T W H y - \lambda y) + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W(z + Hy) + y^T [H^T W z + (H^T W H - \lambda I)y] + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W(z + Hy) + y^T [H^T W z - (\lambda I - H^T W H)y] + \lambda \phi^2. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Substituindo o valor de y , dado pela equação 2.46 obtém-se:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= z^T W(z + Hy) + y^T [H^T W z - (\lambda I - H^T W H)y] + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W[z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ &+ [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ [H^T W z - \\ &- (\lambda I - H^T W H)(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] \} + \lambda \phi^2. \end{aligned}$$

Como uma matriz A , multiplicada pela sua matriz inversa A^{-1} , resulta na matriz identidade I , tem-se:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= z^T W[z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ &+ [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ [H^T W z - I H^T W z] \} + \lambda \phi^2. \end{aligned}$$

E prosseguindo com o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= z^T W[z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ &+ [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ [H^T W z - H^T W z] \} + \lambda \phi^2 \\ &= z^T W[z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \\ &+ [(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z]^T \{ \Theta \} + \lambda \phi^2 \end{aligned}$$

onde Θ é uma matriz de zeros. Logo:

$$\begin{aligned}
L(y, \lambda) &= z^T W [z + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W z] + \lambda \phi^2 \\
&= z^T W [I + H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] z + \lambda \phi^2 \\
L(y, \lambda) &= z^T [W + W H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] z + \lambda \phi^2.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Reescrevendo a equação 3.49 com os valores de z e ϕ , tem-se:

$$C(x, \lambda) = (Ax - b)^T [W + W H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] (Ax - b) + \lambda \phi^2(x). \tag{2.50}$$

Assim, $C(x, \lambda)$ constitui a função custo maximizada.

d) Problema de Minimização

Com o problema de maximização solucionado pode-se agora realizar a minimização em x .

As condições impostas no problema de maximização devem agora ser incorporadas ao problema de minimização, o que resulta em uma nova restrição:

$$\min_x [x^T Q x + C(x)] = \min_{\lambda > \|H^T W H\|} \min_x [x^T Q x + C(x, \lambda)]. \tag{2.51}$$

Dado o problema 2.51, a minimização em x será resolvida obtendo-se uma função $G(\lambda)$, dependente apenas de λ . Assim, tem-se:

$$G(\lambda) \triangleq \min_x [x^T Q x + C(x, \lambda)]. \tag{2.52}$$

Substituindo a equação 2.50 na equação 2.52 segue que:

$$\begin{aligned}
T(x, \lambda) &= x^T Q x + \\
&+ (Ax - b)^T [W + W H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] (Ax - b) + \lambda \phi^2(x).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

De forma compacta, assume-se que:

$$W(\lambda) \triangleq W + W H(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W. \tag{2.54}$$

Logo:

$$T(x, \lambda) = x^T Q x + (Ax - b)^T W(\lambda)(Ax - b) + \lambda \phi^2(x). \quad (2.55)$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} T(x, \lambda) &= x^T Q x + (Ax - b)^T W(\lambda)(Ax - b) + \lambda \phi^2(x) \\ &= x^T Q x + (x^T A^T - b^T) W(\lambda)(Ax - b) + \lambda \phi^2(x) \\ &= x^T Q x + x^T A^T W(\lambda) A x - x^T A^T W(\lambda) b - b^T W(\lambda) A x + b^T b + \\ &\quad + \lambda \phi^2(x). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Diferenciando $T(x, \lambda)$ em relação a x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 2Qx + 2A^T W(\lambda) A x - A^T W(\lambda) b - A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) \\ &= 2Qx + 2A^T W(\lambda) A x - 2A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) \\ &= 2(Q + A^T W(\lambda) A)x - 2A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$\nabla \phi^2(x)$ representa o gradiente de $\phi^2(x)$ com respeito a x .

Assim, igualando a equação 2.57a zero, tem-se as condições de otimalidade do problema de minimização:

$$\begin{aligned} 2(Q + A^T W(\lambda) A)x - 2A^T W(\lambda) b + \lambda \nabla \phi^2(x) &= 0 \\ (Q + A^T W(\lambda) A)x + \frac{1}{2} \lambda \nabla \phi^2(x) &= A^T W(\lambda) b. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Adotando-se:

$$M(\lambda) \triangleq Q + A^T W(\lambda) A \quad (2.59)$$

$$D(\lambda) \triangleq A^T W(\lambda) b \quad (2.60)$$

obtém-se:

$$M(\lambda)x + \frac{1}{2} \lambda \nabla \phi^2(x) = D(\lambda) \quad (2.61)$$

Da equação 2.61, podemos encontrar o valor de $x^o(\lambda)$ que representa o valor ótimo de x e depende apenas do parâmetro λ .

Observe que dado a equação que descreve a incerteza, isto é, de posse de $\phi(x)$, a resolução da equação é possível.

Posteriormente, será abordada as incertezas denominadas estruturadas, que serão a classe de incertezas de interesse no presente trabalho. Por agora, supõe-se que a solução ótima $x^o(\lambda)$ já foi encontrada. Assim a função custo $G(\lambda)$, é escrita como:

$$G(\lambda) = x^{oT} Q x^o + C(x^o(\lambda), \lambda). \quad (2.62)$$

Agora com a função já minimizada em x , encontra-se o valor ótimo para λ com a seguinte minimização:

$$\lambda^o = \arg \min_{\lambda > \|H^T W H\|} G(\lambda). \quad (2.63)$$

Observe que a função $G(\lambda)$, depende apenas de λ , pois $x^o(\lambda)$ já foi minimizado e depende apenas de λ .

Logo a solução ótima é dada por:

$$\hat{x} = x^o(\lambda^o). \quad (2.64)$$

e) Incertezas estruturadas

Como foi mencionado anteriormente, a função $\phi(x)$ permite que o método BDU abranja diferentes modelos de incertezas. No presente trabalho, será abordado as incertezas estruturadas.

Considerando agora o seguinte problema:

$$\min_x \max_{\delta A, \delta b} [x^T Q x + ((A + \delta A)x - (b + \delta b))^T W ((A + \delta A)x - (b + \delta b))], \quad (2.65)$$

As incertezas δA e δb são modeladas da seguinte forma:

$$[\delta A \ \delta b] = Hy = H\Delta(E_a x - E_b) \quad (2.66)$$

ou,

$$\delta A = HSE_a \quad (2.67)$$

$$\delta b = HSE_b, \quad (2.68)$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz de regularização, simétrica e definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de ponderação, simétrica e semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, S é uma contração arbitrária, $\|S\| \leq 1$, e $\{H, E_a, E_b\}$ são matrizes de dimensões apropriadas escolhidas pelo projetista.

A equação 2.65 pode ser escrita como:

$$\min_x \max_{\delta A, \delta b} [x^T Q x + (Ax - b + (\delta Ax - \delta b))^T W (Ax - b + (\delta Ax - \delta b))]. \quad (2.69)$$

Comparando a equação 2.69 com a equação 2.31 tem-se:

$$Hy = \delta Ax - \delta b \quad (2.70)$$

$$Hy = HSE_a x - HSE_b$$

$$Hy = HS(E_a x - E_b)$$

$$H^{-1}Hy = H^{-1}HS(E_a x - E_b)$$

$$y = S(E_a x - E_b)$$

$$\|y\| = \|S(E_a x - E_b)\|$$

$$\|y\| \leq \|S\| \|E_a x - E_b\| \quad (2.71)$$

A contração $\|S\| \leq 1$, indica que o máximo valor de $\|y\|$ é igual a $\|(E_a x - E_b)\|$, pode-se reescrever a função anterior como:

$$\|y\| \leq \|E_a x - E_b\|. \quad (2.72)$$

Logo conclui-se que o problema 2.65 é um problema de min-max com $\phi(x)$ sendo:

$$\phi(x) = \|E_a x - E_b\|. \quad (2.73)$$

Assim, o problema é escrito da seguinte maneira:

$$\min_x \max_{\|y\| \leq \|E_a x - E_b\|} [x^T Q x + (A x - b + H y)^T W (A x - b + H y)]. \quad (2.74)$$

f) Solução do problema BDU para incertezas estruturadas

Após a função $\phi(x)$ que define as incertezas ser previamente definida, é possível solucionar o problema de otimização. Assim desenvolvendo a função $\phi(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \|E_a x - E_b\| = ((E_a x - E_b)^T (E_a x - E_b))^{\frac{1}{2}} \\ \phi^2(x) &= \|E_a x - E_b\|^2 = [((E_a x - E_b)^T (E_a x - E_b))^{\frac{1}{2}}]^2 = ((E_a x - E_b)^T (E_a x - E_b)) \\ &= ((x^T E_a^T - E_b^T)(E_a x - E_b)) = x^T E_a^T E_a x - x^T E_a^T E_b - E_b^T E_a x + E_b^T E_b \\ \nabla \phi^2(x) &= 2E_a^T E_a x - E_a^T E_b - E_b^T E_a = 2E_a^T E_a x - 2E_a^T E_b \\ \nabla \phi^2(x) &= 2E_a^T (E_a x - E_b). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Substituindo o valor do gradiente na equação 3.61:

$$\begin{aligned} M(\lambda)x + \frac{1}{2}\lambda[2E_a^T(E_a x - E_b)] &= D(\lambda) \\ M(\lambda)x + \lambda E_a^T(E_a x - E_b) &= D(\lambda) \\ M(\lambda)x + \lambda E_a^T E_a x - \lambda E_a^T E_b &= D(\lambda) \\ (M(\lambda) + \lambda E_a^T E_a)x &= D(\lambda) + \lambda E_a^T E_b. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Assim, a solução ótima é dada por:

$$x^o(\lambda) = (M(\lambda) + \lambda E_a^T E_a)^{-1}(D(\lambda) + \lambda E_a^T E_b). \quad (2.77)$$

Substituindo na equação 3.77 os valores de $M(\lambda)$ e $D(\lambda)$ tem-se:

$$x^o(\lambda) = (Q + A^T W(\lambda)A + \lambda E_a^T E_a)^{-1}(A^T W(\lambda)b + \lambda E_a^T E_b). \quad (2.78)$$

A equação 2.78 indica o valor ótimo de x em função de λ . Como visto anteriormente, para se encontrar o valor ótimo de x , deve-se minimizar a função $G(\lambda)$, tal função pode ser escrita como:

$$G(\lambda) = x^o(\lambda)^T Q x^o(\lambda) + (Ax^o(\lambda) - b)^T [W + WH(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W] (Ax^o(\lambda) - b) + \lambda \|E_a x^o(\lambda) - E_b\|^2. \quad (2.79)$$

Ao minimizar a equação 2.79 obtém-se o valor ótimo de λ^o e substituindo na equação 3.78 tem-se:

$$\hat{x} = (Q + A^T W(\lambda^o) A + \lambda^o E_a^T E_a)^{-1} (A^T W(\lambda^o) b + \lambda^o E_a^T E_b).$$

que constitui a solução ótima do problema BDU.

Definindo:

$$\hat{Q} \triangleq Q + \lambda^o E_a^T E_a \quad (2.80)$$

$$\hat{W} \triangleq W(\lambda^o) = W + WH(\lambda^o I - H^T W H)^{-1} H^T W. \quad (2.81)$$

com λ^o dado pelo expressão 2.63.

Portanto, a solução única e global do problema é dada por:

$$\hat{x} = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \lambda^o E_a^T E_b). \quad (2.82)$$

No próximo capítulo será abordado os observadores de estados como forma de introduzir o assunto de recuperação de estados apresentando alguns conceitos fundamentais para o estudo e resultados clássicos amplamente difundidos na literatura.

3 OBSERVADORES DE ESTADO

Este capítulo aborda os observadores de estados como forma de introduzir o assunto de recuperação de estados apresentando alguns conceitos fundamentais para o estudo e resultados clássicos amplamente difundidos na literatura.

3.1 Introdução

Inicialmente introduzidos por Luenberger (1966), os observadores de estado são softwares que estimam os estados do sistema substituindo, assim, um componente de hardware. São utilizados quando o número de sensores é menor do que o número de estados a ser medido, o que pode ocorrer por elevado custo do sensor ou dificuldade de instalação, ou ainda quando o sensor não está disponível por motivo de falha ou manutenção. Os estados estimados pelo observador são utilizados para realimentar o sistema de controle da planta, apresentando um importante papel no projeto de controladores realimentados por observador.

A estrutura do observador de estado é semelhante à da planta, com a diferença de possuir um termo a mais, o qual constitui em um termo de compensação que incorpora o erro de estimação. O observador é alimentado com a saída do sistema e com a entrada de controle u , e possui como uma de suas características principais a propriedade de fazer com que a dinâmica do erro seja assintoticamente estável, isto é, convirja para zero o mais rápido possível, de forma que tenhamos após um certo tempo, \hat{x} (o valor estimado de x) igual a x (Aguirre, 2007).

3.2 A estrutura do Observador

Como mencionado previamente, o observador de estados possui uma estrutura semelhante à da planta. Assim, considere a planta definida no modelo espaço de estado pelas seguintes equações.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{3.1}$$

$$y(t) = Cx(t). \tag{3.1}$$

Logo, é possível representar a estrutura do observador como sendo,

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (3.3)$$

que pode ser escrita como,

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly. \quad (3.4)$$

A Figura 2 mostra um diagrama em blocos de um sistema de controle realimentado por estado observado.

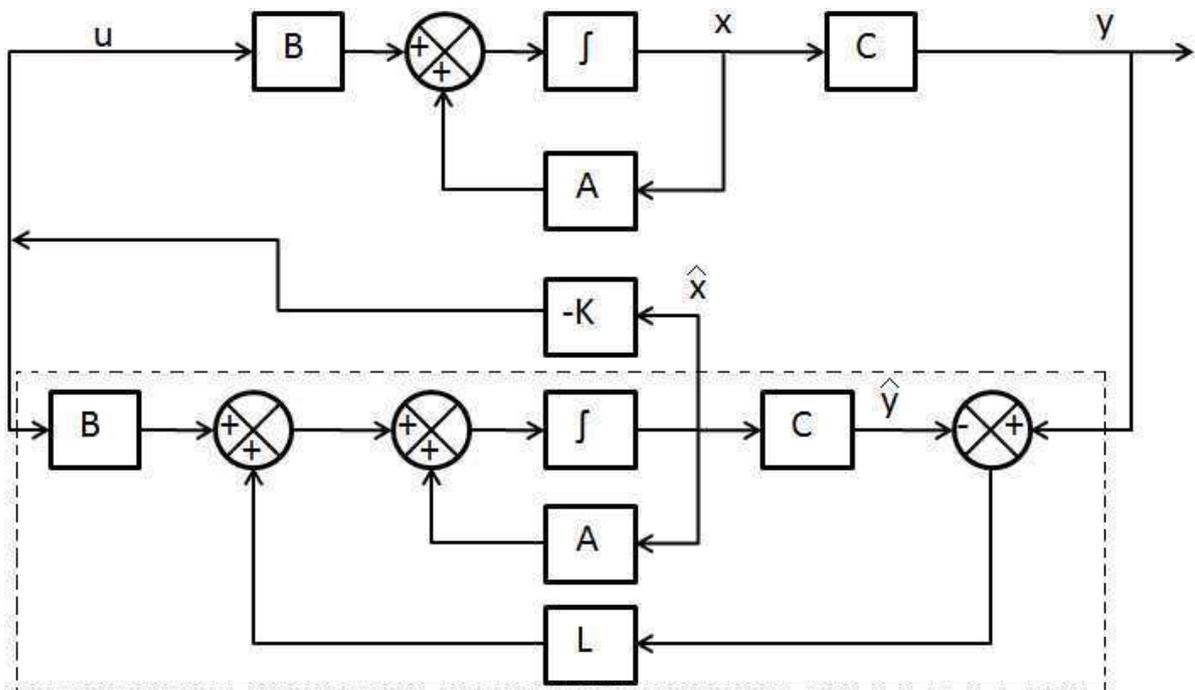


Figura 2 - Sistema de controle realimentado por estado observado.

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 2, a parte delimitada pelo tracejado representa a estrutura do observador. Note que há apenas duas entradas para o observador, sendo estas a saída $y(t)$ da planta e a entrada de controle $u(t)$, enquanto que o modelo do observador fornece o valor estimado de $x(t)$.

A matriz L é denominada matriz de ganho do observador, e é responsável por realizar uma regulagem no observador, melhorando continuamente a resposta,

minimizando o erro. Como veremos adiante, esta matriz pode ser projetada de forma a aumentar a velocidade de resposta do observador, fornecendo um valor estimado com erro menor em um tempo mais curto.

Considerando o erro de estado como e , tem-se

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.5)$$

Derivando ambos os lados das equações obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)e(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A solução da equação 3.6 é igual a:

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0), \quad (3.7)$$

onde $e(0)$ é o erro inicial.

Os autovalores da matriz $A - LC$ determinam também os pólos dessa equação quando a mesma é levada para o domínio da frequência. Assim, os autovalores são determinantes nas características da resposta temporal e da estabilidade.

Se os autovalores da matriz $A - LC$ estiverem alocados no lado esquerdo do plano s , então $e(t)$ tenderá a zero à medida que t tender a infinito, o que implica também que o valor de $\hat{x}(t)$ tenderá para o valor de $x(t)$ independentemente dos valores $\hat{x}(0)$ e de $x(0)$, com o passar do tempo (Ogata, 2010).

A velocidade de convergência de $\hat{x}(t)$ para $x(t)$ pode ser projetada fazendo-se uma escolha adequada dos valores dos elementos da matriz L . Usualmente, estes valores são determinados fixando-se os pólos do observador como sendo de duas a cinco vezes mais rápidos que os pólos do controlador, fazendo assim com que os

pólos do controlador seja dominante, isto é, seja o fator limitante na velocidade de resposta do sistema.

3.3 Princípio da separação do projeto de observador e controlador

Para utilizar a realimentação de estados como técnica de controle, os estados do sistema devem estar disponíveis. Contudo, muitas vezes esse não é o caso, uma vez que alguns estados do sistema não podem ser medidos devido a falta de sensor ou por não ser possível acessá-los diretamente.

Em tais situações, uma solução pode ser a utilização de um observador de estado, e assim, utilizar o sinal $\hat{x}(t)$ ao invés do estado real $x(t)$.

Considerando-se, então, o sinal de realimentação $u(t)$ como sendo dado por:

$$u(t) = -Kx(t),$$

tem-se o sinal de realimentação utilizando o estado observado dado por:

$$u(t) = -K\hat{x}(t). \quad (3.8)$$

Assim, para o sistema dado por 3.1, segue que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t). \quad (3.9)$$

Somando e subtraindo o termo BKx na equação 3.9, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\hat{x}(t) + BKx(t) - BKx(t) \\ &= (A - BK)x(t) + BK(x(t) - \hat{x}(t)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observe que o termo $(x - \hat{x})$ representa o erro $e(t)$. Assim, a equação 3.10 se torna:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t), \quad (3.11)$$

a qual constitui na equação de estado do sistema realimentado utilizando o observador.

Uma forma interessante de se analisar o sistema realimentado por estado observado, e que tem sido utilizado em literaturas conceituadas como em Aguirre (2007, p. 163) e Ogata (2003, p.709), consiste em analisar um vetor aumentado $x_a(t)$, dado por:

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Assim a equação dinâmica do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) \\ \dot{x}_a(t) &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

E os autovalores da equação 3.13 são calculados através do polinômio característico:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_a) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - (A - BK) & -BK \\ 0 & \lambda - (A - LC) \end{bmatrix}\right) \\ &= \det(\lambda - (A - BK))\det(\lambda - (A - LC)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da equação 3.14 conclui-se que os autovalores do sistema realimentado por estado observado constitui na verdade de dois conjuntos distintos de autovalores, isto é, um conjunto de autovalores devido ao projeto do controlador, e um outro conjunto de autovalores devido ao projeto do observador. Assim, conclui-se também que há principio da separação do projeto do controlador e do observador, que podem ser elaborados de forma independente ou separadamente.

3.4 Projeto de observador de estados via equação de Lyapunov

O projeto de observadores de estado para o caso multivariável é mais complexo que para o caso monovariável. Abaixo é apresentado um procedimento para o projeto de observadores utilizando a equação de Lyapunov.

Considere o sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) definido no espaço de estados pelas equações 3.1 e 3.2, com $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ e (A, C) observável.

O objetivo do projeto é encontrar uma matriz L que possa gerar uma estimativa de x como saída do seguinte sistema:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (3.15)$$

Procedimento:

1) Selecione uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que os autovalores de F sejam os desejados mas distintos dos autovalores de A .

2) Selecione uma matriz $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tal que (F, \hat{L}) seja controlável.

3) Encontre P que satisfaça:

$$PA - FP = \hat{L}C \quad (3.16)$$

4) A matriz L é dada por:

$$L = P^{-1}\hat{L} \quad (3.17)$$

O exemplo a seguir ilustra a utilização do procedimento acima.

Exemplo:

Considere o seguinte sistema no espaço de estados:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u, \quad (3.18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x. \quad (3.19)$$

Deseja-se projetar um observador de estados com pólos em -2 e -3 . Para isso será utilizando o procedimento descrito acima.

Passo 1: Selecionar a matriz F de forma que os autovalores de F seja diferentes dos de A e sejam iguais aos desejados.

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Selecionar uma matriz \hat{L} tal que (F, \hat{L}) seja controlável.

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Co = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Co possui posto igual a 2.

Passo 3: Encontrar P que satisfaça:

$$PA - FP = \hat{L}C$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2a & -2b \\ -3c & -3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5a & 3b \\ 6c & 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo P é igual a,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Passo 4: Determinar L :

$$L = P^{-1}\hat{L}$$
$$L = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para determinar se o projeto de L satisfaz os requisitos basta encontrar os autovalores da matriz $(A - LC)$:

$$A - LC = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Como abordado neste capítulo, os observadores de estado consideram o sistema como sendo determinísticos, isto é, não existe ruídos no sistema. No próximo capítulo será dada continuidade ao estudo da reconstituição de estado, extendendo o conceito para o caso estocástico, isto é, quando o modelo da planta apresenta ruídos de estado e de medidas significativos.

4 ESTIMADORES DE ESTADO

Neste capítulo será dada continuidade ao estudo da reconstituição de estado, extendendo o conceito para o caso estocástico, isto é, quando o modelo da planta apresenta ruídos de estado e de medidas significativos. Contudo, será apresentado uma interpretação determinística dos observadores, onde os ruídos passam a ser definidos como erros do modelo. Detalhes desta abordagem podem ser vistos nos textos que se seguem.

4.1 Introdução

Assim como os observadores de estado, os estimadores de estado têm por objetivo reconstituir os estados do sistema com a diferença básica de considerar a presença de ruídos no sistema. A saída dos estimadores deve fornecer uma aproximação satisfatória do processo que representa o estado. Essa aproximação deve apresentar erros que sejam aceitáveis para uma aplicação de controle (Aguirre, 2007, p. 168).

A teoria de estimação esteve primeiramente limitada às áreas de astronomia, geodésia e análises regressivas. Com a introdução do filtro de Kalman, em 1961, ocorreu uma grande expansão do uso de estimadores para diversas áreas de estudo como aplicações militares, espaciais e até produtos de consumo muito comuns como GPS (GIBBS, 2011, p. 1).

Os filtros que serão tratados neste capítulo se assemelham com o filtro de Kalman mas com a diferença de serem determinísticos, isto é, as matrizes de variância dos erros serão tratadas como matrizes de ponderação e regularização. Além disso, será utilizado o método dos mínimos quadrados regularizados como ferramenta de minimização dos erros.

4.2 Estimativa preditora, filtrada e suavizada

O conceito de estimativa pode ser definido de acordo com a quantidade de medidas disponíveis. Assim, classifica-se o tipo de estimativa em preditora, filtrada e suavizada. Tais definições encontram-se na sequência.

Considere o seguinte sistema no espaço de estados, variante no tempo:

$$x_k = F_k x_k + w_k \quad (4.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4.2)$$

sendo:

- $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados,
- $w_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de ruídos de estado,
- $y_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saída ou medida,
- $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de estado,
- $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída,
- $v_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de ruído de medida.

O sistema acima, representado no espaço de estados, apresenta ruídos de estado w_k e de medida v_k , o que indica que ele é caracterizado de forma estocástica.

Nas próximas subseções, a menos que seja declarado um sistema específico, será sempre considerado o sistema dado pelas equações 4.1 e 4.2.

4.2.1 Estimativa preditora

A estimativa preditora é definida quando se tem k medidas $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_k)$ e deseja-se estimar o estado x_{k+1} , representada por $\hat{x}_{k+1|k}$. Um exemplo clássico é a determinação da trajetória de um objeto. Dependendo da experiência de quem acompanha a trajetória é possível obter uma boa aproximação do local de queda. A aproximação se deve a ruídos, como velocidade do vento, etc (BIANCO, 2004, p. 4).

4.2.2 Estimativa filtrada

Já a estimativa filtrada é definida quando se tem k medidas $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_k)$ e deseja se estimar o estado x_k , o qual é representada por $\hat{x}_{k|k}$. Como exemplo pode-se citar o caso de transmissão de sinais de rádio, onde o sinal chega ao receptor contendo ruídos e quando demodulado ele é filtrado para recuperar o sinal da melhor maneira possível (BIANCO, 2004, p. 4).

4.2.3 Estimativa suavizada

Na estimativa suavizada tem-se mais medidas do que o número de estados que se pretende estimar, assim tendo $k + 1$ medidas, isto é, $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k+1})$, pode-se estimar o estado $\hat{x}_{k|k+1}$ com maior exatidão do que no caso da estimativa filtrada.

O exemplo clássico de uma estimativa suavizada é quando uma pessoa não consegue ouvir claramente todas as palavras ditas por uma segunda pessoa, mas de posse de apenas algumas palavras consegue compreender a mensagem (BIANCO, 2004, p. 4).

4.3 Estimativa filtrada recursiva no espaço de estado

Dado um sistema representado pelas equações 4.1 e 4.2, será apresentado agora um algoritmo recursivo para determinação da estimativa filtrada a partir de uma utilização determinística do método dos mínimos quadrados regularizados. Para tanto, considere um conjunto de estimativas $(x_{0|k}, x_{1|k}, x_{2|k}, \dots, x_{k|k})$ e um conjunto de medidas $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_k)$. Considere, ainda, que a estimativa filtrada $\hat{x}_{k|k}$ já tenha sido determinada, com sua respectiva matriz de variâncias do erro $P_{k|k}$. Encontrar-se-á uma nova estimativa para x_{k+1} a partir de uma nova medida y_{k+1} , minimizando a seguinte função custo,

$$J_k = \min_{x_k, x_{k+1}} \left[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_{P_{k|k}^{-1}}^2 + \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_{k+1} - H_k x_{k+1}\|_{R_{k+1}^{-1}}^2 \right] \quad (4.3)$$

para $k > 0$, e

$$J_0 = \min_{x_0} \left[\|x_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \|y_0 - H_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2 \right], \text{ para } k = 0, \quad (4.4)$$

onde Q_k é a matriz de ponderação do ruído de estado e R_k é a matriz de ponderação do erro de medida (CAMPOS, 2004, p. 16-17).

Reescrevendo a equação 4.3 na forma matricial, tem-se,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ x_{k+1|k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ x_{k+1|k+1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -F_k & I \\ 0 & H_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ x_{k+1|k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_k^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ & \left(\begin{bmatrix} -F_k & I \\ 0 & H_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ x_{k+1|k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Obs: A mudança no índice de x_{k+1} para $x_{k+1|k+1}$, deve-se ao fato da incorporação da informação de y_{k+1} .

Comparando a equação 5.5 com o método dos mínimos quadrados regularizados dado pela equação 2.18, pode-se fazer as seguintes associações:

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ x_{k+1|k+1} \end{bmatrix},$$

$$Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} -F_k & I \\ 0 & H_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$b \leftarrow \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ y_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$W \leftarrow \begin{bmatrix} Q_k^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}.$$

A partir das identificações acima, encontra-se a solução ótima para a estimação de $\hat{x}_{k+1|k+1}$, utilizando a solução do problema do método dos mínimos quadrados regularizados dado pela equação 2.24:

$$\hat{x} = (Q + A^T W A)^{-1} A^T W b.$$

Substituindo as identificações,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k - \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_k & I \\ 0 & H_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_k & I \\ 0 & H_{k+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \begin{bmatrix} -F_k & I \\ 0 & H_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k - \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -F_k Q_k^{-1} & 0 \\ Q_k^{-1} & H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_k - \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -F_k^T Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} \\ Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A variável de interesse é:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = [0 \quad I] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -F_k^T Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} \\ Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Para solucionar a equação 4.7 é necessário primeiramente resolver a inversa da matriz presente na mesma, para tanto utiliza-se o lema A.2 constante no anexo A.

Logo tem-se,

$$\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}$$

Pelo Lema A.2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ (D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [0 \quad I] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} &= \\ [0 \quad I] \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ (D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} & \\ \Rightarrow [0 \quad I] \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} &= \\ [- (D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1}] & \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [0 \quad I] \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k & -F_k^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_k & Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} &= \\ (D - CA^{-1}B)^{-1} [-CA^{-1} \quad I] & \end{aligned} \quad (4.9)$$

Desenvolvendo o termo $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ tem-se,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (Q_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} - (-Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} (-F_k^T Q_k^{-1}))^{-1} \\ &= (H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} + Q_k^{-1} - Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T Q_k^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilizando o Lema A.1, segue que

$$Q_k^{-1} - Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T Q_k^{-1} = (Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1}.$$

E escrevendo-se 4.10 como,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} + (Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1})^{-1}.$$

Por definição,

$$P_{k+1|k+1} = (H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} + (Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1})^{-1} \quad (4.11)$$

Reescrevendo a equação 4.7 tem-se,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k+1} \begin{bmatrix} Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} & I \\ -F_k^T Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} \\ Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \hat{x}_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k+1} \\ & \begin{bmatrix} Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} (-F_k^T Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k}) & Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \hat{x}_{k+1|k+1} &= -P_{k+1|k+1} Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + \\ & P_{k+1|k+1} Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Reescrevendo os dois primeiros termos da equação 4.12, obtém-se

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} - P_{k+1|k+1} Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T Q_k^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} = \\ P_{k+1|k+1} (Q_k^{-1} - Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T Q_k^{-1}) F_k \hat{x}_{k|k} \end{aligned}$$

Fazendo-se novamente uso do Lema A.1:

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} (Q_k^{-1} - Q_k^{-1} F_k (P_{k|k}^{-1} + F_k^T Q_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T Q_k^{-1}) F_k \hat{x}_{k|k} = \\ P_{k+1|k+1} [(Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1}] F_k \hat{x}_{k|k}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Somando e subtraindo $(H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})$ ao termo central de 4.13, tem-se

$$P_{k+1|k+1} [(Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} - H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}] F_k \hat{x}_{k|k}.$$

Observe que,

$$(Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} = P_{k+1|k+1}^{-1}$$

Assim tem-se,

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} [P_{k+1|k+1}^{-1} - H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}] F_k \hat{x}_{k|k} &= [I - P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}] F_k \hat{x}_{k|k} \\ \Rightarrow [I - P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}] F_k \hat{x}_{k|k} &= \\ F_k \hat{x}_{k|k} - P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} F_k \hat{x}_{k|k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Logo a equação 4.12 pode ser escrita da seguinte forma,

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = F_k \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} F_k \hat{x}_{k|k}), \quad (4.15)$$

que é a solução para o problema de estimação proposto em 4.3.

Para as condições iniciais, o problema de minimização é dado pela equação 4.4, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$J_0 = \min_{x_0} [x_0^T P_0^{-1} x_0 + (y_0 - H_0 x_0)^T R_0^{-1} (y_0 - H_0 x_0)] \quad (4.16)$$

Utilizando as regras de derivada apresentadas na sessão B.1.2 do apêndice B, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} (x_0^T P_0^{-1} x_0) = 2P_0^{-1} x_0.$$

Desenvolvendo o segundo termo de 5.16,

$$\begin{aligned} (y_0^T - H_0^T x_0^T) R_0^{-1} (y_0 - H_0 x_0) &= (y_0^T R_0^{-1} - x_0^T H_0^T R_0^{-1}) (y_0 - H_0 x_0) \\ (y_0^T - H_0^T x_0^T) R_0^{-1} (y_0 - H_0 x_0) &= y_0^T R_0^{-1} y_0 - y_0^T R_0^{-1} H_0 x_0 - x_0^T H_0^T R_0^{-1} y_0 \\ &+ x_0^T H_0^T R_0^{-1} H_0 x_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Derivando 4.17 em relação a x_0 tem-se,

$$- H_0^T R_0^{-1} y_0 - H_0^T R_0^{-1} y_0 + 2H_0^T R_0^{-1} H_0 x_0.$$

Logo, a derivada de 5.16 é:

$$\frac{\partial}{\partial x}(J_0) = 2P_0^{-1}x_0 + 2H_0^T R_0^{-1}H_0 x_0 - 2H_0^T R_0^{-1}y_0. \quad (4.18)$$

Igualando 4.18 a zero, a fim de obter o mínimo

$$\begin{aligned} P_0^{-1}x_0 + H_0^T R_0^{-1}H_0 x_0 - H_0^T R_0^{-1}y_0 &= 0 \\ \Rightarrow \hat{x}_{0|0} &= (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1}H_0)^{-1}H_0^T R_0^{-1}y_0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

que é a solução da equação 4.4.

Por definição:

$$P_{0|0} = (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1}H_0)^{-1}. \quad (4.20)$$

Utilizando as equações 4.11, 4.15, 4.19 e 4.20, propõe-se um algoritmo para a estimativa filtrada no espaço de estados da seguinte forma:

Passo 0:

$$\begin{aligned} P_{0|0} &= (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1}H_0)^{-1} \\ \hat{x}_{0|0} &= P_{0|0}H_0^T R_0^{-1}y_0 \end{aligned}$$

Passo 1: (Repete de n=0 até n=k)

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} &= (H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}H_{k+1} + (Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T)^{-1})^{-1} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} &= F_k \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} F_k \hat{x}_{k|k}) \end{aligned}$$

O algoritmo acima permite obter a estimativa filtrada no espaço de estados, contudo não admite a incorporação de nenhuma incerteza no modelo. No próximo capítulo será apresentado o filtro robusto utilizando o método dos mínimos quadrados regularizados com incerteza, que constitui o resultado principal do presente trabalho.

5 FILTRAGEM ROBUSTA NO ESPAÇO DE ESTADOS COM INCERTEZAS

O presente capítulo tem por objetivo apresentar a aplicação dos métodos dos mínimos quadrados regularizados com incertezas para obtenção de um filtro robusto. Este novo filtro permitirá a incorporação das incertezas do modelo garantindo um bom desempenho na presença das mesmas.

5.1 Introdução

Em sistemas reais, dificilmente se obtém um modelo do sistema, que represente fielmente a realidade. Usualmente encontra-se incertezas nos modelos, tais como imprecisão nas medições, variabilidade na tolerância entre equipamentos e peças, difícil acesso à medição de parâmetros, e também variações do ambiente, tais como mudanças de temperatura, desgaste pelo tempo de uso, dentre outros.

Estas incertezas apesar de não serem determinadas com precisão podem ser explicitadas através do conhecimento de seus limites, isto é, se conhece a região em que elas estão contidas.

Dado o exposto acima, considerar-se-á que todas as incertezas são limitadas e estruturadas como abaixo:

$$[\delta F_k \quad \delta G_k] = M_k \Delta_k [E_{fk} \quad E_{gk}] \quad (5.1)$$

Onde δF e δG são incertezas nas matrizes de estado e de ruído respectivamente, M_k é uma matriz conhecida pelo projetista que garante a este limitar as incertezas e deve ser determinada de acordo com a experiência no sistema em questão, E_{fk} e E_{gk} são matrizes resultantes do modelamento das incertezas do sistema e por fim, Δ_k representa uma contração que varia entre -1 e 1.

5.2 Filtro robusto utilizando método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas (Filtro BDU)

Considere o seguinte sistema no espaço de estados sujeito a incertezas no modelo e variante no tempo:

$$x_{k+1} = (F_k + \delta F_k)x_k + (G_k + \delta G_k)w_k \quad (5.2)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (5.3)$$

onde,

$x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados,

$w_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de ruídos de estado,

$y_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saída ou medida,

$F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de estado,

$G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de ruído,

$H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída,

$v_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de ruído de medida,

$\delta F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de incertezas de F_k ,

$\delta G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de incertezas de G_k .

As incertezas δF_k e δG_k estão contidas em uma região limitada, mas seus valores exatos são desconhecidos. O objetivo do filtro robusto é obter um estimador de estados que minimize o erro, isto é, que se aproxime o máximo possível do valor real do sistema frente a estas perturbações.

Com o problema exposto acima, propõe-se o seguinte algoritmo como solução de estimar o estado do sistema x_{k+1} de posse de y_{k+1} medidas:

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$P_{0|0} = (\Pi_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1} \quad (5.4)$$

$$\hat{x}_{0|0} = P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} y_0 \quad (5.5)$$

Passo 1:

$$\lambda_k = (1 + \alpha) \|M_k^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} M_k\| \quad (5.6)$$

Passo 2:

$$\hat{Q}_k^{-1} = Q_k^{-1} + \lambda_k E_{g,k}^T (I + \lambda_k E_{f,k} P_{k|k} E_{f,k}^T)^{-1} E_{g,k} \quad (5.7)$$

$$\hat{R}_{k+1} = R_{k+1} - \lambda_k^{-1} H_{k+1} M_k M_k^T H_{k+1}^T \quad (5.8)$$

$$\hat{G}_k = G_k - \lambda_k F_k \hat{P}_{k|k} E_{f,k}^T E_{g,k} \quad (5.9)$$

$$\hat{F}_k = (F_k - \lambda_k \hat{G}_k \hat{Q}_k E_{g,k}^T E_{f,k}) (I - \lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{f,k}^T E_{f,k}) \quad (5.10)$$

$$\hat{P}_{k|k} = (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{f,k}^T E_{f,k})^{-1} \quad (5.11)$$

Passo 3:

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{F}_k \hat{x}_{k|k} \quad (5.12)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \hat{R}_{k+1}^{-1} e_{k+1} \quad (5.13)$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k} \quad (5.14)$$

$$P_{k+1} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^T + \hat{G}_k \hat{Q}_k \hat{G}_k^T \quad (5.15)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1} - P_{k+1} H_{k+1}^T R_{e|k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} \quad (5.16)$$

$$R_{e|k+1} = \hat{R}_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T \quad (5.17)$$

Este algoritmo é obtido por meio da aplicação do método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas na minimização de uma função custo envolvendo a norma quadrática dos erros de estado, ruído e medida. Algumas observações se fazem necessárias.

- Na equação 5.4 Π_0 é a matriz de ponderação do erro de estimação de estado inicial.
- O valor estimado pelo novo filtro é representado por \hat{x} .
- No algoritmo Q_k , R_k e P_k representam, respectivamente, a matriz de ponderação do ruído de estado, a matriz de ponderação para o erro de saída e a matriz de ponderação para o erro de estado.
- Outro ponto importante a observar é em relação à determinação de λ_k que foi feita no Passo 1. Para este cálculo foi utilizado um parâmetro α e não pela minimização da função $G(\lambda)$, como é proposto pelo método dos mínimos quadrados (ver equação 2.63). A Figura 3 mostra o resultado de uma simulação comparando a utilização da fórmula do Passo 1, com a minimização de λ_k em cada passo.

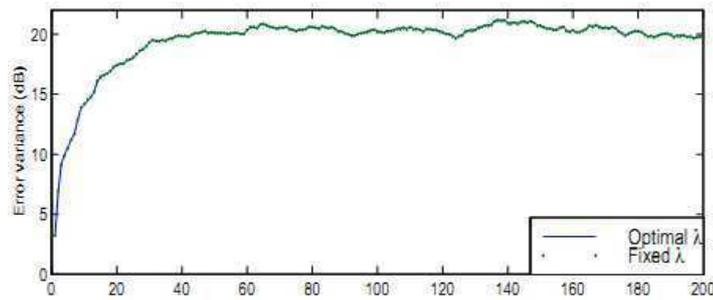


Figura 3 : Comparação entre o passo 1 e a minimização de λ usando a função $G(\lambda)$.

Fonte: SAYED, 2001.

Observa-se pela Figura 3 que a variância do erro se altera muito pouco, de forma que os cálculos foram simplificados utilizando-se um parâmetro α para determinação de λ_k .

Na próxima sessão será apresentado o desenvolvimento do algoritmo por meio da aplicação do método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas.

5.3 Desenvolvimento do algoritmo do Filtro BDU

Considerando o sistema no espaço de estados descrito pelas equações 5.2 e 5.3 com suas incertezas modeladas pela equação 5.1 e que são conhecidas a estimativa filtrada de x_k representada por $\hat{x}_{k|k}$.

Dado uma nova medida y_{k+1} pode-se determinar uma nova estimativa para $\hat{x}_{k+1|k+1}$ por meio da minimização da seguinte função custo:

$$J_k = \|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_{P_{k|k}}^2 + \|w_k\|_{Q_k}^2 + \|y_{k+1} - H_{k+1}x_{k+1}\|_{R_{k+1}}^2 \quad (5.18)$$

Observação: Nas equações quadráticas que se seguem, para abreviação dos termos, utilizaremos o símbolo (\bullet) , de forma que equações do tipo $y = x^T A x$ serão escritas como $y = x^T A(\bullet)$.

A equação 5.18 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
J_k = & \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \end{bmatrix} + \\
& [(H_{k+1}[F_k \quad G_k] + H_{k+1}[\delta F_k \quad \delta G_k])] \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \end{bmatrix} - \\
& ((y_{k+1} - H_{k+1}F_k\hat{x}_{k|k}) - H_{k+1}\delta F_k\hat{x}_{k|k})]^T R_{k+1}^{-1}(\bullet)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Comparando a equação 5.19 com a equação 2.28 pode-se fazer as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
x & \leftarrow \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \end{bmatrix} \\
Q & \leftarrow \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} \\
A & \leftarrow H_{k+1}[F_k \quad G_k] \\
\delta A & \leftarrow H_{k+1}M_k\Delta_k[E_{fk} \quad E_{gk}] \\
b & \leftarrow y_{k+1} - H_{k+1}F_k\hat{x}_{k|k} \\
\delta b & \leftarrow -H_{k+1}\delta F_k\hat{x}_{k|k} \\
H & \leftarrow H_{k+1}M_k \\
E_a & \leftarrow [E_{fk} \quad E_{gk}] \\
E_b & \leftarrow -E_{fk}\hat{x}_{k|k} \\
\Delta & \leftarrow \Delta_k \\
W & \leftarrow R_{k+1}^{-1}.
\end{aligned}$$

A solução do problema 5.19 pode ser encontrada utilizando a equação 2.82, que define:

$$\hat{x} = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \lambda E_a^T E_b).$$

Devido à complexidade dos termos, resolver-se-á por partes a fim de simplificar os cálculos.

$$\begin{aligned}
\hat{Q} & \triangleq Q + \lambda E_a^T E_a, \\
\hat{Q} & = \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \quad E_{gk}].
\end{aligned} \tag{5.20}$$

A equação 2.81 pode ser escrita da seguinte forma, utilizando o Lema A.1 apresentado no anexo A:

$$\widehat{W} \triangleq W(\lambda^o) = (W^{-1} - \lambda^{-1} H H^T)^{-1} \quad (5.21)$$

e fazendo-se as identificações com a equação 5.19,

$$\widehat{W} = (R_{k+1} - \lambda_k^{-1} H_{k+1} M_k M_k^T H_{k+1}^T)^{-1}. \quad (5.22)$$

Para abreviar a equação 5.22 será denotada por:

$$\widehat{R}_{k+1}^{-1} = (R_{k+1} - \lambda_k^{-1} H_{k+1} M_k M_k^T H_{k+1}^T)^{-1}. \quad (6.23)$$

Fazendo-se as substituições na equação 2.82 com base nas identificações da equação 5.19, tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] + \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} [F_k \ G_k] \right) \times \\ & \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k+1} - \widehat{x}_{k|k} \\ w_{k|k+1} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} F_k \widehat{x}_{k|k}) - \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} E_{fk} \widehat{x}_{k|k}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A equação 5.24 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] + \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} [F_k \ G_k] \right) \times \\ & \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k+1} \\ w_{k|k+1} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k} \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \left(\lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k} \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \\ & \left(\begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} [F_k \ G_k] \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k} \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} - \\ & \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} F_k \widehat{x}_{k|k} - \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} E_{fk} \widehat{x}_{k|k}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Rearranjando os termos da equação 6.25, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] + \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} [F_k \ G_k] \right) \times \\ & \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k+1} \\ w_{k|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} + \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Como deseja-se encontrar o valor de $\widehat{x}_{k+1|k+1}$, o qual é dado por,

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = F_k \widehat{x}_{k|k+1} + G_k \widehat{w}_{k|k+1} = [F_k \ G_k] \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k+1} \\ w_{k|k+1} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Multiplicando ambos os lados da equação 5.26 por:

$$[F_k \ G_k] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] \right)^{-1},$$

segue que:

$$\begin{aligned} & \left(I + [F_k \ G_k] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] \right)^{-1} \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} \right) \times \\ & [F_k \ G_k] \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k+1} \\ w_{k|k+1} \end{bmatrix} = [F_k \ G_k] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] \right)^{-1} \times \\ & \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} + [F_k \ G_k] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] \right)^{-1} \times \\ & \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \widehat{x}_{k|k}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Com a equação 5.28 define-se algumas variáveis auxiliares que serão úteis na simplificação dos cálculos:

$$P_{k+1|k} = [F_k \ G_k] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \ E_{gk}] \right)^{-1} \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = [F_k \ G_k] \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k+1} \\ w_{k|k+1} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$\widehat{F}_k = [F_k \quad G_k] \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} [E_{fk} \quad E_{gk}] \right)^{-1} \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Reescrevendo a equação 5.28 em função das equações 5.29, 5.30 e 5.31:

$$(I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1}) \widehat{x}_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} + \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{x}_{k+1|k+1} &= (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} + \\ &(I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Definindo a variável $P_{k+1|k+1}$ como:

$$P_{k+1|k+1} = (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} P_{k+1|k}, \quad (5.34)$$

a equação 5.33 torna-se, então:

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} + (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k}. \quad (5.35)$$

Observando a equação 5.34, pode-se escrever:

$$P_{k+1|k+1} P_{k+1|k}^{-1} = (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \quad (5.36)$$

Pós multiplicando ambos os lados da equação 6.36 por $(I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})$,

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} P_{k+1|k}^{-1} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} &= I \\ \Rightarrow P_{k+1|k+1} P_{k+1|k}^{-1} &= I - P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} \\ (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} &= I - P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Com a equação 5.37 pode-se escrever 5.35 como:

$$\begin{aligned} \widehat{x}_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} y_{k+1} + \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k} - P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1} \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k} \\ \Rightarrow \widehat{x}_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k}) + \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Definindo $y_{k+1} - H_{k+1} \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k}$ como sendo o erro e_{k+1} , a equação 6.38 se torna:

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T \widehat{R}_{k+1}^{-1} e_{k+1} + \widehat{F}_k \widehat{x}_{k|k}. \quad (5.39)$$

De fato, a equação 5.39 é a solução para o problema de estimação de estados proposto em 5.18. Contudo, alguns termos devem ser definidos de forma mais adequada. A seguir será apresentado uma forma mais conveniente para o cálculo das variáveis auxiliares presentes na equação 5.39.

As equações 5.29 e 5.31 apresentam um termo comum que será resolvido nos próximos passo. Assim, seja $Q(\lambda_k)$ definido por:

$$Q(\lambda_k) = \left(\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} E_{fk}^T \\ E_{gk}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{fk} & E_{gk} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (5.40)$$

$$\Rightarrow Q(\lambda_k) = \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk} & \lambda_k E_{fk}^T E_{gk} \\ \lambda_k E_{gk}^T E_{fk} & Q_k^{-1} + \lambda_k E_{gk}^T E_{gk} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Aplicando o Lema A.2 presente no anexo A,

$$Q(\lambda_k) = \begin{bmatrix} I & - (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \lambda_k E_{fk}^T E_{gk} \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} & 0 \\ 0 & (Q_k^{-1} + \lambda_k E_{gk}^T E_{gk} - \lambda_k E_{gk}^T E_{fk} (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \lambda_k E_{fk}^T E_{gk})^{-1} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ - (Q_k^{-1} + \lambda_k E_{gk}^T E_{gk}) (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

Fazendo-se algumas identificações convenientes, tem-se:

$$\widehat{P}_{k|k} = (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_k &= (Q_k^{-1} + \lambda_k E_{gk}^T E_{gk} - \lambda_k E_{gk}^T E_{fk} (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \lambda_k E_{fk}^T E_{gk})^{-1} \\ &= (Q_k^{-1} + \lambda_k E_{gk}^T (I - \lambda_k E_{fk} (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \lambda_k E_{fk}^T) E_{gk})^{-1} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Utilizando novamente o Lema de inversão A.1, o termo $(I - \lambda_k E_{fk} P (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \lambda_k E_{fk}^T)$ pode ser escrito como:

$$(I - \lambda_k E_{fk} P (P_{k|k}^{-1} + \lambda_k E_{fk}^T E_{fk})^{-1} \lambda_k E_{fk}^T) = (I + \lambda_k E_{fk} P_{k|k} E_{fk}^T)^{-1}. \quad (5.45)$$

Logo, a equação 5.44 pode ser escrita como:

$$\hat{Q}_k = (Q_k^{-1} + \lambda_k E_{gk}^T (I + \lambda_k E_{fk} P_{k|k} E_{fk}^T)^{-1} E_{gk})^{-1} \quad (5.45)$$

Com as equações 5.43 e 5.46, escreve-se a equação 5.42 de forma simplificada:

$$\hat{Q}_k = \begin{bmatrix} I & -\lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{k|k} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{gk}^T E_{fk} & I \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

OBS: A equação 5.47 será mantida nesta forma matricial para facilitar os cálculos posteriores.

Substituindo a equação 5.47 na equação 5.29,

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= [F_k \quad G_k] \begin{bmatrix} I & -\lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{k|k} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{gk}^T E_{fk} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P_{k+1|k} &= [F_k \quad G_k - \lambda_k F_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk}] \begin{bmatrix} \hat{P}_{k|k} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_k \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} F_k^T \\ (G_k - \lambda_k F_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk})^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Definindo a variável auxiliar \hat{G}_k como:

$$\hat{G}_k = G_k - \lambda_k F_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk}, \quad (5.49)$$

a equação 5.48 se torna:

$$P_{k+1|k} = \begin{bmatrix} F_k \hat{P}_{k|k} & \hat{G}_k \hat{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k^T \\ \hat{G}_k^T \end{bmatrix}$$

$$P_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^T + \hat{G}_k \hat{Q}_k \hat{G}_k^T \quad (5.50)$$

Agora, substituindo 5.47 na equação 5.31, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{F}_k &= [F_k \quad G_k] \begin{bmatrix} I & -\lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{k|k} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{gk}^T E_{fk} & I \end{bmatrix} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \hat{F}_k &= [F_k \quad G_k - \lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{gk}] \begin{bmatrix} \hat{P}_{k|k} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} \\ -\lambda_k E_{gk}^T E_{fk} \hat{P}_{k|k} P_{k|k}^{-1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \hat{F}_k &= [F_k \quad \hat{G}_k] \begin{bmatrix} \hat{P}_{k|k} P_{k|k}^{-1} \\ -\lambda_k \hat{Q}_k E_{gk}^T E_{fk} \hat{P}_{k|k} P_{k|k}^{-1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \hat{F}_k &= F_k \hat{P}_{k|k} P_{k|k}^{-1} - \lambda_k \hat{G}_k \hat{Q}_k E_{gk}^T E_{fk} \hat{P}_{k|k} P_{k|k}^{-1} \\ \Rightarrow \hat{F}_k &= (F_k - \lambda_k \hat{G}_k \hat{Q}_k E_{gk}^T E_{fk}) \hat{P}_{k|k} P_{k|k}^{-1} \\ \Rightarrow \hat{F}_k &= (F_k - \lambda_k \hat{G}_k \hat{Q}_k E_{gk}^T E_{fk}) \hat{P}_{k|k} (\hat{P}_{k|k}^{-1} - \lambda_k E_{fk}^T E_{fk}) \\ \Rightarrow \hat{F}_k &= (F_k - \lambda_k \hat{G}_k \hat{Q}_k E_{gk}^T E_{fk}) (I - \lambda_k \hat{P}_{k|k} E_{fk}^T E_{fk}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Agora, encontrar-se-á uma melhor representação para a equação 5.34:

$$P_{k+1|k+1} = (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \hat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} P_{k+1|k}.$$

Aplicando-se o Lema da inversão de matrizes A.1, com as seguintes identidades:

$$A = I, B = P_{k+1|k} H_{k+1}^T, C = \hat{R}_{k+1}^{-1} \text{ e } D = H_{k+1}, \text{ tem-se:}$$

$$\begin{aligned} (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T \hat{R}_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} &= \\ I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T (\hat{R}_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T)^{-1} H_{k+1}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Escrevendo a equação 5.34 com auxílio da equação 5.52,

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} + P_{k+1|k} H_{k+1}^T (\hat{R}_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T)^{-1} H_{k+1} P_{k+1|k}. \quad (5.53)$$

Fazendo-se a identificação:

$$R_{e,k+1} = \hat{R}_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1},$$

a equação 5.53 se torna:

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} + P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{e,k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1|k}. \quad (5.54)$$

Até aqui as equações deduzidas tratam o caso em que $k > 0$. Para o caso em que $k = 0$, supor-se-á a existência de uma estimativa inicial $\hat{x}_{0|-1} = 0$, bem como uma matriz de previsão para os erros de estado Π_0 e para os erros de medida R_0 .

A função custo para o erro de previsão do estado inicial é definida como:

$$J_0 = \|x_0 - \hat{x}_{0|-1}\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|y_0 - H_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2, \quad (5.55)$$

o qual pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} J_0 &= x_0^T \Pi_0^{-1} x_0 + (y_0^T - x_0^T H_0^T) R_0^{-1} (y_0 - H_0 x_0) \\ J_0 &= x_0^T \Pi_0^{-1} x_0 + y_0^T R_0^{-1} y_0 - y_0^T R_0^{-1} H_0 x_0 - x_0^T H_0^T R_0^{-1} y_0 + x_0^T H_0^T R_0^{-1} H_0 x_0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Utilizando as derivadas apresentadas em B.2.1, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} (J_0) = 2\Pi_0^{-1} x_0 + 2H_0^T R_0^{-1} H_0 x_0 - 2H_0^T R_0^{-1} y_0. \quad (5.57)$$

Logo, a solução do problema 5.55 é:

$$\hat{x}_{0|0} = (\Pi_0^{-1} + {}^T R_0^{-1} H_0)^{-1} H_0^T R_0^{-1} y_0 \quad (5.58)$$

Definindo $P_{0|0}$ como:

$$P_{0|0} = (\Pi_0^{-1} + {}^T R_0^{-1} H_0)^{-1}, \quad (5.59)$$

a equação 5.58 pode ser escrita como:

$$\hat{x}_{0|0} = P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} y_0. \quad (5.60)$$

Conclui-se, então, a demonstração de todas as equações do algoritmo do filtro robusto proposto na sessão 5.2. Na próxima sessão apresenta-se os resultados obtidos na simulação de um sistema sintético.

5.4 Simulação e comparação do filtro robusto

Nesta seção apresenta-se as simulações realizadas com o filtro, e compara-se o mesmo com o Filtro de Kalman nominal.

É importante notar que, ao se igualar a zero as incertezas do algoritmo do filtro robusto proposto na sessão 5.2, o algoritmo recai no filtro de Kalman nominal, o que é um sinal claro da concisão do filtro robusto utilizando o método dos mínimos quadrados com incertezas.

O filtro BDU foi aplicado ao seguinte sistema no espaço de estado sujeito a incertezas,

$$F = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.0196 \\ 0 & 0.83 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.804 & 0 \\ 0 & 0.804 \end{bmatrix}, H = [1 \quad -1], M = \begin{bmatrix} 0.9804 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R = 1, E_f = [0 \quad 7], Q = \begin{bmatrix} 1.693 & 0.0697 \\ 0.0697 & 1.693 \end{bmatrix}, \Pi_0 = I, \hat{x}_0 = 0 \text{ e } \alpha = 5.$$

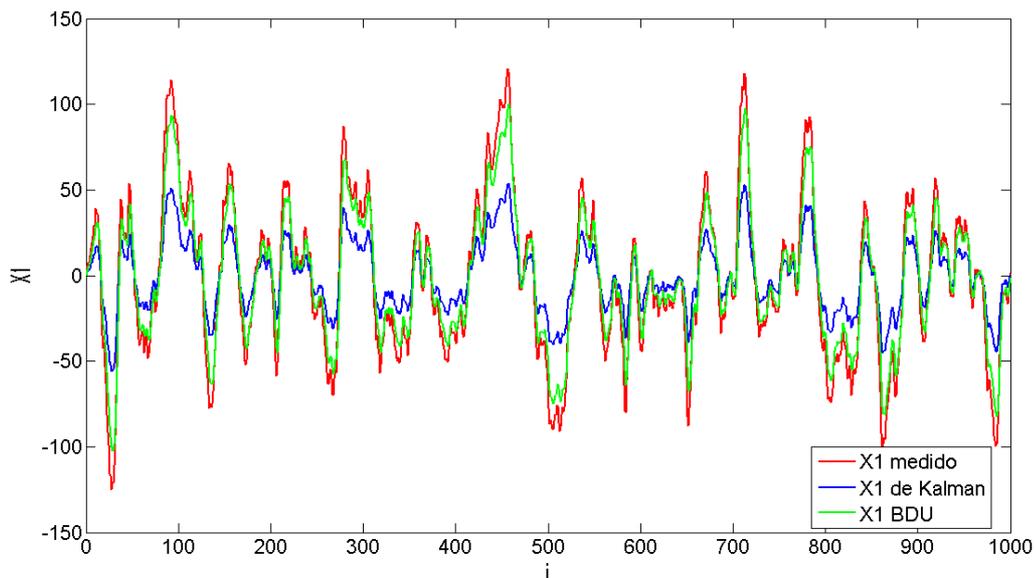


Figura 4: Trajetória de x_1 medido, do filtro de Kalman e do filtro BDU.
Fonte: Elaboração própria.

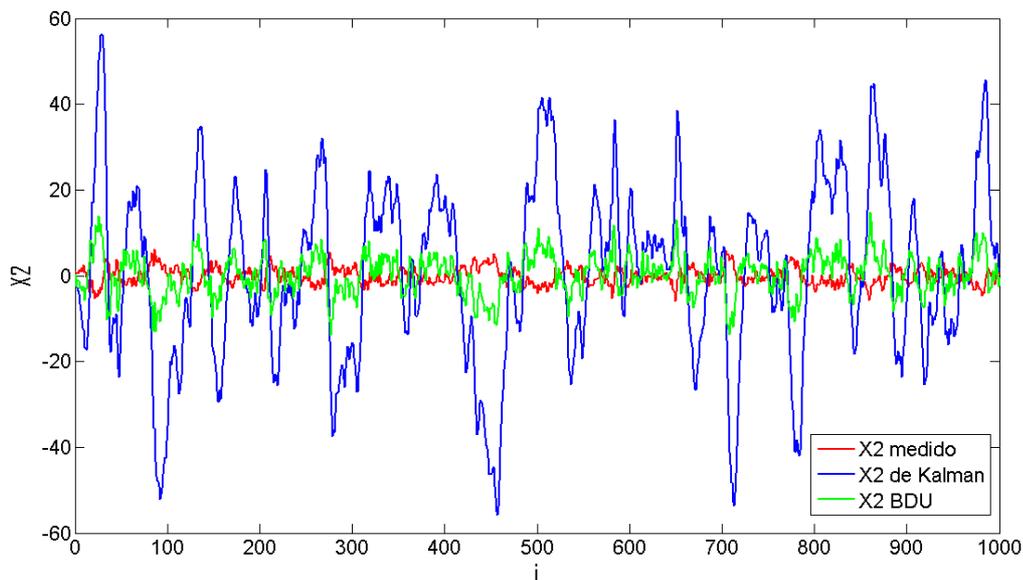


Figura 5: Trajetória de x_2 medido, do filtro de kalman e do filtro BDU.
Fonte: Elaboração própria.

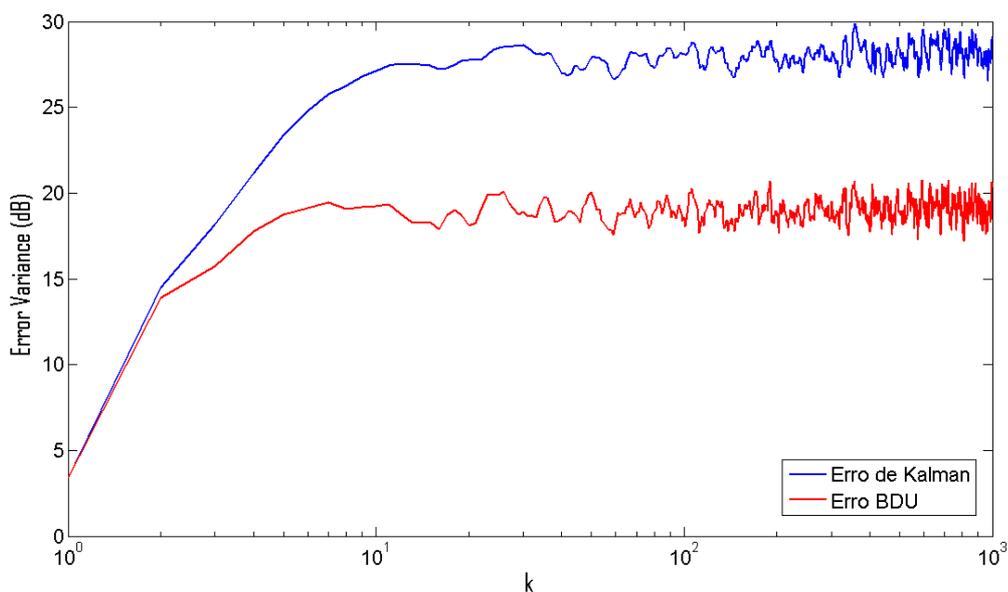


Figura 6: Resultado da comparação do filtro BDU com o filtro de Kalman.
Fonte: Elaboração própria.

Por meio do gráfico da variância do erro, Figura 6, foi possível observar que o Filtro BDU apresentou um desempenho melhor do que o Filtro de Kalman, resultando numa diferença de aproximadamente 10 dB.

O script usado para gerar os gráficos das figuras 4, 5 e 6 pode ser encontrado no apêndice B do presente trabalho.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um filtro robusto utilizando o método dos mínimos quadrados regularizados com incerteza.

A apresentação de métodos determinísticos e suas limitações, levam à uma abordagem estocástica, isto é, considerando a presença de ruídos que são comumente encontrados em sistemas reais. Contudo tais métodos ainda não são satisfatórios para aplicações reais, as quais apresentam incertezas nos modelos como imprecisão nas medições, variabilidade na tolerância entre equipamentos e peças, difícil acesso à medição de parâmetros, e também variações do ambiente, tais como mudanças de temperatura, desgaste pelo tempo de uso, dentre outros.

Frente a estas incertezas foi desenvolvido um filtro robusto que considera em seu modelo a presença de incertezas estruturadas, as quais resultam do modelamento de diversos sistemas reais.

O desempenho do filtro robusto foi testado em um sistema sintético sujeito a incertezas e comparado com o filtro de Kalman, apresentando um desempenho melhor do que este último, demonstrando ser uma importante alternativa para os casos em que os modelos estão sujeitos a incertezas. O novo filtro, ao contrário de outros métodos de estimação presentes na literatura, como H_∞ , custo garantido e *set-valued*, permite sua implementação online por não necessitar do teste constante de uma condição de existência.

O tratamento e modelamento das matrizes de ponderação e das incertezas feitas pelo projetista, constituem em temas para pesquisas futuras, bem como a abordagem de outras classes de incertezas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de Automática : Controle & Automação, v. III.** São Paulo: Blucher, 2007.

BIANCO, Aline F. **Filtros de Kalman para Sistemas Singulares em Tempo Discreto.** 2005. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - SEL, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

CAMPOS, José C. T. **Filtragem Robusta para Sistemas Singulares Discretos no Tempo.** 2004. 127 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - SEL, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

CHEN, C. **Linear System Theory and Design. 3. ed.** New York: Oxford University Press, 1999.

GIBBS, Bruce P. **Advanced Kalman Filtering, least-squares and modeling: a practical handbook.** New Jersey: John Wiley & Sons, 2011.

LUENBERGER, D. (1966). **Observers for multivariable Systems, IEEE Transactions on Automatic Control** 11(2): 190-197.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle. 3. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2002.

OLIVEIRA, Jean C. **Regulador Linear Quadrático para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas,** CEFET-MG, 2011.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno. 4. ed.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno. 5. ed.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

OGATA, K. **Discrete Time Control Systems. 2. ed.** Rio de Janeiro: Pearson Prentice Hall, 1995.

SAYED, Ali H. **A framework for state-space estimation with uncertain models, IEEE Transactions on Automatic Control,** 2001, V. 46, N. 7.

SIMON, Dan. Optimal State Estimation, Ed. JOHN WILEY & SONS, INC, 2006. 526 p.

SAYED, Ali H.; Nascimento, V. H.; Chandrasekaran, S. **Estimation and control with bounded data uncertainties. Linear Algebra and Its Applications**, Nov. 1998, vol. 284, pp. 259-306,.

SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H. **Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties**. In: A. Garulli; A. Tesi; A. Vicino. (Org.). Robustness in Identification and Control. Londres: Springer-Verlag, 1999, v. 245, p. 159-173.

APÊNDICE A

Lemas

Serão apresentados fórmulas da teoria de algebra matricial utilizadas em algumas demonstrações ao longo do texto do presente trabalho.

Lema A.1

Se $(A + BCD)$ e $(I + CDA^{-1}B)$ são não-singulares e se A é uma matriz $n \times n$ e também não-singular e se as matrizes B , C e D são dimensionalmente compatíveis, então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1}$$

Se além disto C for invertível, então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Demonstração:

Seja a matriz

$$F := A + BCD$$

Pré multiplicando por F^{-1} , tem-se:

$$F^{-1}F = F^{-1}A + F^{-1}BCD$$

Pós multiplicando por A^{-1}

$$A^{-1} = F^{-1}AA^{-1} + F^{-1}BCDA^{-1}$$

$$A^{-1} - F^{-1} = F^{-1}BCDA^{-1}.$$

(A.1)

Pós multiplicando por B ,

$$\begin{aligned} F^{-1}BCDA^{-1}B &= A^{-1}B - F^{-1}B \\ A^{-1}B &= F^{-1}B(I + CDA^{-1}B) \end{aligned}$$

Pós multiplicando por $(I + CDA^{-1}B)^{-1}$, tem-se

$$F^{-1}B = A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}.$$

Pós multiplicando por CDA^{-1} ,

$$F^{-1}BCDA^{-1} = A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo A.2 em A.1, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1} - F^{-1} &= A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} \\ F^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} \\ (A + BCD)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se C for invertível, pela regra de inversão de matrizes dada pela equação 2.3, tem-se,

$$(I + CDA^{-1}B)^{-1}C = (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}$$

E A.3 pode ser escrito da seguinte forma,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Lema A.2

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em CAMPOS (2004, p. 120).

Supondo a matriz A invertível, tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e para a matriz D invertível tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

APÊNDICE B

Revisão de conceitos matemáticos importantes

É apresentado a seguir alguns conceitos de álgebra matricial e de sistemas de controle no espaço de estados. Tais conceitos, mesmo introdutórios, são necessários para entendimento posterior do texto.

B.1 Conceitos matemáticos

A fim de se compreender melhor o desenvolvimento teórico do presente trabalho, é necessário a proposição de algumas notações matemáticas, que são utilizadas ao longo de todo o trabalho.

B.1.1 Álgebra matricial

Uma matriz consiste em uma tabela formada por n linhas e m colunas, de forma que seus elementos são denotados por a_{ij} , com i e j variando de 1 até n e m respectivamente.

Assim uma matriz $A_{m \times n}$ pode ser representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a) Matriz transposta

A transposta de uma matriz (A^T) é a matriz resultante da troca das linhas pelas colunas da matriz original, ou seja, o elemento a_{ij} se torna a_{ji} .

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, sua transposta é $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Se $A^T = A$, dizemos que a matriz A é simétrica.

b) Multiplicação de matrizes

A multiplicação de uma matriz A por uma matriz B , só é possível quando o número de colunas da matriz A , é igual ao número de linhas da matriz B . Os elementos da matriz C resultante, são obtidos pelo somatório do produto dos elementos da linha i da matriz A pelo correspondente da coluna j da matriz B . Veja o exemplo abaixo.

Exemplo:

Seja a matriz $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ e a matriz $B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, o produto destas duas

matrizes é:

$$C_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} (2 \times 4) + (3 \times 2) + (1 \times 7) \\ (6 \times 4) + (9 \times 2) + (11 \times 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 119 \end{bmatrix}.$$

c) Matriz inversa.

Uma matriz A é dita invertível, se existir uma matriz B , que satisfaça a condição abaixo.

$$AB = BA = I \tag{B.1}$$

Onde I é a matriz identidade.

A condição de existencia da matriz inversa de A é que esta seja não singular, isto é, tenha determinante diferente de zero.

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, sua inversa, denotada de agora em diante como A^{-1} , é

dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{4}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Transposta de um produto de matrizes.

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (\text{B.2})$$

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, o produto de sua transposta é:

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 37 \\ 38 & 91 \end{bmatrix}.$$

e) Invertibilidade das matrizes.

Uma propriedade importante da invertibilidade das matrizes e que será constantemente utilizada no presente trabalho é apresentada abaixo.

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (\text{B.3})$$

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, o produto de sua inversa é:

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.6894 & 0.2879 \\ 0.2803 & -0.1061 \end{bmatrix}.$$

B.1.2 Derivadas matriciais

A fim de se desenvolver a teoria de otimização no capítulo 3 é necessário o uso de algumas derivadas matriciais, as quais serão apresentadas sem demonstração por não fazer parte dos objetivos do presente trabalho, tais demonstrações podem ser encontradas em (Ogata, 1995).

Sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, x e $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então,

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax) = A^T$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Ax) = Ax + A^T x$$

Ainda se A é simétrica, temos que,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Ax) = 2Ax$$

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Ay) = Ay$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^T Ay) = A^T x$$

B.1.3 Positividade

Defini-se a forma quadrática de uma matriz como,

$$y = x^T Ax \tag{B.4}$$

Considere a função quadrática y , dada pela fórmula abaixo,

$$y = 2x_1^2 + 1x_2^2 + 5x_3^2$$

Observe que a função y pode ser escrita como,

$$y = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Com $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Matriz Definida Positiva

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diz-se que esta é definida positiva se,
 $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$.

Três condições são necessárias e equivalentes para uma matriz ser definida positiva.

1. $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são positivos (> 0).
3. Todos os pivôs são positivos.

b) Matriz Semidefinida Positiva

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esta é semidefinida positiva se,
 $x^T Ax \geq 0, \forall x \neq 0$.

Três condições são necessárias e equivalentes para uma matriz ser semidefinida positiva.

1. $x^T Ax \geq 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são não-negativos (≥ 0).
3. Todos os pivôs são não-negativos.

c) Matriz Definida Negativa

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esta é definida negativa se,
 $x^T Ax < 0, \forall x \neq 0$.

Três condições são necessárias e equivalentes para uma matriz ser definida negativa.

1. $x^T Ax < 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são negativos (< 0).
3. Todos os pivôs são negativos.

d) Matriz Semidefinida Negativa

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esta é semidefinida negativa se,
 $x^T Ax \leq 0, \forall x \neq 0$.

Três condições são necessárias e equivalentes para uma matriz ser semidefinida negativa.

1. $x^T Ax \leq 0, \forall x \neq 0$.
2. Todos os autovalores de A são não-positivos (≤ 0).
3. Todos os pivôs são não-positivos.

B.3 Sistemas de Controle no Espaço de Estados

Um sistema de controle pode apresentar varias entradas e varias saídas que se relacionam entre si, de modo a tornar o sistema muito complexo para uma abordagem via função de transferência.

O modelo no espaço de estados consiste em uma forma de representar sistemas complexos em um sistema com n equações de primeira ordem por meio de vetores e matrizes. Tal representação garante uma maior simplicidade na análise matemática e de controle do sistema.

O modelo no espaço de estados é dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{B.5}$$

$$y = Cx + Du, \tag{B.6}$$

onde temos,

$x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados,

$u \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas,

$y \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas,

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de estado,

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada,

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída,

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ a matriz de transição direta.

Segundo Nise (2002, p. 95), as variáveis de estado são o menor conjunto linearmente independente de variáveis do sistema, que juntamente com as funções forçantes conhecidas, e o conhecimento do vetor de estados x no instante t_0 são capazes de determinar o estado do sistema, para os instantes subsequentes, isto é, $t \geq t_0$.

A figura 1, representa o diagrama em bloco de um sistema no espaço de estados.

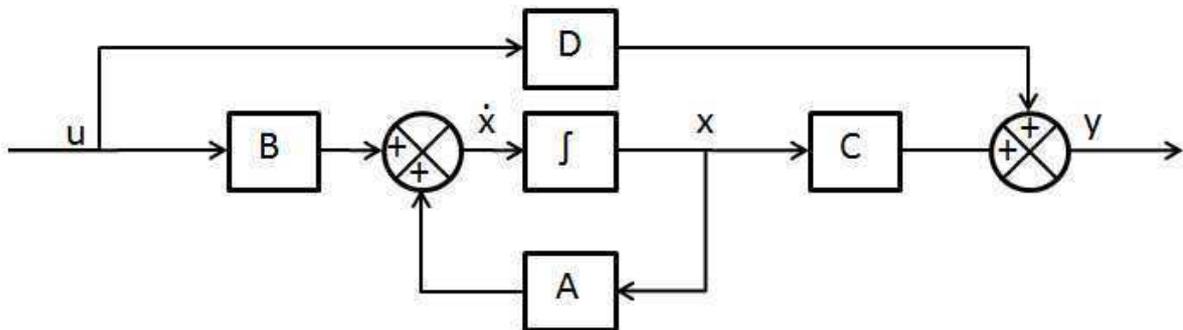


Figura 1 - Diagrama em blocos de sistema no espaço de estados.

Fonte: Elaboração própria.

Para denotar um instante de tempo em particular, usaremos a seguinte notação,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ para o caso contínuo e,}$$

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k), \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ para o caso discreto.}$$

É importante salientar que as matrizes A, B, F e G , serão tomadas como sendo constantes, isto é, não variam no tempo, o que caracteriza o sistema como invariante no tempo.

B.3.1 Propriedades dos sistemas

a) Controlabilidade

A análise de controlabilidade é muito útil na determinação da solução de um problema no projeto de sistemas de controle, pois esta pode não existir se o sistema não for controlável.

Diz-se que um sistema é controlável se for possível projetar uma entrada que transfira todas as variáveis de estado de um sistema $x(t_0)$ em um tempo inicial t_0 para um estado desejado $x(t_1)$ em um tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Considerando o sistema no espaço de estados definido pelas equações 2.5 e 2.6, esse sistema é de estados completamente controlável se, e somente se, a matriz $n \times m$, definida como matriz de controlabilidade \mathcal{C} , dada por,

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

possuir posto n (Ogata, 2003, p.639).

Exemplo:

Considere o sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u.$$

Vamos determinar se este sistema é de estado completamente controlável, calculando o posto da matriz de controlabilidade \mathcal{C} .

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \text{ e } A^2B = \begin{bmatrix} 41 \\ 45 \\ 52 \end{bmatrix}, \text{ logo:}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 41 \\ 1 & 7 & 45 \\ 4 & 11 & 52 \end{bmatrix}, \text{ que possui posto igual a 3. Logo o sistema é controlável.}$$

b) Observabilidade

No projeto de controladores por realimentação, faz-se necessário a realimentação dos estados. Tal tarefa nem sempre é possível de se fazer diretamente devido a falta de acesso direto a variável. Assim, os observadores são sistemas capazes de reconstruir as variáveis de estados permitindo que essas sejam utilizadas para a realimentação.

O projeto de observadores contudo, necessita que o sistema seja observável. Um sistema é dito observável, se for possível, de posse das medidas das entradas $u(t)$ e $y(t)$, determinar o estado inicial $x(t_0)$ em um tempo finito a partir de t_0 . Conhecendo-se o estado inicial $x(t_0)$, é possível obter a trajetória do sistema.

Considerando novamente o sistema dado pelas equações 2.5 e 2.6, diz-se que esse sistema é observável se, e somente se, a matriz $(n \times p) \times n$, definida como matriz de observabilidade \mathcal{O} , dada por,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

possuir posto n completo (Ogatha, 2003, p.645).

Exemplo:

Considere o sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 1]u.$$

Vamos determinar se este sistema é observável calculando o posto da matriz de observabilidade \mathcal{O} .

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$CA = [5 \ 3 \ 2]$ e $CA^2 = [22 \ 21 \ 7]$, logo:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 22 & 21 & 7 \end{bmatrix}, \text{ que possui posto } 3, \text{ assim o sistema é observável.}$$

c) Princípio da dualidade

O princípio da dualidade estabelecido por Kalman em 1963 permite avaliar a controlabilidade de um sistema, analisando-se a observabilidade de seu dual. Para compreender melhor este conceito, considere os seguintes sistemas.

Seja S_1 dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde x = vetor de estado (vetor de dimensão n)

u = vetor de controle (vetor de dimensão r)

y = vetor de saída (vetor de dimensão m)

A = matriz $n \times n$

B = matriz $n \times r$

C = matriz $m \times n$.

O sistema dual de S_1 denotado por S_2 , tem a seguinte representação:

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$

$$w = B^T z$$

onde z = vetor de estado (vetor de dimensão n)

v = vetor de controle (vetor de dimensão m)

w = vetor de saída (vetor de dimensão r)

A^T = matriz transposta de A

B^T = matriz transposta de B

C^T = matriz transposta de C .

O princípio da dualidade estabelece que o par (A, B) é controlável se, e somente se, o par (A^T, B^T) for observável (Chen, 1999, p. 155).

Para entendermos este princípio, basta notarmos que para o sistema S_1 ser controlável, a matriz:

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

deve possuir posto igual a n .

E para o sistema S_2 ser observável, a matriz:

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]^T$$

deve possuir posto igual a n .

Notamos assim que a condição de controlabilidade de um sistema, implica na observabilidade de seu sistema dual.

B.4 Comentários adicionais

Os conceitos apresentados neste apêndice são utilizados ao longo do texto do presente trabalho. Em outras vezes, faz-se uso do próprio texto para explicar os conceitos matemáticos envolvidos sem recorrer a obras secundárias, visando facilitar a compreensão do leitor.

APÊNDICE C

Script em MATLAB®

Abaixo é apresentado o script desenvolvido em Matlab para comparação entre o filtro robusto e de Kalman.

```

%%%%%%%%%% Início do programa
%%%%%%%%%%

close all % Remove todas as variáveis da área de trabalho
clear all % Remove todas as figuras
clc      % Limpa a janela de comandos

%Parâmetros da planta.
F=[0.83 0.0196;0 0.83]; %matriz de estados da planta
G=[0.804 0;0 0.804];   %matriz de ruído
H=[1 -1];              %matriz de saída
M=[0.9804;0];          %matriz de projeto das incertezas
R=1;                   %matriz de ponderação do erro de saída
Ef=[0 7];              %matriz de incerteza
Eg=[0 0];              %matriz de incerteza
Q=[1.693 0.0697; 0.0697 1.693]; %matriz de ponderação do ruído de estado

alfa=5; %definição do alfa para cálculo do lambda.

Nexperimentos = 100; %quantidade de experimentos a serem realizados

%Definição de alguns tamanhos de linhas e colunas para uma generalização
posterior.
n = length(H);
[IM,cM] = size(M);
[IN,cN] = size(Ef);

%-----
%                               Experimentos
%
% 1 experimento=Niteracoes no sistema e na filtragem= 1 trajetoria de estados
% (cada experimento uma sequencia de incertezas fixa para todos os filtros)
% Deltai=Delta fixo para todas iteracoes i em cada experimento
%-----

SomaErrokalman = zeros(1,1000); %vetor de zeros para a soma do erro de
                                %kalman
SomaErroBDU = zeros(1,1000); %vetor de zeros para a soma do erro

```

```

                                %do filtro BDU

for m = 1:Nexperimentos+1;

%-----
% Calculo da trajetoria dos estados do sistema com incerteza. (Estimativa inicial e
saida medida)
%-----
    w    = mvnrnd([zeros(n,1)],Q,1002)'; %ruído de estado
    v    = mvnrnd(0,R,1002)';           %ruído de medida

x_medido_k(:,1) = ones(n,1); %definição do estado inicial

    for j = 1:1001

%Gera o valor da contração Delta
        delta = randn(cM,IN); %matriz delta com número de colunas de M e número
de linhas de Ef

            while norm(delta)>1
                delta =randn(cM,IN);
            end

            % quando -0.1<delta<0.6 (afim de manter delta em um valor acima de 0.6)
            if delta < 0
                delta = -delta;
            end
            if delta < 0.6
                delta = 0.8;
            end

%Modelo com incertezas

            delta_F    = M*delta*Ef;
            F_r        = F + delta_F;
            x_medido_k(:,j+1) = F_r*x_medido_k(:,j) + G*w(:,j);
            y_medido_k(:,j)    = H*x_medido_k(:,j) + v(:,j);

        end

%Filtro kalman

            P_kalman    = eye(n); %Matriz de variância do
estado inicial.
            P_kalman    = inv(inv(P_kalman) + H*inv(R)*H); %Matriz de covariância
do erro.

```

```

x_kalman(:,1) = P_kalman*H*inv(R)*y_medido_k(:,1); %x kalman no
estado inicial.

```

```

%Algoritmo iterativo para determinação das estimativas pelo filtro de kalman

```

```

for j=1:1000

```

```

    xpreditivo(:,(j+1))=F*x_kalman(:,j); % x de k+1 dado k medidas
    erro(:,(j+1))=y_medido_k(:,j+1)-H*xpreditivo(:,(j+1)); %erro de medida
em k+1 dado k medidas
    PK_MAIS_1=F*P_kalman*F'+G*Q*G';
    Re=R+H*PK_MAIS_1*H';
    P_kalman=PK_MAIS_1-PK_MAIS_1*H*inv(Re)*H*PK_MAIS_1;
    x_kalman(:,j+1)=xpreditivo(:,j+1)+P_kalman*H*inv(R)*erro(:,j+1);
    erro_kalman(:,j)=x_medido_k(:,j)-x_kalman(:,j);
    normaDoErro(j)=norm(erro_kalman(:,j));

```

```

end

```

```

%Soma do erro de kalman

```

```

SomaErrokalman=SomaErrokalman+normaDoErro;

```

```

%Filtro BDU

```

```

P_BDU = eye(n); %Matriz de variância do
estado inicial.
P_BDU = inv(inv(P_BDU) + H*inv(R)*H); %Matriz de covariância do
erro.
x_BDU(:,1) = P_BDU*H*inv(R)*y_medido_k(:,1); %x BDU no estado
inicial.
lambda=(1+alfa)*(norm(M'*H*inv(R)*H*M)); %Calculo do lambda
Qmodificada=Q;
Gmodificada=G;
Rmodificada=R-inv(lambda)*H*M*M'*H';

```

```

%Algoritmo iterativo para determinação das estimativas pelo filtro de BDU

```

```

for j=1:1000

```

```

    P_AUX=inv(inv(P_BDU)+lambda*Ef'*Ef);
    F_AUX=F*(eye(2)-lambda*P_AUX*Ef'*Ef);
    xpreditivo(:,(j+1))=F_AUX*x_BDU(:,j); % x de k+1 dado k medidas
    erro(:,(j+1))=y_medido_k(:,j+1)-H*xpreditivo(:,(j+1)); %erro de medida
em k+1 dado k medidas
    PK_MAIS_1=F*P_AUX*F'+G*Q*G';
    Re=Rmodificada+H*PK_MAIS_1*H';

```

```

P_BDU=PK_MAIIS_1-PK_MAIIS_1*H*inv(Re)*H*PK_MAIIS_1;
x_BDU(:,j+1)=xpreditivo(:,j+1)+P_BDU*H*inv(Rmodificada)*erro(:,j+1);
erro_BDU(:,j)=x_medido_k(:,j)-x_BDU(:,j);
normaDoErro(j)=norm(erro_BDU(:,j));

end

%Soma do erro BDU

SomaErroBDU=SomaErroBDU+normaDoErro;

end
%Gráfico da variância do erro do filtro de kalman e do filtro BDU

figure(1)
EAveragekalman = SomaErrokalmn/(Nexperimentos+1) ;
save EAveragekalman;
EAverageBDU = SomaErroBDU/(Nexperimentos+1) ;
save EAverageBDU;
i = 1:1000;
semilogx(i,20*log10(EAveragekalman), 'b-',i,20*log10(EAverageBDU), 'r-');
%preto

xlabel('k')
ylabel('Error Variance (dB)')
title('Variância do erro de kalman em azul, Variância do erro do Filtro BDU
em vermelho')

%Trajetória de x1 medido, de kalman e do filtro bdu
figure(2)
plot(i,x_medido_k(1,1:1000),'r-',i,x_kalman(1,1:1000),'b-
',i,x_BDU(1,1:1000),'g-')
title('X medido em vermelho, x de kalman em azul e x pelo filtro bdu em
verde')
xlabel('i')
ylabel('X1')

%Trajetória de x medido, de kalman e do filtro bdu
figure(3)
plot(i,x_medido_k(2,1:1000),'r-',i,x_kalman(2,1:1000),'b-
',i,x_BDU(2,1:1000),'g-')
xlabel('i')
ylabel('X2')
title('Variância do erro de kalman em azul, Variância do erro do Filtro BDU
em vermelho')

```

